GÖDEL, ESCHER, BACH:

UNA ETERNA TRENZA DORADA



DOUGLAS R. HOFSTADTER



CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA

MEXICO

GÖDEL, ESCHER, BACH:

UNA ETERNA TRENZA DORADA

DOUGLAS R. HOFSTADTER



CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
MEXICO

Título original: **GÖDEL, ESCHER, BACH: An Eternal Golden Braid**

Autor: *Douglas R. Hofstadter*

Traducción: *Mario Arnaldo Usabiaga Brandizzi*

ISBN 968-823-118-5

Impreso y hecho en México

Printed and made in Mexico

Para M. y D.

INDICE

Visión panorámica *x*
Lista de ilustraciones *xviii*
Palabras de agradecimiento *xxiii*

Parte I: GEB

Introducción: Ofrenda músico-lógica 3
- *Invención a tres voces* 34

Capítulo I: El acertijo MU 39
- *Invención a dos voces* 51

Capítulo II: Significado y forma en matemática 55
- *Sonata para solo de Aquiles* 73

Capítulo III: Figura y campo 76
- *Contracrostipunto* 89

Capítulo IV: Coherencia, completitud y geometría 97
- *Pequeño laberinto armónico* 122

Capítulo V: Estructuras y procesos recursivos 149
- *Canon por aumentación interválica* 181

Capítulo VI: La localización de la significación 187
- *Fantasía cromática y altercado* 210

Capítulo VII: El cálculo proposicional 214
- *Canon Cangrejo* 236

Capítulo VIII: Teoría tipográfica de los números 241
- *Ofrenda MU* 272

Capítulo IX: Mumon y Gödel 288

Parte II: EGB

- *Preludio . . .* 323

Capítulo X: Niveles de descripción 334
y sistemas de computadora 366
- *. . . y Fuga . . . Hormiguesca* 366

Capítulo XI: Cerebro y pensamiento 396

• *Suite anglofrancogermanicoespañola* 432

Capítulo XII: Mente y pensamiento 436

• *Aria con variaciones diversas* 462

Capítulo XIII: BlooP y FlooP y GlooP 479

• *Aire sobre la cuerda de G* 509

Capítulo XIV: Sobre proposiciones formalmente indecidibles de TNT y sistemas afines 518

• *Cantatatata . . . de cumpleaños* 545

Capítulo XV: Brincos fuera del sistema 550

• *Pensamientos edificantes de un fumador* 568

Capítulo XVI: Autorref y autorrep 585

• *El Magnifican . . . grejo, por supuesto* 648

Capítulo XVII: Church, Turing, Tarski y otros 660

• *SHRDLU, juego de la inventividad del hombre* 692

Capítulo XVIII: Inteligencia Artificial: mirada retrospectiva 701

• *Contrafactus* 749

Capítulo XIX: Inteligencia Artificial: mirada prospectiva 758

• *Canon Perezoso* 807

Capítulo XX: Bucles Extraños o Jerarquías Enredadas 811

• *Ricercar a seis voces* 854

Bibliografía 881
Créditos 896
Indice de nombres 898

Visión Panorámica

Parte I: GEB

Introducción: Ofrenda músico-lógica. El libro se abre con la historia de la *Ofrenda Musical* de Bach. Este hizo una visita inesperada al Rey Federico el Grande de Prusia, y se le solicitó que improvisara con base en un tema presentado por el monarca. Sus improvisaciones constituyeron el fundamento de aquella gran obra. La *Ofrenda Musical* y su historia forman un tema sobre el cual yo "improviso" a través del libro entero, dando lugar así a una suerte de "Ofrenda Metamusical". Se hace alusión a la autorreferencia y a la interacción entre diferentes niveles, en Bach; esto conduce a una mención de nociones paralelas, presentes en los dibujos de Escher y en el Teorema de Gödel. Como antecedente de este último, se incluye una breve introducción a la historia de la lógica y de las paradojas. A su vez, esto lleva al razonamiento mecánico y a las computadoras y al debate sobre si es posible la Inteligencia Artificial. Cierro este tramo con una explicación de los orígenes del libro: en particular, del cómo y el porqué de los diálogos.

Invención a tres voces. Bach compuso quince invenciones a tres voces. En este diálogo a tres voces, la Tortuga y Aquiles —los principales protagonistas ficticios de los diálogos— son "inventados" por Zenón (tal como ocurrió en realidad, con la finalidad de ilustrar la paradoja de Zenón acerca del movimiento). Es muy breve y se limita a dar el tono de los diálogos venideros.

Capítulo I: El acertijo MU. Se plantea aquí un sistema formal simple (el sistema MIU), y se requiere del lector que resuelva un acertijo, con el objeto de que adquiera familiaridad con los sistemas formales en general. Se introduce cierta cantidad de nociones fundamentales: cadena, teorema, axioma, regla de inferencia, derivación, sistema formal, procedimiento de decisión, acción dentro/fuera del sistema.

Invención a dos voces. Bach también compuso quince invenciones a dos voces. Este diálogo a dos voces no fue escrito por mí, sino por Lewis Carroll, en 1895. Carroll tomó a la Tortuga y a Aquiles prestados de Zenón, y yo a mi vez los tomé de Carroll. El tópico es la relación entre el razonamiento, el razonamiento acerca del razonamiento, el razonamiento acerca del razonamiento acerca del razonamiento, y así siguiendo. Esto traza un paralelo, en cierta forma, con las paradojas de Zenón sobre la imposibilidad del movimiento, destinadas a mostrar, mediante la utilización de la retrogradación infinita, que el razonamiento es imposible. Es una bella paradoja y se la vuelve a citar en diversas ocasiones en el transcurso del libro.

Capítulo II: Significado y forma en matemática. Es presentado otro sistema formal (el sistema pq), aun más simple que el sistema MIU del Capítulo I. En un comienzo, parece carecer de significación, pero súbitamente sus

símbolos se revelan como poseedores de significado, en virtud de la forma de los teoremas en que aparecen. Esta revelación es la primera penetración importante en la significación: se trata de su profunda vinculación con el isomorfismo. Diversos temas relacionados con la significación son tocados aquí: verdad, demostración, manipulación simbólica y el elusivo concepto de "forma".

Sonata para solo de Aquiles. Un diálogo que imita las Sonatas de Bach para solo de violín. Aquí es Aquiles el único que habla, puesto que se trata de la transcripción de una conversación telefónica, pero sólo de lo dicho en uno de sus extremos, no del otro, donde se encuentra la Tortuga. La charla versa sobre los conceptos de "figura" y "campo" en diversos contextos: por ejemplo, en las obras de Escher. El diálogo mismo da lugar a una muestra de tal distinción, ya que los parlamentos de Aquiles forman una "figura", en tanto que los de la Tortuga —implícitos en los de Aquiles— forman un "campo".

Capítulo III: Figura y campo. La distinción pictórica entre figura y campo es comparada con la distinción entre teoremas y no teoremas en el terreno de los sistemas formales. La pregunta "¿una figura contiene necesariamente la misma información que su campo?" lleva a la distinción entre conjuntos recursivamente enumerables y conjuntos recursivos.

Contracrostipunto. Este diálogo cumple un papel central en el libro, pues contiene una serie de paráfrasis de la construcción autorreferencial de Gödel y de su Teorema de la Incompletitud. Una de las paráfrasis del Teorema reza: "Hay, para todo fonógrafo, un disco que éste no puede hacer escuchar." El título del diálogo entrecruza las palabras "acróstico" y "contrapunto"; esta última es una expresión latina, utilizada por Bach para hacer referencia a las fugas y cánones que integran su *Arte de la fuga*. Se hacen algunas alusiones explícitas a esta obra. El diálogo mismo esconde algunas elaboraciones acrósticas.

Capítulo IV: Coherencia, completitud y geometría. El diálogo precedente es explicado en la medida de lo posible en esta etapa. Nos vuelve a remitir al problema de cómo y cuándo los símbolos de un sistema formal adquieren significación. A fin de ilustrar la elusiva noción de "términos indefinidos" se narra la historia de las geometrías euclidiana y no euclidiana. Ello, a su vez, nos plantea la noción de coherencia, con respecto a diferentes, y posiblemente "opuestas", geometrías. A través de esta discusión se esclarece el concepto de términos indefinidos y se examina la vinculación de éstos con los procesos de percepción y de pensamiento.

Pequeño laberinto armónico. Está basado en la pieza de Bach, para órgano, del mismo nombre. Es una introducción juguetona a la noción de estructuras recursivas, esto es, autoincluidas. Contiene relatos en el interior de relatos. La narración enmarcadora, en lugar de finalizar de acuerdo a las expectativas, queda abierta, de modo que el lector no obtiene una resolución. Uno de los relatos internos se ocupa de la modulación musical, en particular de una composición para órgano que finaliza en una tonalidad errónea, de modo que el oyente no obtiene una resolución.

Capítulo V: Estructuras y procesos recursivos. La noción de recursividad es presentada dentro de contextos muy diversos: patrones musicales, patrones lingüísticos, estructuras geométricas, funciones matemáticas, teorías físicas, programas de computadora y otros.

Canon por aumentación interválica. Aquiles y la Tortuga tratan de resolver la interrogación: "¿Qué contiene más información, un disco o el fonógrafo que lo ejecuta?" Este extraño problema aparece cuando la Tortuga describe un determinado disco que, cuando es ejecutado por una serie de distintos fonógrafos, produce dos melodías enteramente diferentes: B-A-C-H y C-A-G-E. Ocurre, sin embargo, que ambas melodías son, en un sentido peculiar, la "misma".

Capítulo VI: La localización de la significación. Un amplio examen de la manera en que la significación se distribuye entre el mensaje codificado, el decodificador y el receptor. Los ejemplos presentados incluyen cadenas de ADN, inscripciones aún sin descifrar de antiguas tabletas y discos fonográficos en viaje por el espacio. Se postula la existencia de relación entre la inteligencia y la significación "absoluta".

Fantasía cromática y altercado. Un breve diálogo con muy escasa similitud, fuera del título, respecto a la *Fantasía cromática y fuga*, de Bach. Se ocupa del modo adecuado de manipular oraciones con la finalidad de preservar la verdad y aborda específicamente la cuestión de si existen reglas para la utilización de la palabra "y". Este diálogo tiene mucho en común con el de Lewis Carroll.

Capítulo VII: El cálculo proposicional. Se sugiere aquí que las palabras tales como "y" pueden estar gobernadas por reglas formales. Una vez más son traídas a colación las nociones de isomorfismo y de adquisición automática de significación por los símbolos de un sistema de ese tipo. Al margen, todos los ejemplos de este capítulo son "zentencias": sentencias, es decir, oraciones, tomadas de koans zen. Esto es ex-profeso, y hecho con una punta de malignidad puesto que los koans zen son relatos deliberadamente ilógicos.

Canon Cangrejo. Diálogo basado en una composición del mismo nombre, incluida en la *Ofrenda Musical*. La denominación proviene del hecho de que los cangrejos (se supone) marchan hacia atrás. En este diálogo hace su primera aparición el Cangrejo. Desde el punto de vista del artificio formal y de la interacción entre niveles, éste quizá sea el diálogo más denso del libro. Profundamente entrelazados, aquí, encontramos a Gödel, Escher y Bach.

Capítulo VIII: Teoría tipográfica de los números. Es formulada aquí una extensión del cálculo proposicional, llamada "TNT". Dentro de TNT, se puede vehiculizar el razonamiento teórico-numérico a través de una rígida manipulación simbólica. Son consideradas las diferencias entre el razonamiento formal y el pensamiento humano.

Ofrenda MU. Este diálogo es anunciador de nuevos tópicos. Su tema ostensible es el budismo zen y los koans, pero en realidad se trata de una discusión levemente velada acerca de la teoremidad y la no teoremidad, la verdad y la falsedad de las cadenas pertenecientes a la teoría de los números.

Hay fugaces referencias a la biología molecular, particularmente al Código Genético. La afinidad con la *Ofrenda Musical* no es estrecha, salvo en el título y en el ejercicio de juegos autorreferenciales.

Capítulo IX: Mumon y Gödel. Se hace el ensayo de comentar las curiosas ideas del budismo zen. Ocupa un lugar central, aquí, el monje zen Mumon, autor de acotaciones famosas acerca de muchos koans. En un sentido, las ideas zen ofrecen una semejanza metafórica con ciertas nociones contemporáneas de la filosofía de la matemática. Luego de ser presentado este "ezenario", es expuesta la idea gödeliana fundamental, la de la numeración Gödel, y se da un primer paso hacia el Teorema de Gödel.

Parte II: E G B

Preludio ... Este diálogo está articulado con el siguiente. Ambos están basados en preludios y fugas de *El clave bien temperado*, de Bach. Aquiles y la Tortuga traen un regalo al Cangrejo, quien tiene un invitado: el Oso Hormiguero. El presente consiste en una grabación de *El clave*, que pasan de inmediato. Al escuchar un preludio, los reunidos comentan la estructura de preludios y fugas, lo cual lleva a Aquiles a preguntar cómo se oye una fuga, si como un conjunto, o como una suma de partes. Se trata del debate entre holismo y reduccionismo, pronto retomado en la *Fuga Hormiguesca*.

Capítulo X: Niveles de descripción y sistemas de computadora. Son examinados diversos niveles de la observación de pinturas, de tableros de ajedrez y de sistemas de computadoras. Este último tema es luego estudiado en detalle, lo cual implica la descripción de lenguajes de máquina, lenguajes ensambladores, lenguajes compiladores, sistemas operativos, etc. La discusión gira después hacia sistemas compuestos de otros tipos, tales como los equipos deportivos, los núcleos, los átomos, el clima, etc. Surge el interrogante de cuántos niveles intermedios existen y, por cierto, de si tales niveles existen, en definitiva.

... *y Fuga* ... *Hormiguesca.* Imitación de una fuga musical: cada voz entra diciendo lo mismo. El tema —holismo *versus* reduccionismo— es presentado a través de una imagen recursiva compuesta por palabras compuestas por palabras más pequeñas, etc. Las palabras que aparecen en los cuatro niveles de esta curiosa ilustración son "HOLISMO", "REDUCCIONISMO" y "MU". La conversación se desplaza hacia una amiga del Oso Hormiguero, la tía Hilaria, una colonia de hormigas dotada de conciencia. El tópico de la discusión son los diversos niveles de los procesos de pensamiento de la Tía. El diálogo oculta muchos artificios fugales. A modo de insinuaciones al lector, se hace referencia a artificios paralelos que aparecen en la fuga que los cuatro amigos están escuchando. Al final de la *Fuga Hormiguesca* retornan, considerablemente transformados, temas del *Preludio*.

Capítulo XI: Cerebro y pensamiento. "¿Cómo los pensamientos pueden tener su apoyo en el hardware del cerebro?" es el tópico de este capítulo. Para comenzar, se lanza una mirada panorámica sobre las estructuras de pe-

queña y gran escala del cerebro. Después, se analiza especulativamente, y con cierto detalle, la relación entre conceptos y actividad neural.

Suite anglofrancogermanicoespañola. Un interludio, consistente en el poema nonsense "Jabberwocky", de Lewis Carroll. Lo acompañan dos traducciones, una al francés y otra al alemán, ambas del siglo pasado [y una al español, contemporánea, agregada por esta edición].

Capítulo XII: Mente y pensamiento. Los poemas precedentes plantean de manera vigorosa el interrogante de si pueden *trazarse* "correspondencias" entre lenguas o, inclusive, entre mentes distintas. ¿Cómo es posible la comunicación entre dos cerebros físicos separados? ¿Qué tienen en común los cerebros humanos? Se propone una analogía geográfica a fin de sugerir una respuesta. Surge la pregunta: "¿Puede ser comprendido un cerebro, en un sentido objetivo, desde fuera del mismo?"

Aria con variaciones diversas. Un diálogo cuya forma se basa en las *Variaciones Goldberg*, de Bach, y cuyo contenido se vincula con problemas teórico-numéricos tales como la conjetura Goldbach. Este híbrido persigue el propósito principal de mostrar cómo la teoría de los números tiene su origen sutil en el hecho de que hay muy diversas variaciones sobre el tema de la búsqueda dentro de un espacio infinito. Algunas variaciones conducen a indagaciones infinitas, otras a indagaciones finitas, y otras más vacilan entre ambos polos.

Capítulo XIII: BlooP y FlooP y GlooP. Estos son los nombres de tres lenguajes de computadora. Los programas BlooP pueden únicamente cumplir búsquedas predictiblemente finitas, mientras que los programas FlooP pueden hacerlo con búsquedas impredictibles o, inclusive, infinitas. El objeto de este capítulo es aportar una visión intuitiva de las nociones de función recursiva primitiva y general, en teoría de los números, pues son esenciales para la demostración de Gödel.

Aire sobre la cuerda de G. Un diálogo que refleja en palabras la construcción autorreferencial de Gödel. La idea corresponde a W. V. O. Quine. Este diálogo actúa como prototipo del capítulo que sigue.

Capítulo XIV: Sobre proposiciones formalmente indecidibles de TNT y sistemas afines. El título de este capítulo es una adaptación del título del artículo de Gödel de 1931, el cual significó la primera publicación del Teorema de la Incompletitud. Las dos partes principales de la demostración de Gödel han sido cuidadosamente examinadas. Se muestra así que la suposición de coherencia de TNT obliga a concluir que TNT (o cualquier sistema similar) es incompleto. Son analizadas las vinculaciones existentes con las geometrías euclidiana y no euclidiana, lo mismo que las implicaciones que surgen con respecto a la filosofía de la matemática.

Cantatatata ... de cumpleaños. Donde Aquiles no puede convencer a la marrullera y descreída Tortuga de que ese día es su (de Aquiles) cumpleaños. Los repetidos pero infructuosos intentos de Aquiles por lograrlo prefiguran la repetibilidad de la argumentación de Gödel.

Capítulo XV: Brincos fuera del sistema. Es mostrada la repetibilidad de la argumentación de Gödel, junto con la implicación de que TNT no es sólo incompleto, sino "esencialmente incompleto". La indudablemente conspicua postulación de Lucas, en el sentido de que el Teorema de Gödel demuestra que el pensamiento humano no puede en ningún sentido ser "mecánico", es aquí analizada, y hallada defectuosa.

Pensamientos edificantes de un fumador. Un diálogo que aborda muchos tópicos, comunicados por la característica de estar conectados con la autorreplicación y la autorreferencia. Entre los ejemplos presentados, hay cámaras de televisión que filman pantallas de televisión, y virus y otras entidades subcelulares que se autoensamblan. El título proviene de un poema de J. S. Bach, introducido de una manera peculiar.

Capítulo XVI: Autorref y autorrep. Este capítulo se refiere a la conexión entre la autorreferencia, en sus diversas manifestaciones, y las entidades autorreproductoras (por ejemplo, programas de computadora o moléculas de ADN). Son estudiadas las relaciones entre una entidad autorreproductora y los mecanismos externos a ella que colaboran en su autorreproducción (por ejemplo, una computadora o proteínas); se analiza en particular la complejidad de la distinción. El tópico central del capítulo es el modo en que se traslada la información a través de los diversos niveles de tales sistemas.

El Magnifican . . . grejo, por supuesto. Este título es un juego verbal con base en el *Magnificat* en Re, de Bach. El asunto se centra en el Cangrejo, quien parece contar con un poder mágico que lo habilita para distinguir entre afirmaciones verdaderas y falsas de teoría de los números, mediante su lectura como composiciones musicales: el procedimiento consiste en ejecutarlas en su flauta y en la determinación inmediata de si son "bellas" o no.

Capítulo XVII: Church, Turing, Tarski y otros. El ficticio Cangrejo del diálogo precedente es sustituido por varias personas reales, dotadas de pasmosas facultades matemáticas. La Tesis Church-Turing, que vincula la actividad mental con la computación, es presentada a través de distintas versiones de validez discrepante. Se las analiza a todas en función, especialmente, de sus proyecciones en la simulación mecánica del pensamiento humano, o en la programación de una máquina que pueda sentir o crear la belleza. La conexión entre actividad cerebral y computación plantea algunos otros tópicos: el problema de la detención, de Turing, y el Teorema de la Verdad, de Tarski.

SHRDLU, juego de la inventividad del hombre. Este diálogo ha sido tomado de un artículo de Terry Winograd sobre su programa SHRDLU; solamente han sido modificados algunos nombres. En él, un programa se comunica con una persona, a propósito del denominado "mundo de bloques", utilizando el idioma de un modo un tanto solemne. El programa de computadora muestra cierta comprensión real, dentro de los límites de su mundo. El título del diálogo es una paráfrasis de *Jesu, Joy of Man's Desiring*, título asignado a uno de los movimientos de la Cantata 147, de Bach.*

* El título original del diálogo es: *SHRDLU, Toy of Man's Designing.* [T.]

Capítulo XVIII: Inteligencia Artificial: mirada retrospectiva. Este capítulo se inicia con una exposición de la célebre "verificación Turing": una propuesta de Alan Turing, un adelantado en el campo de las computadoras, destinada a detectar la presencia o ausencia de "pensamiento" en una máquina. Sigue luego una resumida historia de la Inteligencia Artificial. Esta última abarca programas que pueden —en alguna medida— practicar juegos, demostrar teoremas, resolver problemas, componer música, ejercitar la matemática y utilizar "lenguajes naturales" (el inglés, por ejemplo).

Contrafactus. A propósito de cómo organizamos inconscientemente nuestros pensamientos a fin de poder imaginar, en todo momento, variantes hipotéticas del mundo real. Acerca, también, de muestras aberrantes de esta facultad, tal como la que caracteriza al Perezoso, un nuevo personaje, fanático amante de las frituras francesas y feroz impugnador de la contrafactibilidad.

Capítulo XIX: Inteligencia Artificial: mirada prospectiva. El diálogo precedente desencadena la discusión acerca del modo en que el conocimiento es representado en distintas capas contextuales. Esto conduce a la moderna idea, propia de IA, de "marcos". Para ilustrar esto de modo concreto, se plantea una serie de problemas de reconocimiento de patrones visuales, cuyo manejo requiere el uso de la noción de marco. Luego, es examinada la profunda cuestión de la interacción de los conceptos en general, lo cual lleva a algunas especulaciones acerca de la creatividad. El capítulo concluye con un grupo de "Preguntas y Especulaciones" personales, relativas a IA y a la mente, en general.

Canon Perezoso. Un canon que imita a un similar bachiano, donde una voz interpreta la misma melodía que otra, sólo que el revés y dos veces más lento, en tanto una tercera voz queda en libertad. Aquí, el Perezoso dice lo mismo que la Tortuga, sólo que negándolo (en un sentido amplio del término) y en forma doblemente pausada, en tanto Aquiles juega libre.

Capítulo XX: Bucles Extraños o Jerarquías Enredadas. Gran desenlace de muchas de las ideas relativas a los sistemas jerárquicos y a la autorreferencialidad. Esto se asocia con los enmarañamientos que se producen cuando los sistemas se vuelven sobre sí mismos: por ejemplo, la ciencia puesta a demostrar la ciencia, los gobiernos cuando investigan sus propios entuertos, el arte que viola las reglas del arte y, finalmente, los pensamientos humanos dedicados a sus propios cerebros y mentes. ¿El Teorema de Gödel tiene algo que decir acerca de este "enredo" último? ¿El libre albedrío y la noción de conciencia están conectados con el Teorema de Gödel? El capítulo termina enlazando entre sí, una vez más, a Gödel, Escher y Bach.

Ricercar a seis voces. Este diálogo es un divertimento exhuberante en el que intervienen muchas de las ideas que han recorrido el libro. Se trata de una reactualización de la historia de la *Ofrenda Musical*, con la cual comienza el libro; simultáneamente, es una "traducción" a palabras de la composición más compleja de la *Ofrenda Musical*: el *Ricercar a seis voces*. Esta dualidad infunde al diálogo más niveles de significación que los presentes en ningún otro del libro. Federico el Grande es remplazado por el Cangrejo,

los pianos por computadoras, y así siguiendo. Se producen muchas cosas sorprendentes. El contenido del diálogo abarca problemas relativos a la mente, a la conciencia, al libre albedrío, a la Inteligencia Artificial, a la verificación Turing, etc., todos los cuales han sido presentados con anterioridad. Concluye con una referencia implícita al comienzo del libro, convirtiendo así a éste en un inmenso bucle autorreferencial, que simboliza a la vez la música de Bach, la pintura de Escher y el Teorema de Gödel.

Lista de Ilustraciones

Cubierta: Un trip-let * "GEB" y otro "EGB" suspendidos en el espacio, arrojando su sombra simbólica sobre tres planos que se encuentran entre sí en el rincón de un cuarto. ("Trip-let" es el nombre que he asignado a los bloques modelados de tal manera que sus sombras, en tres direcciones ortogonales, constituyen tres letras diferentes. El trip-let se me ocurrió de modo súbito una tarde en que estaba discurriendo a propósito de la mejor manera de simbolizar la unidad de Gödel, Escher y Bach mediante alguna forma de fusión, en un diseño llamativo, de sus nombres. Los dos trip-lets que aparecen en la cubierta fueron diseñados y construidos por mí, utilizando principalmente una sierra de cinta y una fresa radial para los orificios; el material empleado es madera de pino "redwood" y miden exactamente 4 pulgadas por lado.)

Al pie de esta lista: Comienzo del Génesis, en antiguo hebreo

Parte I: El trip-let "GEB" lanzando sus tres sombras ortogonales.

1. Johann Sebastian Bach, por Elias Gottlieb Haussmann.
2. *Concierto de Flauta en Sanssouci*, por Adolph von Menzel.
3. El Tema Regio.
4. Acróstico de Bach basado en 'RICERCAR'.
5. *Cascada*, de M. C. Escher.
6. *Subiendo y bajando*, de M. C. Escher.
7. *Autorretrato*, de M. C. Escher.
8. *Metamorfosis II*, de M. C. Escher.
9. Kurt Gödel.
10. *Banda de Möbius*, de M. C. Escher.
11. "Arbol" de todos los teoremas del sistema MIU.
12. *Castillo en el cielo*, de M. C. Escher.
13. *Liberación*, de M. C. Escher.
14. *Mosaico II*, de M. C. Escher.
15. "BUZON POSTAL".
16. *Cobertura de un plano mediante pájaros*, de M. C. Escher.
17. *FIGURA-FIGURA Figura*, de Scott E. Kim.
18. Diagrama de las relaciones entre diversas clases de cadenas TNT.

* "Triplet" significa triplete; por otro lado, "trip-let", con ese guión interior, actualiza la idea de *tres* mediante su primer miembro, y la idea de *letra* mediante el segundo. [T.]

19. Ultima página del *Arte de la fuga*, de Bach.
20. Presentación visual del fundamento básico del Teorema de Gödel.
21. *Torre de Babel*, de M. C. Escher.
22. *Relatividad*, de M. C. Escher.
23. *Convexo y cóncavo*, de M. C. Escher.
24. *Reptiles*, de M. C. Escher.
25. Laberinto de Creta.
26. Estructura del diálogo *Pequeño Laberinto Armónico*.
27. Red de Transición Recursiva de NOMBRE MODIFICADO Y NOMBRE ULTRAMODIFICADO.
28. La RTR NOMBRE ULTRAMODIFICADO, con un nódulo expandido recursivamente.
29. Diagramas D y H, representados implícitamente.
30. Diagrama D, con mayor expansión.
31. Una RTR de los números de Fibonacci.
32. Gráfica de la función INT(x).
33. Esqueletos de INT y del diseño G.
34. Diseño G: una gráfica recursiva.
35. Un complejo diagrama Feynman.
36. *Pez y escamas*, de M. C. Escher.
37. *Mariposas*, de M. C. Escher.
38. Arbol de una partida de "tres en raya".
39. La piedra Rosetta.
40. Un collage de escrituras.
41. Secuencia Básica del cromosoma del bacteriófago ϕ X174.
42. "*Canon Cangrejo*", de M. C. Escher.
43. Breve sección de uno de los genes del Cangrejo.
44. *Canon Cangrejo*, de la *Ofrenda Musical* de J. S. Bach.
45. *La Mezquita*, de M. C. Escher.
46. *Tres mundos*, de M. C. Escher.
47. *Gota de rocío*, de M. C. Escher.
48. *Otro mundo*, de M. C. Escher.
49. *Día y noche*, de M. C. Escher.
50. *Corteza*, de M. C. Escher.
51. *Charca*, de M. C. Escher.
52. *Superficie ondulada*, de M. C. Escher.
53. *Tres esferas II*, de M. C. Escher.

Parte II: El trip-let "EGB" lanzando sus tres sombras ortogonales.

54. *Banda de Möbius II*, de M. C. Escher.
55. Pierre de Fermat.
56. *Cubo con bandas mágicas*, de M. C. Escher.

57. La noción de "bloque".
58. Ensambladores, compiladores y niveles de lenguajes de computadora.
59. La construcción de inteligencia estrato por estrato.
60. La "ilustración MU".
61. "*Fuga Hormiguesca*", de M. C. Escher.
62. "Entrelazamiento" de dos nombres consabidos.
63. Fotografía de un puente de hormigas (de Fourmi, Lierre).
64. Una "hélice" HOLISMO-REDUCCIONISMO.
65. Dibujo esquemático de una neurona.
66. El cerebro humano, visto desde un perfil.
67. Respuestas de determinadas neuronas simples a ciertos patrones.
68. Superposición de recorridos neurales.
69. Construcción de un arco por termitas obreras.
70. Una diminuta porción de la "red semántica" del autor.
71. *Orden y caos*, de M. C. Escher.
72. Estructura de un programa BlooP con llamado menor.
73. Georg Cantor.
74. *Arriba y abajo*, de M. C. Escher.
75. "Multifurcación" de TNT.
76. *Dragón*, de M. C. Escher.
77. *Las sombras*, de René Magritte.
78. *Estado de gracia*, de René Magritte.
79. Virus del mosaico del tabaco.
80. *La muestra cautiva*, de René Magritte.
81. Pantallas de televisión autoincluidas.
82. *El aire y la canción*, de René Magritte.
83. Epiménides ejecutando su propia sentencia de muerte.
84. La paradoja de Epiménides vista como un témpano.
85. Una oración de Quine vista como un pan de jabón.
86. Una canción autorreproductora.
87. El Código Tipogenético.
88. La estructura ternaria de una tipoenzima.
89. Tabla de preferencias de ligamiento por parte de las tipoenzimas.
90. El Dogma Central de la Tipogenética.
91. Las cuatro bases constitutivas del ADN.
92. La estructura en forma de escalera del ADN.
93. Modelo molecular de la doble hélice del ADN.
94. El Código Genético.
95. Estructura secundaria y ternaria de la mioglobina.
96. Una sección de ARNm penetrando en un ribosoma.
97. Un polirribosoma.
98. Canon molecular de dos pisos.
99. El Correspondogma Central.
100. El Código Gödel.
101. El virus bacterial T4.
102. Infección de una bacteria por la acción de un virus.
103. El tránsito morfogenético del virus T4.

104. *Castrovalva*, de M. C. Escher.
105. Srinivasa Ramanuyan, y una de sus curiosas melodías indias.
106. Isomorfismos entre números naturales, calculadoras y cerebros humanos.
107. Actividad neural y simbólica del cerebro.
108. "Desprendibilidad" del nivel superior del cerebro.
109. Conflicto entre los niveles bajo y alto del cerebro.
110. La escena inicial de un diálogo con SHRDLU.
111. Una escena posterior del diálogo con SHRDLU.
112. Una de las escenas finales del diálogo con SHRDLU.
113. Alan Mathison Turing.
114. Prueba Pons Asinorum.
115. Arbol sin fin del objetivo de Zenón.
116. Una parábola en árabe.
117. *Aritmética mental*, de René Magritte.
118. Representación procedimental de "un cubo rojo que sustenta a una pirámide".
119. Problema de Bongard 51.
120. Problema de Bongard 47.
121. Problema de Bongard 91.
122. Problema de Bongard 49.
123. Pequeña porción de una red conceptual referida a problemas de Bongard.
124. Problema de Bongard 33.
125. Problemas de Bongard 85-87.
126. Problema de Bongard 55.
127. Problema de Bongard 22.
128. Problema de Bongard 58.
129. Problema de Bongard 61.
130. Problemas de Bongard 70-71.
131. Un diagrama esquemático del Diálogo *Canon Cangrejo*.
132. Dos cromosomas homólogos reunidos en el centro por un centrómero.
133. "*Canon Perezoso*", de la *Ofrenda Musical*, de J. S. Bach.
134. Un triángulo autoral.
135. *Manos dibujando*, de M. C. Escher.
136. Diagrama abstracto de *Manos dibujando*, de M. C. Escher.
137. *Sentido común*, de René Magritte.
138. *Los dos misterios*, de René Magritte.
139. *Señal de humo*, del autor.
140. *Ilusión*, del autor.
141. *La condición humana I*, de René Magritte.
142. *Galería de grabados*, de M. C. Escher.
143. Diagrama abstracto de *Galería de grabados*, de M. C. Escher.
144. Una versión reducida de la figura anterior.
145. Nueva reducción de la figura 143.
146. Otra forma de reducción de la figura 143.
147. El Canon en Perpetuo Ascenso, de Bach, forma un Bucle Extraño cuando es ejecutado en los tonos de Shepard.

148. Dos ciclos completos de una escala de tonos Shepard, anotada para piano.
149. *Verbum*, de M. C. Escher.
150. Charles Babbage
151. El Tema del Cangrejo
152. Ultima página del *Ricercar a seis voces*, correspondiente a la edición original de la *Ofrenda Musical*, de J. S. Bach.

Palabras de Agradecimiento

Este libro fue tomando forma en mi mente durante un período de casi dos décadas, puesto que a la edad de trece años yo reflexionaba acerca de cómo pensaba en inglés y en francés. Antes aun, hubo signos claros de cuáles eran mis intereses primordiales: recuerdo que a edad más temprana que la mencionada, no había cosa más fascinante para mí que la idea de tomar tres 3, ¡y hacer tres operaciones con *ellos mismos*! Estaba seguro de que se trataba de algo tan sutil que ningún otro podía concebirlo, pero un día me atreví a preguntar a mi madre a qué número se llegaría de esta forma, y ella me respondió "Nueve". Sin embargo, me quedó la duda de si ella había comprendido lo que yo quería significar. Más adelante, mi padre me inició en los misterios de la raíz cuadrada y de *i* . . .

Debo a mis padres más que a nadie. Han sido pilares en los cuales he podido apoyarme en todo momento. Ellos me guiaron, me inspiraron, me alentaron y me respaldaron. Siempre, y más que ninguna otra persona, creyeron en mí: es a ellos a quienes dedico este libro.

Tengo que expresar mi especial reconocimiento a dos viejos amigos, Robert Boeninger y Peter Jones, pues me ayudaron a moldear un millón de formas de pensamiento; sus influencias e ideas están diseminadas a lo largo y a lo ancho de esta obra.

Mucho es lo que adeudo a Charles Brenner, pues me enseñó a programar, cuando ambos éramos jóvenes, y me impulsó y acicateó constantemente —un elogio implícito—, además de formularme críticas ocasionales.

Me es grato reconocer la inmensa influencia de Ernest Nagel, durante mucho tiempo mi amigo y maestro. Soy un apasionado de "Nagel y Newman", y es considerable lo que he aprendido durante nuestras incontables conversaciones de tiempo atrás en Vermont y, más recientemente, en Nueva York.

Howard DeLong, a través de su libro, volvió a despertar en mí un amor, durante largo tiempo dormido, hacia los temas que desarrollo en este libro. Mi agradecimiento por ello es verdaderamente muy profundo.

David Jonathan Justman me enseñó en qué consiste una Tortuga: un ser ingenioso, persistente y con sentido del humor, aficionado a la paradoja y a la contradicción. Espero que lea este libro, que tanto le debe a él, y lo disfrute.

Scott Kim ha ejercido en mí una influencia gigantesca. Desde que nos conocimos, unos dos años y medio atrás, el grado de nuestra compenetración mutua ha sido increíble. Además de sus contribuciones concretas en materia de pintura, música, humor, analogías, etc. —incluyendo

el muy valioso aporte de su trabajo desinteresado, en momentos cruciales— Scott ha abierto nuevas perspectivas y esclarecimientos que han modificado mis puntos de vista acerca de mis proyectos, a medida que éstos se fueron desarrollando. Si hay alguien que comprende este libro, se trata de Scott.

Repetidas veces he recurrido a Don Byrd —quien conoce este libro de atrás para adelante, de adelante para atrás y en todas direcciones— en procura de consejo sobre problemas de pequeña y gran monta. Cuenta con una apreciación exacta en lo referente a los objetivos globales y a la estructura de esta obra, y una y otra vez me ha sugerido ideas que gustosamente he incorporado. Sólo lamento tener que privarme de incluir las ideas que se le ocurran a Don en el *futuro*, cuando el libro ya esté impreso. Y no puedo dejar de agradecerle a Don la maravillosa flexibilidad en la inflexibilidad de su programa SMUT, impresor de música. Dedicó largas jornadas y arduas noches a persuadir a SMUT de, en lugar de descansar, elaborar artificios descabellados. Algunos de sus logros han sido incluidos en las ilustraciones de este libro, pero la influencia de Don está presente en la obra íntegra, lo cual me complace enormemente.

Quizá yo no podría haber escrito este libro de no haber sido por las facilidades que me brindó para ello el Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, de la Stanford University. Su director, Pat Suppes, es un amigo de muchos años que se mostró sumamente generoso conmigo, hospedándome en Ventura Hall, dándome acceso a un excelente sistema de computadora y, en general, a un magnífico ambiente de trabajo, durante dos años enteros, y algo más.

Esto me hace presente a Pentti Kanerva, el autor del programa editor de textos al cual este libro debe su existencia. Ya he repetido muchas veces que escribir este libro me hubiera llevado el doble de tiempo si no hubiese podido utilizar el "TV-Edit", ese elegante programa de inspiración tan simple que sólo Pentti podría haber diseñado. También debo agradecer a Pentti que me haya dado la posibilidad de hacer algo que a muy pocos autores les es posible: tipografiar mi propio libro. Pentti ha sido uno de los impulsores principales del desarrollo de la composición tipográfica por computadora en el IMSSS. Sin embargo, hay otra notable cualidad de Pentti revestida, a mi juicio, de la misma importancia: su sentido del estilo. Si este libro *se ve* bien, gran parte del mérito corresponde a Pentti Kanerva.

Este libro nació físicamente en el ASSU Typesetting Shop. Quiero dejar constancia de mi sincero agradecimiento a su directora, Beverly Hendricks, y a sus colaboradores, por la ayuda brindada en momentos extremadamente críticos, y por su inalterable buena disposición cuando se sucedían las catástrofes. También quiero agradecer a Cecille Taylor y a Barbara Laddaga, quienes tuvieron a su cargo la mayor parte del trabajo de imprimir la galeras.

A través de los años, mi hermana Laura Hofstadter ha contri-

buido mucho a la formación de mi visión del mundo. Su influencia está presente tanto en la forma como en el contenido de este libro.

Quiero expresar mi reconocimiento hacia mis nuevos y viejos amigos Marie Anthony, Sydney Arkowitz, Bengt Olle Bengtsson, Felix Bloch, Francisco Claro, Persi Diaconis, Nâi-Huá Duàn, John Ellis, Robin Freeman, Dan Friedman, Pranab Ghosh, Michael Goldhaber, Avril Greenberg, Eric Hamburg, Robert Herman, Ray Hyman, Dave Jennings, Dianne Kanerva, Lauri Kanerva, Inga Karliner, Jonathan y Ellen King, Gayle Landt, Bill Lewis, Jos Marlowe, John McCarthy, Jim McDonald, Louis Mendelowitz, Mike Mueller, Rosemary Nelson, Steve Omohundro, Paul Oppenheimer, Peter E. Parks, David Policansky, Pete Rimbey, Kathy Rosser, Wilfried Sieg, Guy Steele, Larry Tesler, François Vannucci, Phil Wadler, Terry Winograd y Bob Wolf: todos ellos han entrado en "resonancia" conmigo en ocasiones cruciales de mi vida y, en consecuencia, han contribuido en varias y diversas formas a este libro.

Escribí dos veces este libro. Después de haberlo escrito una primera vez, volví a comenzar desde cero y lo reescribí. El intento inicial se produjo cuando yo era un recién graduado en física que continuaba sus estudios en la University of Oregon, y cuatro profesores se mostraron enormemente indulgentes con respecto a mis extraviadas perspectivas: Paul Csonka, Rudy Hwa, Mike Moravcsik y Gregory Wannier. Aprecio su actitud comprensiva; además, Paul Csonka leyó toda una versión primitiva y formuló comentarios provechosos.

Agradezco a E. O. Wilson su lectura y comentario de una primera versión de mi *Preludio y Fuga Hormiguesca*.

Agradezco a Marsha Meredith el haberse constituido en metautora de un divertido koan.

Agradezco a Marvin Minsky la memorable conversación que mantuvimos un día de marzo en su casa, fragmentos de la cual el lector encontrará reconstruidos aquí.

Agradezco a Bill Kaufmann sus consejos en materia de publicación, y a Jeremy Bernstein y a Alex George por sus palabras de estímulo cuando fueron necesarias.

Mi muy caluroso reconocimiento a Martin Kessler, Maureen Bischoff, Vincent Torre, Leon Dorin y el resto de los miembros de Basic Books, por asumir este riesgo editorial, cosa bastante desacostumbrada.

Agradezco a Phoebe Hoss por realizar eficazmente la difícil tarea de imprimir la tirada, y a Larry Breed por su valiosa lectura final de pruebas.

Agradezco a mis muchos compañeros de alojamiento, que me recogieron tantos mensajes telefónicos durante varios años, como también al personal del Pine Hall, quien desarrolló y mantuvo gran parte del hardware y del software del cual este libro ha dependido tan vitalmente.

Agradezco a Dennis Davies, de la Stanford Instructional Television Network, por su aporte consistente en disponer las "cámaras de tele-

visión autoincluidas" para que yo dedicara horas enteras a fotografiarlas.

Agradezco a Jerry Pryke, Bob Parks, Ted Bradshaw y Vinnie Aveni, del taller mecánico del High Energy Physics Laboratory, de Stanford, por ayudarme generosamente a construir los trip-lets.

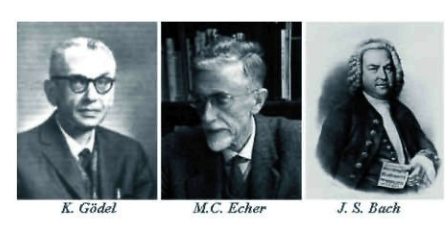
Agradezco a mi tío y a mi tía, Jimmy y Betty Givan, su regalo de Navidad que jamás imaginaron me encantaría tanto: una "Caja Negra" sin ninguna otra función que la de autodesconectarse.

Finalmente, quiero expresar mi especial reconocimiento hacia mi profesor de inglés de primer año, Brent Harold, quien fue el primero que me hizo interesar por el zen; hacia Kees Gugelot, quien me dio una grabación de la *Ofrenda Musical*, un melancólico noviembre de hace mucho tiempo; y a Otto Frisch, en cuya oficina de Cambridge presencié por vez primera la magia de Escher.

He tratado de recordar a todas las personas que han contribuido a la realización de este libro, pero es seguro que he incurrido en alguna omisión.

En cierta forma, este libro es una manifestación de mi fe. Espero que ésta se transmita a mis lectores y que mi entusiasmo y mi reverencia hacia ciertas ideas penetren en el corazón y la mente de algunas personas. Es todo lo que ansío.

D. R. H.
Bloomington y Stanford
Enero de 1979.


K. Gödel M.C. Echer J. S. Bach

PARTE I

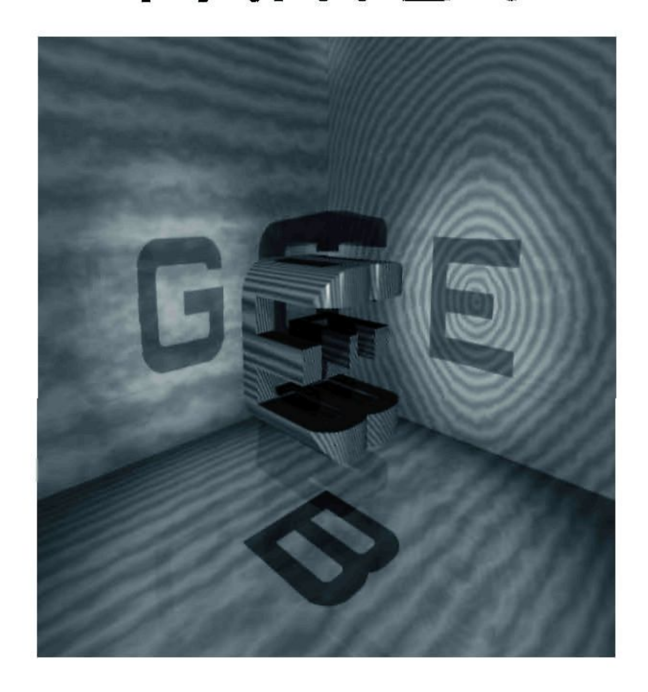




Figura 1. Johann Sebastian Bach en 1748. De una pintura de Elias Gottlieb Haussmann.

Introducción: Ofrenda músico-lógica

Autor:

Federico el Grande, rey de Prusia, subió al trono en 1740. Se le recuerda en las historias a causa sobre todo de su astucia militar, pero era también hombre dado a la vida de la inteligencia y del espíritu. Su corte de Potsdam fue uno de los más brillantes centros de actividad intelectual en la Europa del siglo XVIII. Allí pasó veinticinco años el célebre matemático Leonhard Euler, y entre los visitantes de esa corte se cuentan muchos otros matemáticos y hombres de ciencia, y también filósofos como Voltaire y La Mettrie, que estando en Potsdam escribieron algunas de sus obras más importantes.

Pero el verdadero amor del rey era la música. Federico fue un entusiasta flautista y compositor, y algunas de sus obras se ejecutan todavía hoy de vez en cuando. Fue además, entre los protectores de las artes, uno de los primeros en percibir las virtudes del recién creado "piano-forte" ("suave-fuerte"). El piano había venido evolucionando, durante la primera mitad del siglo XVIII, como forma modificada del clavecín. Lo malo del clavecín era que el volumen de sonido de las piezas en él ejecutadas era prácticamente uniforme: no había manera de hacer que una tecla sonara más fuerte o más suave que las vecinas. El "piano-forte", como su nombre lo dice, vino a remediar esa deficiencia. Desde Italia, donde Bartolommeo Cristofori construyó el primero, la idea del instrumento suave-fuerte se difundió por todas partes. Gottfried Silbermann, el mejor constructor de órganos de la Alemania de entonces, se había propuesto hacer un piano-forte "perfecto". Naturalmente, el apoyo más vigoroso de sus esfuerzos le vino del rey. Se dice que Federico poseía nada menos que quince pianos de Silbermann.

Bach

Federico, admirador de los pianos, admiraba también a un organista y compositor llamado Johann Sebastian Bach. Las composiciones de este Bach gozaban de cierta notoriedad. Había quienes las calificaban de "hinchadas y confusas", mientras otros las ponderaban como incomparables obras maestras. Lo que nadie ponía en duda era la maestría con que Bach improvisaba en el órgano. Ser organista suponía en esos tiempos la capacidad no sólo de tocar piezas, sino también de inventarlas de repente, y Bach era famosísimo en todas partes por sus notables habilida-

des de improvisador. (En el libro de Hans Theodore David y Arthur Mendel, *The Bach Reader*, hay anécdotas deliciosas acerca de eso.)

En 1747 tenía Bach sesenta y dos años, y su fama, unida a la de uno de sus hijos, había llegado a Potsdam; de hecho, Carl Philipp Emanuel Bach era el Capellmeister (maestro de capilla) de la corte de Federico. Hacía ya años que el rey, con delicadas insinuaciones, le había dado a entender a Carl Philipp Emanuel lo mucho que le gustaría que el viejo Bach viniera a visitarlo, pero su deseo no había llegado a realizarse. Federico estaba particularmente interesado en que Bach probara el sonido de sus nuevos pianos Silbermann, pues preveía (atinadamente) que el piano iba a ser la gran nueva ola de la música.

Federico solía organizar en su corte veladas de música de cámara. A menudo él mismo actuaba como solista de algún concierto para flauta. El cuadro cuya fotografía se ve aquí (figura 2) representa una de esas veladas musicales; es obra del pintor alemán Adolph von Menzel, el cual hizo en el siglo XIX una serie de cuadros que muestran los distintos aspectos de la vida de Federico el Grande. Sentado al clavecín está C. Ph. E. Bach, y el personaje de la extrema derecha es Joachim Quantz, maestro de flauta del rey y única persona a quien le estaba permitido señalarle a Federico sus fallas como flautista. En cierta ocasión, en mayo de 1747, cayó allí un visitante inesperado. Pero dejemos que sea Johann Nikolaus Forke, uno de los primeros biógrafos de Bach, quien cuente la historia:

> Una noche, en los momentos en que (Federico) preparaba ya su flauta y sus músicos estaban listos para comenzar, un funcionario le trajo la lista de los extranjeros llegados ese día. Con su flauta en la mano echó una ojeada a la lista, y de pronto, dirigiéndose a los músicos allí reunidos, les dijo con acento de cierta agitación: "Señores, el viejo Bach está aquí." Dejó entonces a un lado la flauta y sin más dilación despachó a alguien para invitar al viejo Bach, que se había apeado en la posada de su hijo, a presentarse en palacio. Quien me contó la historia fue Wilhelm Friedemann, que acompañaba a su padre, y no puedo menos que decir que todavía recuerdo con gusto la manera como me la contó. En esos tiempos era costumbre hacer cumplimientos sumamente prolijos. La primera aparición de J. S. Bach ante tan gran rey, que no le había dado tiempo ni de cambiar su vestimenta de viaje por el atuendo negro que usan los músicos, tuvo que estar acompañada, por fuerza, de toda clase de disculpas. No me detendré aquí en ellas, pero sí diré que, en el relato de Wilhelm Friedemann, constituían todo un exquisito diálogo entre el rey y el viejo músico empeñado en disculparse.
>
> Lo que hace más al caso es que el rey renunció a su concierto de esa noche e invitó a Bach, conocido ya de todos como "el viejo Bach", a probar los fortepianos, hechos por Silbermann, que tenía en varios salones del palacio. (Aquí pone Forkel una nota de pie de página: "Tan aficionado era el rey a los pianofortes manufacturados por Silbermann, de Freyberg, que había resuelto comprárselos todos. Llegó así a reunir quince. Tengo noticias de que todos ellos continúan, ya inservibles, en distintos rincones del palacio real.") Seguido de sus músicos, el rey recorrió todos los salones, invitando a Bach a probar cada uno de los pianos y a tocar en ellos alguna improvisación. Después de probar así varios pianos, Bach le pidió al rey un tema para una fuga, ofreciéndose a ejecutarla de inmediato, sin preparación alguna. El rey quedó admirado de la manera tan sabia como su tema pasó de repente a ser una



Figura 2. Concierto de flauta en Sanssouci, *pintura de Adolph von Menzel, 1852.*

fuga; y, probablemente para ver hasta dónde podía llegar ese arte, expresó el deseo de oír una fuga a seis voces obligadas. Pero como no cualquier tema se presta para una armonía tan rica, Bach mismo eligió uno, y al punto, con gran asombro de todos los circunstantes, lo desarrolló según el deseo del rey, de la misma sabia y magnífica manera como había desarrollado el tema regio. Su Majestad dijo finalmente que le gustaría oírlo tocar el órgano. Así, pues, al día siguiente Bach fue llevado a probar todos los órganos de Potsdam, tal como antes había sido llevado a probar todos los pianos de Silbermann. De regreso ya en Leipzig, Bach trabajó sobre el tema inventado por el rey y escribió piezas a tres y a seis voces, añadió varios pasajes artificiosos en forma estricta de canon, mandó grabar la obra con el título de "Musikalisches Opfer" (*Ofrenda Musical*), y se la dedicó al inventor.[1]



Figura 3. El Tema Real.

En el ejemplar de la *Ofrenda Musical* enviado al rey incluyó Bach una carta dedicatoria interesante, si no por otra cosa, por su tono tan sumiso y zalamero. Desde nuestra perspectiva de hoy ese tono produce un efecto cómico. Pero seguramente nos conserva algo del estilo en que Bach se disculpó aquella noche ante el rey por el traje inadecuado que llevaba.[2]

Rey Graciosísimo:

Dedico a Vuestra Majestad, con la humildad más profunda, una ofrenda musical cuya parte más noble procede de la propia augusta mano de Vuestra Majestad. Con sobrecogido placer recuerdo la especialísima gracia de que fui objeto cuando, hace algún tiempo, durante mi visita a Potsdam, Vuestra Majestad se dignó tocarme en el teclado un tema de fuga, y al mismo tiempo me encargó de la manera más graciosa que lo desarrollara en la presencia augustísima de Vuestra Majestad. Mi humildísima obligación no podía ser otra que obedecer la orden de Vuestra Majestad. Sin embargo, no pude menos que observar que, por falta de la necesaria preparación, mi ejecución no estaba a la altura de tan excelente tema. En consecuencia, determiné elaborar de manera más completa el tema regio y, habiendo puesto empeño en la tarea, he resuelto ahora dar a conocer esta obra al mundo. Mi propósito no se ha realizado con la perfección que hubiera sido posible, y la obra no tiene, así, otra finalidad que la muy loable de enaltecer, aunque sea sólo en medida tan modesta, la fama de un monarca cuya grandeza y dominio en todas las ciencias de la guerra y de la paz, y especialmente en la música, todo el mundo se ve obligado a admirar y respetar. Me atreveré a añadir una humildísima súplica: que Vuestra Majestad se digne enaltecer este modesto trabajo con su graciosa aceptación y que

[1] H. T. David y A. Mendel, *The Bach Reader*, Nueva York, 1966, pp. 305-306.
[2] *Ibid.*, p. 179.

siga concediendo la augustísima regia gracia de Vuestra Majestad a quien es el siervo más humilde y obediente

de Vuestra Majestad
El Autor.

Leipzig, 7 de julio de 1747.

Unos veintisiete años después, cuando hacía ya veinticuatro que Bach había muerto, un noble alemán de nombre Gottfried van Swieten —a quien, por cierto, dedicó Forkel su biografía de Bach, y a quien Beethoven dedicaría su Primera Sinfonía— tuvo con el rey Federico una conversación referida por él mismo con estas palabras:

> Entre otras cosas, me habló (el rey) de música, y de un gran organista llamado (Wilhelm Friedemann) Bach, que había residido en Berlín durante un tiempo. En cuanto a profundidad de conocimientos armónicos y en cuanto a fuerza de ejecución, este artista está dotado de un talento superior al de cualquier otro músico que yo haya oído o pueda imaginarme. Sin embargo, quienes conocieron a su padre afirman que el padre era todavía más grande. El rey es de esta opinión; y, para demostrármela, cantó en voz alta un tema cromático de fuga que en cierta ocasión le dio al viejo Bach y que éste utilizó para componer, de repente, una fuga a cuatro voces, otra a cinco, y otra finalmente a ocho.[3]

No hay, por supuesto, manera de averiguar si fue el rey Federico o el barón van Swieten quien agrandó tan desmesuradamente la hazaña del compositor; pero es una buena indicación de cómo había crecido hacia 1774 la leyenda de Bach. Para dar idea de lo extraordinario que es una fuga a seis voces, baste decir que en todo el *Clave bien temperado* de Bach, constituido por cuarenta y ocho preludios y cuarenta y ocho fugas, sólo dos de las fugas están hechas a cinco voces, y no hay ni una sola a seis. La tarea de improvisar una fuga a seis voces podría compararse, por decir algo, a la de jugar con los ojos vendados sesenta partidas simultáneas de ajedrez y ganarlas todas. Improvisar una fuga a ocho voces está francamente por encima de las capacidades humanas.

El ejemplar enviado por Bach al rey Federico lleva, en la página que precede a la primera de música, la inscripción siguiente:



Figura 4.

("Por orden del rey, la canción y las demás cosas [están] resueltas con arte canónica".) Bach juega aquí con los dos sentidos del adjetivo *canónico*: no sólo "mediante la forma canon", sino también "de la mejor manera posible". Las iniciales de la inscripción latina forman la palabra italiana

[3] *Ibid.*, p. 260.

que significa "buscar", "indagar". Y la *Ofrenda Musical* contiene ciertamente muchas cosas que piden indagación y búsqueda. Consta de una fuga a tres voces, una fuga a seis voces, diez cánones y una sonata-trío. Los especialistas han llegado a la conclusión de que la fuga a tres voces es seguramente, en lo esencial, la que Bach improvisó ante el rey Federico. La fuga a seis voces es una de las creaciones más complicadas de Bach, y su tema es, por supuesto, el que dio Federico. El Tema Regio, que puede verse en la figura 3, es muy complejo, rítmicamente irregular y sumamente cromático (o sea, con muchas notas que no pertenecen a la tonalidad en que está escrito). Componer con ese tema una fuga decente, aunque sólo fuera a dos voces, no hubiera sido tarea sencilla para un músico común y corriente.

El nombre que da Bach a las dos fugas no es "Fuga", sino "Ricercar". Este es otro de los sentidos de la palabra: *ricercar*, en efecto, fue el nombre original de la forma que hoy se conoce como "fuga". En tiempos de Bach ya se había impuesto la palabra (latina e italiana) *fuga*, pero seguía utilizándose *ricercar* para designar un tipo erudito de fuga, tal vez demasiado austeramente intelectual para el oyente medio. Un caso parecido se da en el inglés de hoy: la palabra *recherché* (tomada del francés) significa literalmente "re-buscado", pero tiene además una connotación de refinamiento esotérico, de cosa destinada sólo a los muy entendidos.

La sonata-trío constituye un delicioso alivio tras la austeridad de las fugas y los cánones: es muy cantarina y dulce, casi bailable. También ella, sin embargo, se basa preponderantemente en el Tema Regio, con todo su cromatismo y austeridad. Es milagrosa en verdad la manera como Bach se sirvió de semejante tema para componer un interludio tan ameno.

Los diez cánones de la *Ofrenda Musical* se cuentan entre los más elaborados que Bach compuso. Pero, curiosamente, Bach mismo no dejó ninguno de ellos escrito de cabo a rabo. Su presentación incompleta es cosa deliberada. Son como acertijos que se le proponen al rey de Prusia. Un juego musical muy practicado en la época consistía en escribir un tema, acompañarlo de algunas indicaciones más o menos enigmáticas y dejar que el canon basado en ese tema fuera "descubierto" por otro jugador. Para saber cómo es posible esto hay que entender algunas de las reglas del canon.

Cánones y fugas

El canon se caracteriza esencialmente por un tema que sirve a la vez de melodía y de acompañamiento. Para conseguir esto se distribuyen "copias" del tema entre las distintas voces ejecutantes. Pero hay varios procedimientos. El más simple y directo es el que se sigue en ciertas canciones de ronda, como "Three Blind Mice" o "Frère Jacques" o "Estoy cojo de un

pie". Entra el tema en la primera voz; después de un lapso bien medido entra una de sus "copias" exactamente en la misma tonalidad; pasado el mismo lapso en la segunda voz, entra la tercera de las copias del tema, y así sucesivamente. No cualquier melodía puede armonizar consigo misma en esa forma. Para que una sucesión de notas funcione como tema de canon se requiere que cada una de esas notas cumpla un papel doble (o triple, o cuádruple, etcétera): en primer lugar tiene que ser parte de una melodía y en segundo lugar tiene que ser parte de una armonización de esa misma melodía. Cuando hay, por ejemplo, tres voces canónicas, cada nota del tema necesita funcionar de dos maneras armónicas distintas, además de conservar su función melódica. En otras palabras, cada una de las notas del canon posee más de un sentido musical: el oído y el cerebro del oyente dan automáticamente con el sentido adecuado, teniendo en cuenta el contexto.

Existen, claro, especies más complicadas de cánones. Un primer grado en la escala de complejidad se consigue cuando las "copias" del tema se escalonan no sólo en el *tiempo*, sino también en el *tono*; por ejemplo, la primera voz puede comenzar el tema en do, y entonces la segunda, al entroncar con la primera después del lapso de rigor, canta ese mismo tema pero comenzando cinco notas arriba, o sea en sol; si hay una tercera voz, ésta deberá entroncar con las otras dos, a su debido tiempo, comenzando cinco notas arriba de donde comenzó la segunda, o sea en re, y así sucesivamente. Un segundo grado en la escala de complejidad se da cuando la *velocidad* varía de una voz a otra; cuando, por ejemplo, la segunda voz canta el doble de rápido o el doble de lento que la voz inicial. Lo primero se llama *disminución*, lo segundo *aumentación* (porque el tema parece encogerse o dilatarse respectivamente).

Y eso no es todo. La siguiente etapa de complejidad en la construcción de cánones consiste en *invertir* el tema, lo cual significa elaborar una melodía que salte hacia *abajo* cada vez que el tema original salta hacia *arriba*, pero haciendo que el salto mida exactamente el mismo número de semitonos. El efecto producido por esta transformación melódica es un tanto raro, pero cuando uno se acostumbra a oír temas invertidos, ya comienza a encontrarlos completamente naturales. Bach, que era aficionadísimo a las inversiones, las prodiga en su obra —sin exceptuar, por supuesto, la *Ofrenda Musical*. (Puede servir de ejemplo la melodía de "Good King Wenceslas", con su inversión hecha en la forma indicada: se comienza con la melodía original, y después de dos compases entra como segunda voz la inversión, que comienza una octava abajo; el canon que resulta es bastante agradable.) Finalmente, la más esotérica de las "copias" es la copia retrógrada, en la cual el tema se ejecuta al revés de como está escrito, es decir, de atrás para adelante. El canon que utiliza este truco se llama familiarmente *canon cangrejo*, a causa de las peculiaridades locomotivas de esos crustáceos. Ni falta hace decir que Bach metió un canon cangrejo en su *Ofrenda Musical*. Hay que observar que los distintos tipos

de "copia" conservan toda la información que hay en el tema original, lo cual quiere decir que el tema es totalmente recuperable a partir de cualquiera de sus copias. Esta transformación mantenedora de la información suele llamarse *isomorfismo*, y el presente libro habrá de ocuparse de isomorfismos a cada rato.

A veces resulta deseable aflojar un poco lo tieso de la forma canon. Una manera de lograrlo es permitir pequeñas desviaciones de la copia perfecta, para que la armonía resulte más fluida. Hay también cánones con voces "libres", que no utilizan el tema y sirven sólo para armonizar agradablemente con las voces que forman parte estricta del canon.

Cada uno de los cánones de la *Ofrenda Musical* tiene como tema una variante del Tema Regio, y todos los recursos de complicación arriba descritos se explotan en ellos hasta lo último; más aún, a veces se combinan varios de estos recursos en un solo canon, por ejemplo en el que se intitula "Canon per Augmentationem, contrario Motu". Es un canon a tres voces; la voz central es libre (si bien lo que canta es justamente el Tema Regio), y las otras dos danzan canónicamente por encima y por debajo, empleando los recursos de la aumentación y de la inversión. Uno de los cánones lleva el críptico título "Quaerendo invenietis" ("Buscando encontraréis"). Todos los enigmas de éste y de los demás cánones de la *Ofrenda* han sido resueltos. Las soluciones canónicas son obra de Johann Philipp Kirnberger, discípulo de Bach. Pero siempre cabe la duda de si no quedará alguna solución por descubrir.

Puede ser necesario también explicar qué cosa es una fuga. La fuga se parece al canon por el hecho de basarse casi siempre en un tema que se va tocando en distintas voces y en distintos tonos, y a veces a distintas velocidades o con intervalos tonales invertidos o de atrás para adelante. El principio de la fuga es, sin embargo, mucho menos rígido que el del canon y por consiguiente hay en ella mayor espacio para la expresión emotiva y artística. La marca caracterizadora de una fuga es la manera como empieza: con una voz sola que canta su tema. Entra luego una segunda voz que comienza a cinco tonos por encima o cuatro tonos por debajo de donde ha comenzado la primera. Mientras tanto, la primera prosigue su camino cantando el "contratema" o "contrasujeto", esto es, un tema secundario, destinado a suministrarle contrastes rítmicos, armónicos o melódicos al tema. Cada una de las voces va entrando en su momento y canta el tema, acompañada a menudo por el contrasujeto, que se encomienda a alguna otra voz, mientras las demás ejecutan cuantos primores musicales se le han ocurrido al compositor. Cuando todas las voces han entrado ya en el juego, se acaban las reglas. Hay, por supuesto, ciertas cosas que normalmente se hacen en una fuga, pero no son cosas establecidas como regla: no hay reglas fijas, no hay una fórmula para hacer fugas. Las dos de la *Ofrenda Musical* son ejemplos sobresalientes de fugas que jamás hubieran podido ser "compuestas según fórmula". Hay en ellas algo mucho más hondo que la simple fugalidad.

La *Ofrenda Musical* representa, en su conjunto, uno de los logros supremos de Bach en el terreno del contrapunto. Es toda ella una sola vasta fuga intelectual en la que se han trabado y entretejido muchas ideas y muchas formas y en la que surgen a cada momento alusiones sutiles y dobles sentidos juguetones. Y es una creación bellísima de la inteligencia humana, digna de ser admirada por siempre. (Véase una preciosa descripción de ella en el libro de H. T. David, *J. S. Bach's Musical Offering.*)

Un Canon en Perpetuo Ascenso

Hay en la *Ofrenda Musical* un canon particularmente insólito. Se llama "Canon per Tonos" y es a tres voces. La de arriba canta una variante del Tema Regio, mientras las otras dos ejecutan una armonización canónica basada en un segundo tema. La más baja de estas dos voces canta su tema en do menor (que es la tonalidad del canon en su conjunto), y la otra canta el mismo tema, pero desplazado hacia arriba por un intervalo de quinta. Lo que hace de este canon algo distinto de cualquier otro es que cuando termina —cuando *parece* terminar, mejor dicho— no está ya en la tonalidad de do menor, sino en la de re menor. De alguna manera se las ha ingeniado Bach para *modular* (cambiar de tono) frente a las narices del oyente. Y además, el canon está construido de tal modo que su terminación se enlaza sin la menor violencia con su propio comienzo, de manera que puede uno repetir el proceso y, comenzando ahora en la tonalidad de re, terminar en la de mi, y recomenzar entonces en mi para terminar en fa sostenido, etcétera. Estas sucesivas modulaciones van llevando el oído a provincias tonales más y más remotas, de modo que a la tercera o cuarta de ellas se siente uno desesperadamente lejos de la tonalidad inicial. Pero, como por arte de magia, al llegar a la sexta de las modulaciones queda uno instalado de nuevo en la tonalidad de do menor. Todas las voces se hallan ahora exactamente una octava más arriba de como se hallaban al principio, y en este punto puede darse por concluida la pieza de una manera musicalmente agradable. Cabe imaginar que tal fue la intención de Bach; pero no hay duda de que a Bach le encantaba la idea de que este proceso siguiera y siguiera *ad infinitum*, y quizá sea ése el sentido de las palabras que escribió al margen de la pieza: "Que así como se levanta la modulación, así se levante la Gloria del Rey". Para subrayar esa calidad suya de potencialmente infinito, el nombre que le doy es "Canon en Perpetuo Ascenso".

Con ese canon nos brinda Bach nuestro primer ejemplo del concepto de *Bucles Extraños*. El fenómeno del "Bucle Extraño" ocurre cada vez que, habiendo hecho hacia arriba (o hacia abajo) un movimiento a través de los niveles de un sistema jerárquico dado, nos encontramos inopinadamente de vuelta en el punto de partida. (Aquí, el sistema es el de las tonalidades musicales.) A veces me sirvo del término *Jerarquía Enredada* para designar un sistema en que se dan Bucles Extraños. A lo largo de nuestro

camino reaparecerá una y otra vez este tema de los Bucles Extraños. Unas veces estará oculto, otras bien patente; unas veces estará puesto al derecho, otras al revés, cabeza abajo o de espaldas. "Quaerendo invenietis" es el consejo que desde ahora le doy al lector.

Escher

Las más bellas y vigorosas realizaciones visuales de este concepto de Bucles Extraños Raros se dan, según yo, en la obra del artista gráfico holandés Maurits C. Escher, que vivió de 1902 a 1972. Escher es el creador de algunos de los dibujos intelectualmente más estimulantes de todos los tiempos. Muchos de ellos tienen como raíz la paradoja, la ilusión o el doble sentido. Entre los primeros admiradores de los dibujos de Escher hubo varios matemáticos, lo cual es comprensible, pues esos dibujos suelen basarse en principios matemáticos de simetría o de esquema . . . Pero en un dibujo típico de Escher hay mucho más que la simple simetría o el simple esquema; hay a menudo una idea subyacente, realizada en forma artística. Y, en particular, el Bucle Extraño es uno de los temas más frecuentes en la obra de este artista. Véase, por ejemplo, la litografía *Cascada* (figura 5) y compárese su tránsito en interminable descenso a través de seis etapas o pasos con el tránsito en interminable ascenso, y también a través de seis etapas o pasos, del "Canon per Tonos". La semejanza de visión es realmente notable. Bach y Escher están tocando un mismo tema en dos "claves" distintas: la musical y la pictórica.

Los Bucles Extraños de Escher están realizados de varias maneras y pueden clasificarse de acuerdo con lo apretado del bucle. La litografía *Subiendo y bajando* (véase figura 6), en la que unos personajes caminan y caminan en bucle, es la versión más suelta, puesto que incluye gran número de pasos antes de que se llegue de nuevo al punto de partida. El circuito de *Cascada* es más apretado, pues no incluye sino seis pasos discretos. Aquí el lector podrá pensar que hay algo de ambigüedad en la noción de "paso", y que, por ejemplo, en *Subiendo y bajando* lo mismo pueden verse cuatro niveles (escaleras) que cuarenta y cinco niveles (escalones). Hay, sin duda, una buena dosis de vaguedad en la manera de contar esos pasos, lo cual vale no sólo para los dibujos de Escher, sino para todo sistema jerárquico de muchos niveles. Ya afinaremos más adelante nuestra comprensión de esta vaguedad. Por ahora no nos distraigamos demasiado. Apretando más nuestro bucle, llegamos al notable caso de *Manos dibujando* (véase figura 135), en que cada mano dibuja a la otra: un Bucle Extraño de dos pasos. Y finalmente, el más apretado de todos los Bucles Extraños es el que encontramos en *Galería de grabados* (véase figura 142): retrato de un retrato que se contiene a sí mismo. ¿O retrato de una galería que se contiene a sí misma? ¿O de una ciudad que se contiene a sí misma? ¿O de un joven que se contiene a sí mismo? (Dicho sea de paso, la ilusión en que se basan *Subiendo y bajando* y *Cascada* no fue inven-



Figura 5. Cascada, *de M. C. Escher (litografía, 1961).*

to de Escher, sino de Roger Penrose, matemático inglés, en 1958. Pero el tema del Bucle Extraño ya estaba presente en la obra de Escher desde 1948, año en que dibujó *Manos dibujando*. La fecha de *Galería de grabados* es 1956.)

En el concepto de Bucles Extraños va implícito el de infinito, pues ¿qué otra cosa es un bucle sino una manera de representar de manera finita un proceso interminable? Y el infinito representa un vasto papel en muchos

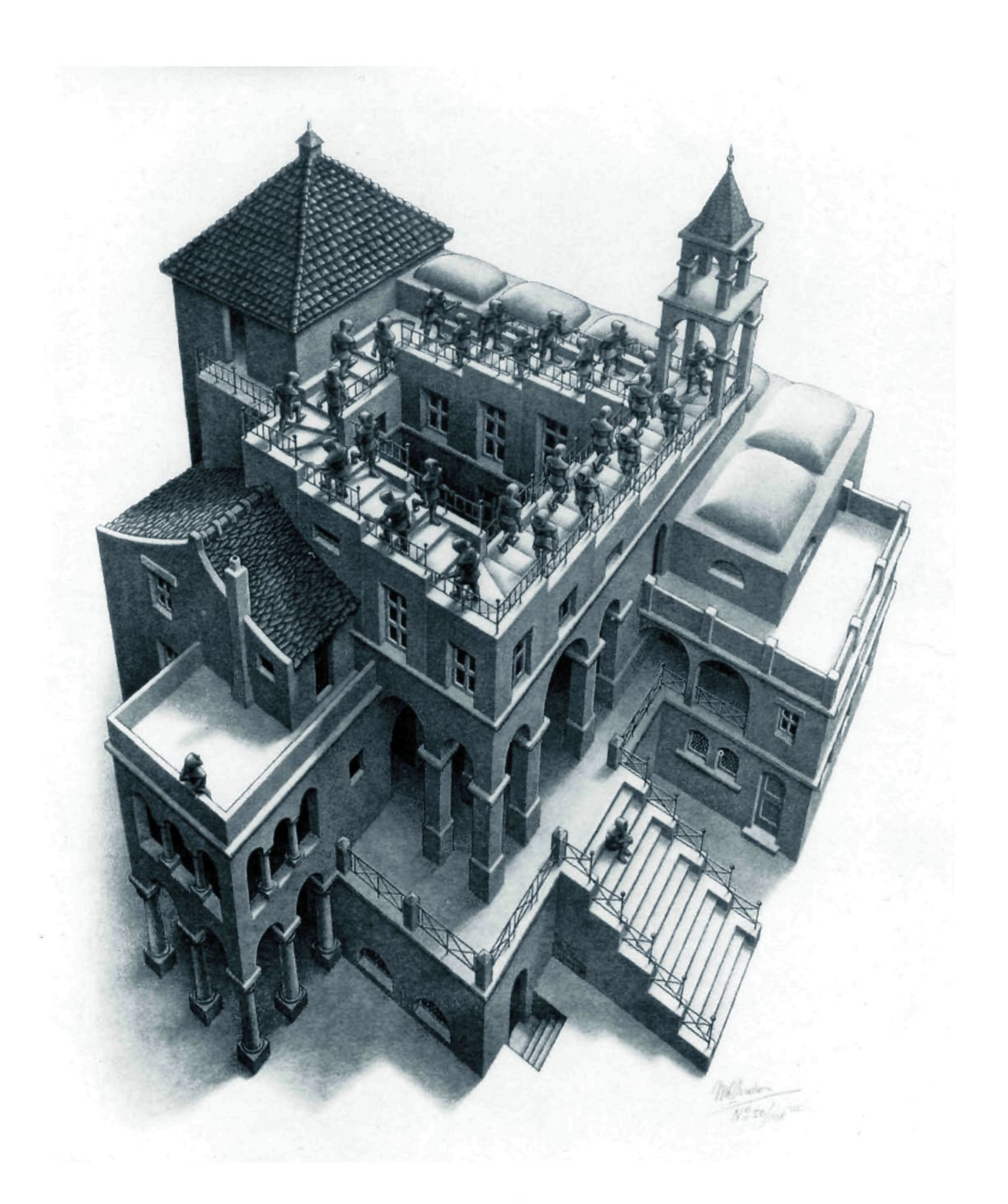


Figura 6. Subiendo y bajando, *de M. C. Escher (litografía, 1960).*

de los dibujos de Escher. En ellos suelen verse copias de un tema determinado que se acoplan las unas en las otras constituyendo así los análogos visuales de los cánones de Bach. Varios de esos esquemas aparecen en uno de los grabados más famosos de Escher, *Metamorfosis II* (véase figura 8). Es un poco como el "Canon en Perpetuo Ascenso": progresa y progresa a partir de un punto inicial y de pronto se halla en el punto de partida. En

Figura 7. Mano con Globo Reflejado, *autorretrato de M. C. Escher, 1935.*



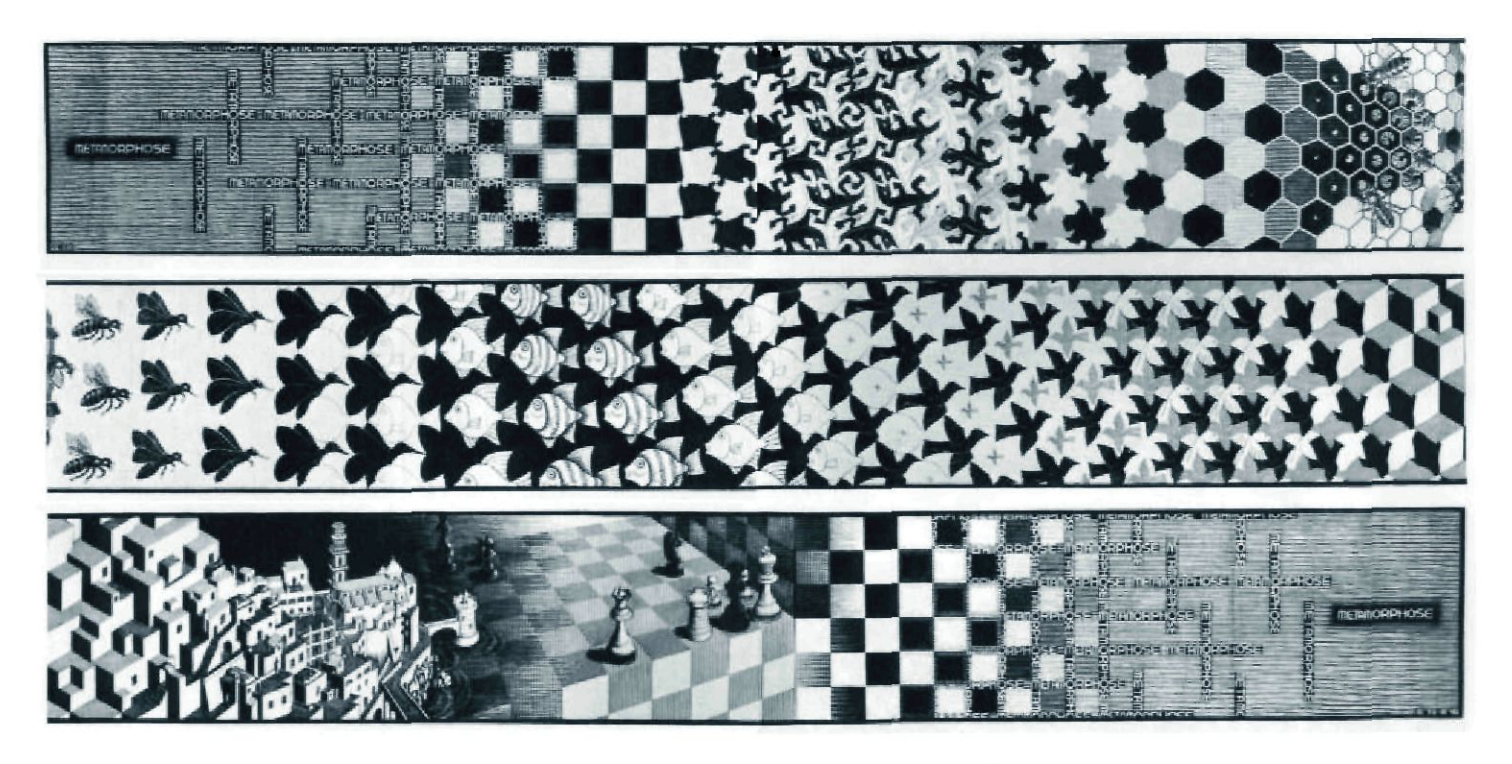


Figura 8. Metamorfosis II, *de M. C. Escher (xilografía, 1939-1940).*

los planos embaldosados de *Metamorfosis II* y de otros dibujos hay ya sugerencias de infinito. Pero en otras creaciones de Escher encontramos visiones mucho más atrevidas o desaforadas de este infinito. Algunos de sus dibujos muestran un tema dado en diversos niveles de realidad. En uno de los niveles podemos reconocer claramente la representación de la fantasía o imaginación, digamos, y en el otro la representación de lo real. Estos dos niveles pueden ser los únicos que se manifiestan de manera explícita. Pero la sola presencia de uno y otro nivel invita al contemplador a contemplarse a sí mismo como parte de otro nivel más; y, una vez dado este paso, el contemplador no puede menos que quedar atrapado por una cadena implícita de niveles en que para cada nivel existe siempre otro más arriba, de mayor "realidad", y asimismo otro más abajo, un nivel "más imaginario". Esto por sí solo puede ya producirnos vértigo. Pero ¿y si la cadena de niveles, en vez de ser lineal, forma un bucle? ¿Qué es entonces lo real y qué lo fantástico? El genio de Escher consiste en haber podido no sólo concebir, sino representar, negro sobre blanco, docenas de mundos mitad reales y mitad míticos, mundos llenos de Bucles Extraños que él pone ante los ojos del contemplador como invitándolo a penetrar en ellos.

Gödel

En los ejemplos de Bucles Extraños de Bach y de Escher que hemos visto hay un conflicto entre lo finito y lo infinito y por consiguiente una fuerte sensación de paradoja. La intuición nos dice que algo matemático está aquí en juego. Pues bien: en este nuestro siglo se descubrió en efecto una contraparte matemática que ha tenido las más tremendas repercursiones. Y, así como los bucles de Bach y de Escher corresponden a intuiciones muy simples y antiguas —una escala musical, una escalera—, así también el descubrimiento, por Kurt Gödel, de un Bucle Extraño en los sistemas matemáticos tiene su origen en intuiciones simples y antiguas. En su forma más desnuda o descarnada, el descubrimiento de Gödel supone la traducción de una vieja paradoja filosófica a términos matemáticos. Me refiero a la llamada *paradoja de Epiménides, o paradoja del mentiroso*. Epiménides, cretense, hizo esta inmortal aseveración: "Todos los cretenses son mentirosos". Una versión más afilada de la paradoja es sencillamente "Estoy mintiendo" o "Esta aseveración es falsa". La última versión es la que generalmente tendré en mente al referirme a la paradoja de Epiménides. Es una aseveración que de manera brutal contradice la dicotomía tan generalmente aceptada entre aseveraciones verdaderas y aseveraciones falsas, puesto que si por un momento la tomamos como verdadera inmediatamente se nos dispara por la culata y nos ponemos a pensar que es falsa. Pero una vez que hemos decidido que es falsa, un análogo tiro por la culata nos hace volver a la idea de que es verdadera. Haga el lector la prueba y lo verá.

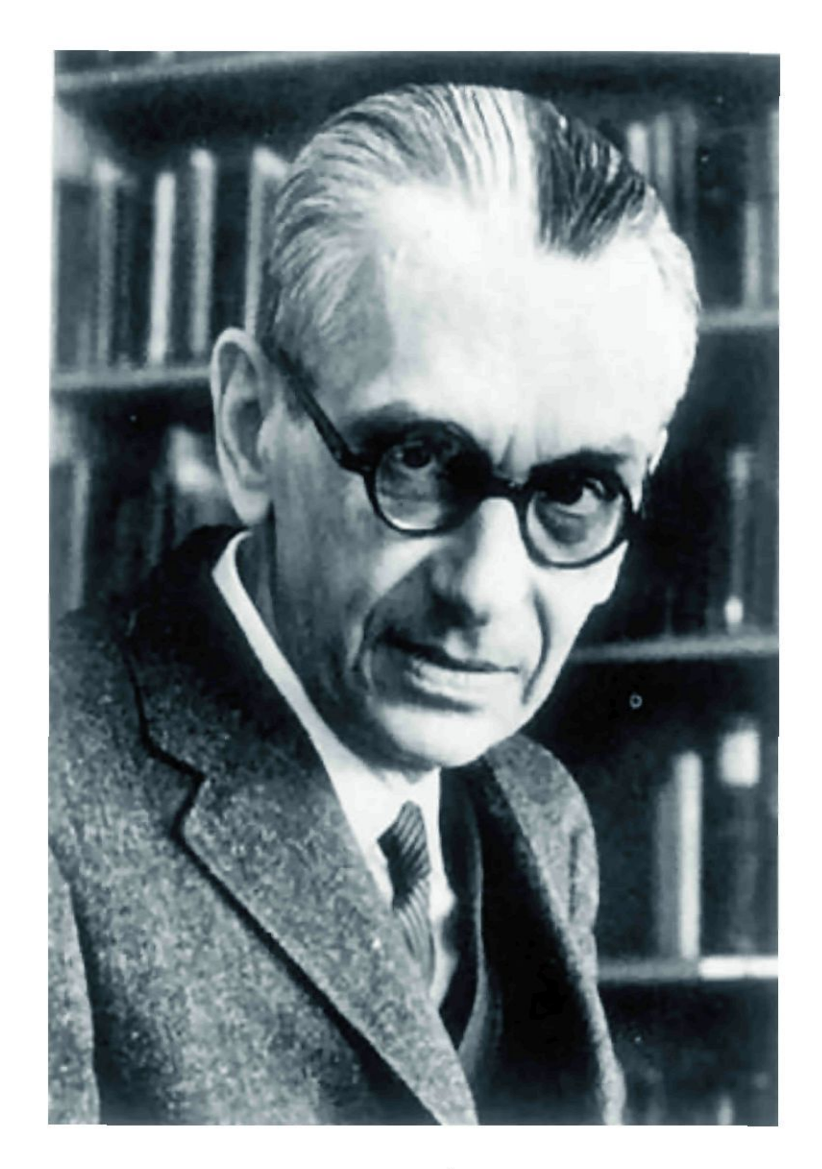


Figura 9. Kurt Gödel.

La paradoja de Epiménides es un Bucle Extraño de un solo paso, como la *Galería de grabados* de Escher. ¿Y qué tiene que ver con la matemática? Aquí es donde entra el descubrimiento de Gödel. A Gödel se le ocurrió la idea de utilizar el razonamiento matemático para explorar el razonamiento matemático. Esa idea de hacer de la matemática una disciplina "introspectiva" resultó ser enormemente dinámica, y la más fecunda de sus implicaciones es una que él mismo encontró: el Teorema de la Incompletitud. Qué propone este Teorema y cómo lo demuestra son dos cosas distintas. De una y otra nos ocuparemos con bastante detalle en el presente libro. Podemos comparar el Teorema con una perla y el método de demostración con una ostra. La perla es estimada por su tersura y su sencillez; la ostra es un ser vivo y complejo de cuyas tripas brota esa gema misteriosamente simple.

El Teorema de Gödel aparece como Proposición VI de un artículo suyo "Sobre proposiciones formalmente indecidibles en los *Principia Mathematica* y sistemas análogos, I" (1931), y dice así:

> A cada clase *k* *w*-consistente y recursiva de *formulae* corresponden *signos de clase r* recursivos, de tal modo que ni *v* Gen *r* ni Neg (*v* Gen *r*) pertenecen a Flg (*k*) (donde *v* es la *variante libre* de *r*).

En realidad el artículo se redactó en alemán, y quizá el lector sienta que sigue estando en alemán. He aquí, pues, una paráfrasis en español más normal:

> Toda formulación axiomática de teoría de los números incluye proposiciones indecidibles.

Tal es la perla.

En esta perla es difícil ver un Bucle Extraño. Ello se debe a que el Bucle Extraño está sepultado en la ostra, o sea en la demostración. La demostración del Teorema de Incompletitud de Gödel está trabada con la escritura de una proposición matemática auto-referencial, de la misma manera que la paradoja de Epiménides es una proposición lingüística auto-referencial. Pero servirse del lenguaje para hablar acerca del lenguaje es cosa simple, mientras que no es nada fácil ver cómo una proposición relativa a números puede hablar acerca de sí misma. Hizo falta un genio para esto tan simple: conectar la idea de las proposiciones auto-referenciales con la teoría de los números. En el momento en que Gödel tuvo la intuición de que esa proposición podía crearse, dejó ya atrás el principal de los obstáculos. La hechura misma de la proposición no fue sino la elaboración de su espléndido chispazo intuitivo.

En capítulos subsiguientes examinaremos con el mayor cuidado la construcción de Gödel; pero para que el lector no se quede totalmente en ayunas, esbozaré aquí en unos cuantos brochazos el núcleo de la idea, con esperanza de que lo que voy a decir haga estallar algunas ideas en su ca-

beza. Es preciso, en primer lugar, que quede absolutamente claro en dónde está la dificultad. Las proposiciones matemáticas —limitémonos a las de teoría de los números— se refieren a las propiedades de los números enteros. Los números enteros no son proposiciones, ni tampoco lo son sus propiedades. Una proposición de teoría de los números no habla *acerca de* una proposición de teoría de los números; *es* sólo una proposición de teoría de los números. Este es el problema; pero Gödel se dio cuenta de que algo bullía por dentro.

Gödel intuyó que una proposición de teoría de los números podía hablar *acerca de* una proposición de teoría de los números (inclusive, quizá, acerca de sí misma) a condición, simplemente, de hacer que los números cumplieran la función de las proposiciones. Dicho de otro modo, en la médula de su construcción está la idea de *código*. En el Código de Gödel, llamado por lo común "numeración de Gödel", se hace que los números cumplan funciones de símbolos y de secuencia de símbolos. De esa manera, siendo una secuencia de símbolos especializados, cada proposición de teoría de los números adquiere un "número de Gödel", algo así como un número de teléfono o de placa de automóvil mediante el cual puede uno referirse a ella. Y este recurso de codificación permite que las proposiciones de teoría de los números se entiendan en dos niveles distintos: como proposiciones de teoría de los números y como *proposiciones acerca de proposiciones de teoría de los números.*

Inventado ya este esquema de codificación, Gödel tuvo que elaborar detalladamente una manera de transportar la paradoja de Epiménides a un formalismo de teoría de los números. Su trasplante final de la paradoja de Epiménides no decía "Esta proposición de teoría de los números es falsa", sino "Esta proposición de teoría de los números no tiene ninguna demostración". De aquí pueden originarse no pocas confusiones, a causa de que la gente no entiende en general el concepto de "demostración" sino en forma bastante vaga. De hecho, la obra de Gödel se inscribe como episodio del largo esfuerzo de los matemáticos por explicarse a sí mismos qué cosa son las demostraciones. El hecho importante que hay que tener en cuenta es que las demostraciones son pruebas *dentro de sistemas fijos* de proposiciones. En el caso de la obra de Gödel, el sistema de razonamiento teórico-numérico a que se refiere la palabra "demostración" es el de los *Principia Mathematica* (*P. M.*), obra gigante de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, publicada entre 1910 y 1913. Por lo tanto, la aseveración G de Gödel debería escribirse más adecuadamente así:

> Esta aseveración de teoría de los números no tiene ninguna demostración en el sistema de los *Principia Mathematica*.

Dicho sea de paso, esta aseveración de Gödel no es el Teorema de Gödel, tal como la aseveración de Epiménides no es la observación de que "La aseveración de Epiménides es una paradoja". Ahora podemos precisar

cuál es el efecto del descubrimiento de G. Mientras que la aseveración de Epiménides crea una paradoja, puesto que no es ni verdadera ni falsa, la aseveración G de Gödel es indemostrable (dentro de los *P. M.*), pero verdadera. ¿Y cuál es la conclusión de todo esto? La conclusión es: que el sistema de los *Principia Mathematica* es "incompleto"; que hay proposiciones verdaderas de teoría de los números para cuya demostración resulta demasiado débil el método de los *P. M.*

Los *Principia Mathematica* fueron la primera víctima de este golpe pero ciertamente no la única. Las palabras "y sistemas afines" que se leen en el título del trabajo de Gödel son muy elocuentes: en efecto, si Gödel se hubiera limitado a señalar un defecto en la obra de Russell y Whitehead, no habrían faltado otros matemáticos dispuestos a mejorar el sistema de los *P. M.* y a sobreponerse al Teorema de Gödel. Pero esto no era posible: la demostración de Gödel se aplicaba a *cualquier* sistema axiomático cuyo propósito fuera lograr las metas que Whitehead y Russell se habían fijado. Un solo sistema básico bastaba para hacerse cargo de cada uno de esos sistemas. En suma, lo que demostró Gödel fue que la demostrabilidad es un concepto más endeble que la verdad, independientemente del sistema axiomático de que se trate.

Como es natural, el Teorema de Gödel tuvo un efecto electrizante en los lógicos, matemáticos y filósofos interesados en los fundamentos de la matemática, pues demostraba que ningún sistema fijo, por complicado que fuera, podía representar la complejidad de los números enteros: 0, 1, 2, 3 . . . Los lectores modernos podrán no experimentar ante esto la misma perplejidad que los de 1931, ya que en el ínterin nuestra cultura ha absorbido el Teorema de Gödel, junto con las revoluciones conceptuales de la relatividad y de la mecánica cuántica, y sus mensajes filosóficamente desorientadores han llegado hasta el gran público, aunque sea embotados por varias capas de traducción (y, casi siempre, de ofuscación). La actitud general de los matemáticos de hoy consiste en no esperar sino resultados "limitativos"; pero en 1931 la cosa cayó como un rayo en seco.

Lógica matemática: breve sinopsis

Para apreciar como es debido el Teorema de Gödel hace falta tener presente cierto contexto. Trataré, pues, de resumir en poco espacio la historia de la lógica matemática hasta el año 1931 —tarea imposible. (Quien desee una buena exposición lea el libro de DeLong, o el de Kneebone, o el de Nagel y Newman.) Lo que encontramos en los inicios de esa historia es el intento de mecanizar los procesos intelectivos del razonamiento. Ahora bien, siempre se ha dicho que nuestra capacidad de razonar es la que nos distingue de otras especies; resultaría entonces un tanto paradójico, a primera vista, mecanizar eso que es lo más humano que tenemos. Sin embargo, ya los griegos antiguos sabían que el razonamiento es un proceso suje-

to a esquemas, y que, en parte al menos, está gobernado por leyes perfectamente formulables. Aristóteles codificó los silogismos y Euclides codificó la geometría; pero allí quedó el asunto, y tuvieron que pasar muchos siglos para que volviera a registrarse un avance en el estudio del razonamiento axiomático.

Uno de los descubrimientos trascendentales de las matemáticas del siglo XIX fue la existencia de varias geometrías distintas y todas igualmente válidas (al decir aquí "una geometría" se entiende una teoría de las propiedades de puntos y líneas abstractos). Durante largo tiempo se había dado por sentado que geometría era aquello que Euclides había codificado; es verdad que podían descubrirse pequeñas fallas en la presentación euclidiana, pero eso carecía de importancia; todo progreso real en el campo de la geometría significaba simplemente ampliar a Euclides. Esta idea quedó sacudida cuando, de manera más o menos simultánea, se hizo aquí y allá el descubrimiento de las geometrías no euclidianas —descubrimiento que escandalizó a la comunidad matemática, porque atacaba en su núcleo la idea de que la matemática estudia el mundo real. ¿Cómo podían existir muchas clases distintas de "puntos" y "líneas" en una realidad única? En nuestros días la solución del dilema puede ser clara hasta para los profanos; pero en estos años el dilema causó gran conmoción en los círculos matemáticos.

En el mismo siglo XIX, más tarde, los lógicos ingleses George Boole y Augustus De Morgan sometieron los esquemas estrictamente deductivos de razonamiento a una codificación que deja muy atrás la codificación aristotélica. Boole se atrevió a intitular su libro *The Laws of Thought* ("Las leyes del pensamiento"), lo cual es algo exagerado, por más que su contribución haya sido importante. Lewis Carroll, fascinado por esos métodos mecanizados de razonamiento, inventó gran número de acertijos que podían resolverse con ello. En Jena y en Turín respectivamente, Gottlob Frege y Giuseppe Peano se dieron a la tarea de combinar el razonamiento formal con el estudio de conjuntos y de números. En Göttingen, David Hilbert elaboró formalizaciones de geometría más estrictas que las de Euclides. Todos estos esfuerzos iban enderezados a una meta: aclarar qué es lo que entendemos por "demostración".

Mientras tanto, habían estado ocurriendo cosas interesantes en el campo de la matemática clásica. Hacia 1885 Georg Cantor formuló una teoría de diferentes clases de infinitos, conocida con el nombre de *teoría de conjuntos*. Esta teoría era atractiva y vigorosa, pero significaba un reto fuerte para la intuición. Al cabo de no mucho tiempo ya habían salido a relucir no pocas paradojas basadas en la teoría de conjuntos. La situación era muy aflictiva: apenas parecían los matemáticos estar recobrándose de un conjunto de paradojas —las relacionadas con la teoría de los límites, en el cálculo—, cuando se les venía encima todo un conjunto nuevo, de aspecto peor aun.

La más célebre de las nuevas paradojas es la de Russell. Por regla gene-

ral, se diría, los conjuntos no son miembros de sí mismos. Así, el conjunto de todas las morsas no es una morsa; el conjunto que comprende sólo a Juana de Arco no es Juana de Arco (los conjuntos no son personas), etcétera. En este sentido, la mayor parte de los conjuntos son "conjuntos comunes y corrientes". *Existen*, sin embargo, conjuntos que "se devoran" a sí mismos, que se incluyen a sí mismos en cuanto miembros, por ejemplo el conjunto de todos los conjuntos, o el conjunto de todas las cosas excepto Juana de Arco, y así otros. Claro está que un conjunto dado es o de los comunes y corrientes, o de los que se autodevoran y por lo tanto ninguno puede ser las dos cosas a la vez. Ahora bien, nada nos impide inventar R: *el conjunto de todos los conjuntos comunes y corrientes*. A primera vista, R podrá parecer un invento bastante común y corriente, pero necesitamos revisar esa opinión en cuanto nos preguntamos: "¿Qué clase de conjunto es R: de los comunes y corrientes o de los que se autodevoran?" El lector encontrará que la respuesta es: "El conjunto R no es ni de los comunes y corrientes ni de los que se autodevoran, porque cualquiera de las dos soluciones desemboca en una paradoja." Haga la prueba y verá.

Pero si R no es ni lo uno ni lo otro, ¿qué cosa es? Es algo patológico, dan ganas de contestar; pero como nadie se contenta con tales respuestas evasivas, no faltaron quienes cavaron más hondo en los cimientos de la teoría de conjuntos. La pregunta crucial parecía ser: "¿Qué es lo que funciona mal en nuestro concepto intuitivo de 'conjunto'? ¿Por qué no hacer una teoría rigurosa de conjuntos que, además de corresponder fielmente a nuestras intuiciones, quede a salvo de toda paradoja?" El problema, aquí —al igual que en la teoría de los números y en la geometría—, consiste en hacer que la intuición se empareje perfectamente con los sistemas formalizados, o axiomáticos, de razonamiento.

Una variante vistosa de la paradoja de Russell es la llamada "paradoja de Grelling", en la cual se utilizan adjetivos en vez de conjuntos. Dividamos los adjetivos que se usan en español en dos categorías: la de los que se describen a sí mismos, como "esdrújulo", "hexasilábico" y "*chic*", y la de los que no se describen a sí mismos, como "potable", "incompleto" y "bisilábico". Ahora bien, si a los de la primera categoría los llamamos *autológicos* (= "autodescriptivos") y a los de la segunda *heterológicos* (= no autodescriptivos"), ¿a qué categoría pertenece el adjetivo "heterológico"? ¿Nos arriesgaremos a decir que el adjetivo "heterológico" es heterológico? Piense un poco el lector.

El único culpable de estas paradojas parece ser el fenómeno de la autorreferencia, que es como decir el Bucle Extraño. Entonces, si lo deseable es eliminar todas las paradojas, ¿por qué no procurar eliminar la autorreferencia y todo cuanto pueda servirle de raíz? La empresa no es tan simple como se creería, porque puede ser difícil saber dónde, exactamente, está ocurriendo una autorreferencia. Puede estar diseminada en todo un Bucle Extraño de varios pasos, como en esta versión "ampliada" de la paradoja de Epiménides, que hace pensar en *Manos dibujando*:

La afirmación que sigue es falsa.

La afirmación que antecede es verdadera.

Si las tomamos juntas, estas dos afirmaciones tienen el mismo efecto que la paradoja original de Epiménides; pero si las tomamos por separado son afirmaciones inocuas, y hasta potencialmente útiles. La "culpa" de este Bucle Extraño no se puede achacar a ninguna de las dos afirmaciones, sino exclusivamente a la manera como "apuntan" la una a la otra. Así también, cada uno de los tramos de *Subiendo y bajando* es absolutamente legítimo; lo único que crea una imposibilidad es la manera como se acomodan los distintos tramos entre sí. Existiendo, pues, maneras indirectas y maneras directas de producir autorreferencias, lo que hay que discurrir es cómo eliminar unas y otras de una vez por todas —siempre y cuando esté uno persuadido de que la autorreferencia es la raíz del mal.

Eliminación de Bucles Extraños

Russell y Whitehead eran de esta última opinión. Y así, sus *Principia Mathematica* son un descomunal esfuerzo por dejar limpias de Bucles Extraños la lógica, la teoría de conjuntos y la teoría de los números. La idea de su sistema era básicamente ésta:

Un conjunto del "tipo" más bajo no puede tener entre sus miembros otros conjuntos, sino únicamente "objetos". Un conjunto del tipo que sigue en la escala sólo puede abarcar conjuntos del tipo más bajo, además de objetos. En general, un conjunto de un tipo dado no puede abarcar sino conjuntos de tipo más bajo, además de objetos. Cada conjunto pertenece a un tipo específico. Es claro que ningún conjunto puede contenerse a sí mismo, porque entonces tendría que pertenecer a un tipo más alto que su propio tipo. En este sistema todos los conjuntos son "comunes y corrientes", de tal manera que a nuestro ya conocido R —el conjunto de todos los conjuntos comunes y corrientes— se le niega absolutamente la calidad de conjunto, puesto que no pertenece a ningún tipo finito. Así, pues, según todas las apariencias, esta *teoría de los tipos*, que también podría llamarse "teoría de la abolición de Bucles Extraños", logra bien su propósito de limpiar de paradojas la casa pero únicamente a costa de introducir una jerarquización a todas luces artificial, y de prohibir la formación de ciertas clases de conjuntos —como el conjunto de todos los conjuntos comunes y corrientes. Intuitivamente decimos que no es ésa la manera como nosotros imaginamos los conjuntos.

Con la teoría de los tipos quedó despachada la paradoja de Russell, pero la paradoja de Epiménides y la paradoja de Grelling continuaron intactas. Para gente cuyos intereses no rebasaban el campo de la teoría de conjuntos, eso estaba perfecto; pero para gente interesada en eliminar de manera general las paradojas se hacía necesaria alguna "jerarquización"

análoga, capaz de impedir que se produjeran bucles hacia atrás dentro del lenguaje. En la base de esta jerarquía estaría un *lenguaje objeto*. Toda referencia que aquí se hiciera tendría que dirigirse forzosamente a un *terreno específico* —no a aspectos del propio lenguaje objeto (por ejemplo sus reglas gramaticales o determinadas oraciones). Para esos menesteres habría un *metalenguaje*. Esta experiencia de dos niveles lingüísticos es bien conocida de todos los que aprenden *lenguas extranjeras*. En seguida tendría que haber un *metametalenguaje* para hablar acerca del metalenguaje, y así sucesivamente. Se exigiría que cada oración perteneciera a un nivel preciso de la jerarquía. Por lo tanto, de no hallarse un nivel en el cual colocar una aseveración determinada, esta aseveración se declararía *carente de sentido* y se relegaría al olvido.

Podemos intentar en este punto un análisis del bucle de dos pasos en que quedó expresada poco antes la paradoja de Epiménides. La primera oración, en vista de que *habla de la segunda*, *tiene* que pertenecer a un nivel más alto que esa segunda. Por idénticas razones la segunda oración tiene que pertenecer a un nivel más alto que la primera. Como esto es imposible, las dos oraciones son "carentes de sentido". Más precisamente, tales oraciones no pueden ni siquiera formularse en un sistema basado en una jerarquía estricta de lenguajes. Esto pone una barrera a todas las versiones de la paradoja de Epiménides y de la paradoja de Grelling. (¿A qué nivel de lenguaje podría pertenecer "heterológico"?)

Ahora bien, en la teoría de los conjuntos, la cual se ocupa de abstracciones que no se están usando todo el tiempo, una estratificación como la teoría de los tipos, si bien un tanto rara, parece muy aceptable; pero cuando lo que está en juego es el lenguaje, parte tan omnipresente de la vida humana, semejante estratificación parece absurda. Nadie se concibe a sí mismo saltando arriba y abajo por la jerarquía de los lenguajes cuando habla acerca de las cosas que se van presentando. Una frase tan inocente como ésta: "En mi libro critico la teoría de los tipos" estaría doblemente prohibida en el sistema en cuestión. En primer lugar menciona el presente "libro", cosa que no puede mencionarse sino en un "metalibro", y en segundo lugar me menciona *a mí*, persona a quien de ninguna manera me es lícito referirme. Este ejemplo nos muestra qué boba resulta la teoría de los tipos cuando se la aplica a un contexto coloquial. El remedio que receta contra las paradojas —proscripción total de la autorreferencia en cualquier forma que sea— es verdaderamente peor que la enfermedad, pues estigmatiza como carentes de sentido muchas construcciones perfectamente buenas. Por cierto, la calificación de "carente de sentido" tedría que aplicarse a todo cuanto se discutiera en torno a la teoría de los tipos lingüísticos (por ejemplo, a todo lo expuesto en este párrafo), pues las cosas que se dijeran no tendrían acomodo en ninguno de los niveles —ni en el lenguaje objeto, ni en el metalenguaje, ni en el metametalenguaje, etc. Así, el hecho mismo de discurrir acerca de la teoría sería la más descarada de sus violaciones.

Nadie podría defender esas teorías diciendo que están hechas sólo para estudiar lenguajes formales, y no el lenguaje informal ordinario. Pongamos que así sea. Pero entonces concluimos que tales teorías son extremadamente académicas y tienen muy poco que decir acerca de las paradojas, salvo cuando éstas afloran en ciertos sistemas hechos especialmente y sobre medida. Por otra parte, el afán de eliminar las paradojas a toda costa, y más aun cuando ello entraña la creación de formalismos sumamente artificiales, obliga a conceder un papel desproporcionado a lo coherente, a lo bien encarrilado, con menoscabo de lo extraño, de lo excéntrico, de eso, en fin, que hace que la vida y la matemática sean cosas tan amenas. Es importante, por supuesto, procurar mantener la coherencia, pero cuando este esfuerzo nos empuja a una teoría insignemente fea, sabemos que algo anda mal.

A esta clase de debates en torno a los fundamentos de la matemática obedeció, en los primeros decenios del presente siglo, el enorme interés por codificar los métodos del razonamiento humano. Los matemáticos y los lógicos habían comenzado a abrigar serias dudas en cuanto a la solidez de los fundamentos en que se basaban incluso las teorías más concretas, por ejemplo el estudio de los números enteros (teoría de los números). Si con tal facilidad podían brotar paradojas en la teoría de conjuntos —teoría cuyo concepto básico, el de conjunto, es sin duda muy atractivo desde el punto de vista de la intuición—, ¿cómo esperar que no las hubiera en otras ramas de la matemática? Había, análogamente, la preocupación de que las paradojas de la lógica, la de Epiménides por ejemplo, resultaran ser inherentes a la matemática, y sembraran por consiguiente la duda en todo el terreno matemático, cosa especialmente inquietante para aquellos —y no eran pocos— que veían en la matemática una simple rama de la lógica (o, viceversa, en la lógica una simple rama de la matemática). Gran fuente de controversia fue justamente la pregunta de si la matemática y la lógica son cosas distintas, si existen aparte la una de la otra.

Este estudio de lo que es la matemática vino a conocerse con el nombre de *metamatemática* —y algunas veces *metalógica* a causa de la mencionada trabazón de matemática y lógica. El quehacer más urgente de los metamatemáticos fue determinar la verdadera naturaleza del razonamiento matemático. ¿Cuáles son los métodos o procedimientos legítimos, y cuáles los ilegítimos? El razonamiento matemático se había hecho siempre en un "lenguaje natural" (en francés, en latín o en cualquier otro idioma destinado a la comunicación normal), y por lo tanto había habido siempre muchas zonas de posible ambigüedad. Las palabras tenían significados distintos para los distintos hablantes, evocaban en ellos distintas imágenes, etcétera. Parecía no ya razonable, sino urgente, establecer una notación única y uniforme en que pudiera llevarse a cabo la labor matemática y con cuyo auxilio cualquier par de matemáticos pudiera resolver disputas sobre la validez o invalidez de cualquier demostración que alguien sugiriera. Para esto hacía falta una codificación completa de los

modos universalmente aceptables de razonamiento humano, al menos en la medida en que el razonamiento se aplica a la matemática.

Coherencia, completitud y Programa de Hilbert

Tal fue la meta de los *Principia Mathematica*, cuyos autores se propusieron derivar toda la matemática de la lógica, ¡y sin contradicciones, por supuesto! La obra de Russell y Whitehead fue admirada en todas partes, a pesar de que nadie estaba seguro 1) de si toda la matemática quedaba realmente englobada en los métodos diseñados por ellos, y ni siquiera 2) de si esos métodos eran coherentes consigo mismos. ¿Era absolutamente claro que siguiendo los métodos de Russell y Whitehead ningún matemático del mundo podría llegar *nunca* a resultados contradictorios?

Esta pregunta torturó particularmente a David Hilbert, distinguido matemático (y metamatemático) alemán, que formuló ante la comunidad mundial de los matemáticos (y metamatemáticos) el reto siguiente: demostrar rigurosamente —siguiendo quizá esos mismos métodos diseñados por Russell y Whitehead— que el sistema definido en los *Principia Mathematica* es no sólo *coherente* (a salvo de contradicciones), sino también *completo* (o sea, que toda proposición válida de teoría de los números puede desarrollarse en efecto dentro de la armazón trazada en los *P. M.*). El reto era tremendo, aunque también criticable por ser un tanto circular, pues ¿cómo va uno a justificar sus métodos de razonamiento con base en esos mismos métodos de razonamiento? Es como querer alzarnos en el aire tirando del borde de nuestros propios zapatos. (Por lo visto, no hay manera de zafarse de esos Bucles Extraños. . .)

Hilbert, desde luego, era perfectamente consciente del dilema y por eso expresó la esperanza de que pudiera encontrarse una demostración de coherencia o completitud basada únicamente en modos "finitistas" de razonamiento. Se refería con esto a un conjunto pequeño de métodos de razonamiento de general aceptación entre los matemáticos. De esa manera imaginaba que los matemáticos podrían auparse a sí mismos tirando del borde de sus propios zapatos: esperaba, en una palabra, que una simple porción de la totalidad de los métodos matemáticos sirviera para demostrar la solidez del todo. Este objetivo que Hilbert perseguía podrá parecer un tanto esotérico, pero ocupó la cabeza de muchos de los mayores matemáticos del mundo durante los treinta primeros años del presente siglo.

Entonces, en el año 1931, publicó Gödel su artículo, que de varias maneras demolía por completo el programa de Hilbert. El trabajo de Gödel revelaba no sólo que había "agujeros" irreparables en el sistema axiomático propuesto por Russell y Whitehead, sino también, más en lo general, que absolutamente ningún sistema axiomático podía producir todas las verdades relativas a la teoría de los números, salvo que se tratara de un sistema no coherente (!). Y, por último, Gödel hacía ver que la esperanza de

demostrar la coherencia de un sistema como el presentado en los *P. M.* era una quimera: en caso de que pudiera hallarse esa demostración usando sólo métodos contenidos en los *P. M.*, entonces —y es ésta una de las consecuencias más perturbadoras del trabajo de Gödel— los mismísimos *P. M.* resultarían no ser coherentes.

La ironía última de todo ello es que la demostración del Teorema de Incompletitud de Gödel suponía implantar la paradoja de Epiménides en el corazón mismo de los *Principia Mathematica*, obra que se tenía por un bastión invulnerable a los ataques de los Bucles Extraños. Es verdad que el Bucle Extraño de Gödel no destruyó los *Principia Mathematica*, pero los hizo muchísimo menos interesantes para los matemáticos, puesto que demostró que los objetivos perseguidos por Russell y Whitehead eran ilusorios.

Babbage, computadoras, Inteligencia Artificial. . .

Cuando salió a la luz el artículo de Gödel, el mundo estaba casi a punto de producir computadoras digitales electrónicas. La idea de máquinas calculadoras automáticas andaba en el aire desde hacía tiempo. En el siglo XVII, Pascal y Leibniz diseñaron máquinas capaces de realizar ciertas operaciones fijas (suma y multiplicación). Pero estas máquinas no tenían memoria y, para decirlo en jerga actual, no eran programables.

El primer humano que concibió el inmenso potencial computador de la maquinaria fue el londinense Charles Babbage (1792-1871). Babbage, personaje que pudo casi haber salido de las páginas de los *Pickwick Papers*, fue famoso en vida por la vigorosa campaña que emprendió para limpiar a Londres de "plagas callejeras", los organillos sobre todo. Los organilleros, por sacar de quicio al pobre hombre, venían a darle serenatas a toda hora del día y de la noche, y entonces él los expulsaba furiosamente, corriendo tras ellos por la calle. Actualmente reconocemos en Babbage a un hombre que se adelantó cien años a sus tiempos: además de ser el inventor de los principios básicos de las computadoras modernas, fue también uno de los primeros que lucharon contra la contaminación por el ruido.

Su invento inicial, la "Máquina de Diferencias", podía generar tablas matemáticas de muchos tipos mediante el "método de diferencias". Pero antes de construir ningún modelo de "M. D.", Babbage se obsesionó con una idea mucho más revolucionaria: su "Máquina Analítica". "El camino que me ha llevado a ella —escribió con muy poca modestia— es probablemente el más enmarañado y complejo que jamás ha ocupado la inteligencia humana."[4] A diferencia de todas las máquinas diseñadas hasta entonces, la "M. A." iba a poseer al mismo tiempo un "almacén" (memo-

[4] Charles Babbage, *Passages from the Life of a Philosopher*, Londres, 1864 (reimpreso en 1968), pp. 145-146.

ria) y un "molino" (unidad encargada de calcular y de hacer decisiones). Estas unidades iban a estar hechas de mil y mil complicados cilindros dentados, trabados entre sí con engranajes dispuestos en formas increíblemente complejas. Babbage tuvo una visión de números entrando y saliendo en enjambres del molino bajo el control de un *programa* contenido en tarjetas perforadas. La inspiración de esta idea le vino del telar de Jacquard, maquinaria controlada por tarjetas perforadas y capaz de tejer diseños asombrosamente complicados. Una amiga de Babbage, la brillante pero malograda condesa Ada Lovelace (hija de Lord Byron), dijo poéticamente una vez que "la Máquina Analítica *teje diseños algebraicos* tal como el telar de Jacquard teje flores y hojas". Por desgracia, su empleo del tiempo presente puede inducir a error: nunca llegó a construirse una sola "M. A." y Babbage murió en la desilusión y la amargura.

Al igual que Babbage, Lady Lovelace era muy consciente de que con el invento de la Máquina Analítica la humanidad le estaba guiñando el ojo a la inteligencia mecanizada —particularmente si la Máquina era capaz de "comerse su propia cola" (como describió Babbage el Bucle Extraño que se da cuando una máquina tiene acceso a su propio programa almacenado y lo altera). En un trabajo de 1842,[5] escribió que la "M. A." "podría actuar sobre otras cosas aparte del *número*". Y si Babbage soñaba con la creación de partidas automáticas de "gato" y de ajedrez, ella declaraba que la Máquina, con melodías y armonías codificadas en sus cilindros rotantes, "podría componer piezas de música refinadas y científicas, de cualquier grado de complejidad y de cualquier extensión". Pero casi de un mismo resuello añadía esta advertencia: "La Máquina Analítica no tiene la menor pretensión de *originar* nada. Las cosas que *sabemos cómo ordenarle* hacer, ésas sí las puede realizar todas." Aunque entendía bien las potencialidades de la computación artificial, Lady Lovelace era escéptica en cuanto a la creación artificial de inteligencia. Pero ¿acaso su aguda intuición no podía permitirle soñar en la vastedad del campo que iba a abrirse con la domesticación de la electricidad?

En nuestro siglo el ambiente estaba ya listo para las computadoras, máquinas que dejan atrás los más alocados sueños de Pascal, Leibniz, Babbage y Lady Lovelace. Entre 1930 y 1950 se diseñaron y construyeron los primeros "cerebros electrónicos gigantes", que catalizaron la convergencia de tres zonas anteriormente inconexas: la teoría del razonamiento axiomático, el estudio de la computación mecánica y la psicología de la inteligencia.

Esos mismos años vieron desarrollarse a saltos y brincos la teoría de las computadoras, teoría íntimamente ligada a la metamatemática. De hecho, el Teorema de Gödel no tardó en tener en la teoría de la computa-

[5] Lady A. A. Lovelace, comentario sobre el artículo de L. F. Menabrea, *"Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage"* (Ginebra, 1842), reimpreso en P. y E. Morrison, *Charles Babbage and His Calculating Engines*, Nueva York, 1961, pp. 248-249 y 284.

ción un principio paralelo (descubierto por Alan Turing), que revela la existencia de "agujeros" ineluctables hasta en la computadora más potente que pueda imaginarse. Cosa irónica: justamente en los días en que se estaban trazando estos límites en cierto modo sobrecogedores, se construían también computadoras de verdad, cuyas capacidades parecían aumentar y aumentar más allá de la capacidad de profecía de sus constructores. Babbage, el hombre que dijo una vez que gustosamente daría todo el resto de su vida a cambio de regresar a la Tierra quinientos años después y hacer, guiado por alguien, un recorrido científico de la nueva era durante sólo tres días, se habría quedado mudo de estupor apenas un siglo después de su muerte —lo mismo por las máquinas nuevas que por sus inesperadas limitaciones.

Hacia 1950-1955, la inteligencia mecanizada parecía estar ya a tiro de piedra; lo malo era que por cada estorbo que se dejaba atrás aparecía siempre otro nuevo estorbo cerrando el paso a la creación efectiva de una auténtica máquina de pensar. ¿Había una razón profunda para esa inacabable y misteriosa esquividad de la meta?

No hay quién sepa dónde está la raya divisoria entre la conducta no-inteligente y la conducta inteligente; más aun, el sólo decir que existe una tajante raya divisoria es probablemente una estupidez. Pero hay capacidades que son, desde luego, características de la inteligencia:

responder muy flexiblemente a las situaciones;
sacar provecho de circunstancias fortuitas;
hallar sentido en mensajes ambiguos o contradictorios;
reconocer la importancia relativa de los diferentes elementos de una situación;
encontrar semejanzas entre varias situaciones, pese a las diferencias que puedan separarlas;
descubrir diferencias entre varias situaciones, pese a las semejanzas que puedan vincularlas;
sintetizar nuevos conceptos sobre la base de conceptos viejos que se toman y se reacomodan de nuevas maneras;
salir con ideas novedosas.

Aquí nos topamos con algo que suena a paradoja. Por su naturaleza misma, las computadoras son los animales más inflexibles, los más privados de deseos, los más seguidores de reglas. Pese a su gran rapidez, son el epítome de la inconciencia. ¿Cómo programar entonces la conducta inteligente? Una de las tesis principales del presente libro es que no hay contradicción alguna, y uno de sus principales objetivos es lograr que el lector se anime a encarar la contradicción sin ningún miedo, a saborearla, a darle vueltas, a desmenuzarla, a revolcarse en ella, para que al terminar la lectura se vea dueño de nuevas ideas sobre el abismo al parecer insalvable entre lo formal y lo informal, lo animado y lo inanimado, lo flexible y lo inflexible.

No es otra cosa lo que persiguen las investigaciones sobre Inteligencia Artificial (IA). Y es un espectáculo singular el que ofrecen esos investigadores de IA que afanosamente toman largos conjuntos de reglas y los arman en formalismos estrictos para decirles a las máquinas inflexibles de qué modo ser flexibles.

Pero ¿qué clase de "reglas" podría llegar a abarcar todo eso que para nosotros es la conducta inteligente? Desde luego, tiene que haber reglas en toda clase de niveles distintos. Tiene que haber muchas reglas "llanas y simples". Tiene que haber "metarreglas" con que modificar las reglas "llanas y simples", y en seguida "metametarreglas" con que modificar las metarreglas, y así hasta nunca acabar. La flexibilidad de la inteligencia es resultado del enorme número de reglas distintas y de niveles distintos de reglas que existen. La razón de tantas reglas que operan en tantos niveles distintos es que el ser humano se enfrenta en la vida a millones de situaciones de tipos completamente heterogéneos. En ciertas situaciones existen respuestas estereotipadas para las cuales bastan las reglas "llanas y simples". Otras situaciones son mezcla de varias situaciones estereotipadas, y entonces hacen falta reglas para decidir cuál de las reglas "llanas y simples" hay que aplicar. Otras situaciones no pueden clasificarse y entonces hacen falta reglas para inventar nuevas reglas. . . etcétera. En el meollo de la inteligencia hay, sin duda alguna, Bucles Extraños fundados en reglas que, directa o indirectamente, se alteran a sí mismas. La complejidad de nuestro entendimiento parece a veces tan abrumadora que el problema de entender la inteligencia se nos antoja insoluble; sentimos que es erróneo postular algún tipo de regla capaz de gobernar la conducta del ser humano, aunque tomemos la palabra "regla" en el sentido amplísimo (abarcador de muchos niveles) que antes le dimos.

. . . y Bach

En 1754, cuatro años después de la muerte de J. S. Bach, un teólogo de Leipzig, Johann Michael Schmidt, escribió este notable párrafo en un tratado sobre música y sobre el alma:

> Hace no muchos años llegó de Francia la noticia de que alguien había fabricado una estatua que podía ejecutar varias piezas en la *Fleuttraversiere*. La estatua se llevaba la flauta a los labios y luego la retiraba, movía los ojos, etcétera. Pero nadie ha inventado todavía una imagen capaz de pensar, de desear, de componer algo, o de hacer nada semejante. Quien desee convencerse de ello examine atentamente la última obra fugal del ya elogiado Bach, recién impresa en calcografía, pero que quedó inconclusa por haberse interpuesto la ceguera del autor, y observe el arte que en ella está encerrado; o bien (y esto le va a parecer seguramente más portentoso) examine el Coral que durante su ceguera dictó Bach a una pluma ajena: *Wenn wir in höchsten Nöthen seyn*. Estoy convencido de que no tardará en necesitar su alma si quiere captar todas las bellezas en él encerradas, y no digamos si desea tocarlo para su propio deleite, o expresar un

juicio sobre el autor. Todo cuanto proponen los campeones del Materialismo tiene que derrumbarse frente a este solo ejemplo.[6]

Muy probablemente alude Johann Michael Schmidt al principal de los "campeones del materialismo", Julien Offroy de la Mettrie, filósofo residente en la corte de Federico el Grande, autor de *L'Homme machine* ("El hombre máquina") y Materialista Por Excelencia. Han pasado ahora más de 200 años, y sigue trabada todavía la pugna entre los que están con Schmidt y los que están con La Mettrie. EL presente libro se propone, entre otras cosas, dar una perspectiva de esa pugna secular.

"Gödel, Escher, Bach"

Mi libro está estructurado de manera poco habitual: como un contrapunto de Diálogos y Capítulos. Me he decidido por esta estructura para poder presentar dos veces los conceptos nuevos; casi siempre cada concepto nuevo se introduce metafóricamente en un Diálogo que expone una serie de imágenes concretas y visuales, y luego, a lo largo del Capítulo que sigue, esas imágenes sirven de trasfondo intuitivo para una presentación más seria y abstracta del concepto en cuestión. En muchos de los Diálogos doy la impresión, en el nivel superficial, de estar refiriéndome a tal o cual idea, cuando en realidad hablo, en forma ligeramente disfrazada, de otra distinta.

En un principio los personajes de mis Diálogos eran sólo Aquiles y la Tortuga, los cuales me llegaron de Zenón de Elea a través de Lewis Carroll: Zenón de Elea, inventor de paradojas, vivió en el siglo V antes de nuestra era. Una de sus paradojas es una alegoría que tiene por protagonistas a Aquiles y la Tortuga. El primero de mis Diálogos, *Invención a tres voces*, refiere cómo inventó Zenón esa simpática pareja. En 1895 Lewis Carroll reanimó a Aquiles y a la Tortuga para ilustrar su nueva y personal paradoja del infinito. La paradoja de Carroll, que merece ser mucho mejor conocida de lo que es, desempeña un papel importante en el presente libro. Intitulada por él "Lo que dijo la Tortuga a Aquiles", se llama en mi libro *Invención a dos voces*.

En cuanto comencé a escribir Diálogos los relacioné de alguna manera con formas musicales. No recuerdo en qué momento ocurrió; lo que sé es que un día escribí "Fuga" como encabezado de uno de los primeros Diálogos y que desde entonces se me quedó clavada la idea. Más tarde decidí hacer que cada Diálogo estuviera modelado, en una u otra forma, sobre alguna de las composiciones de Bach. Esto no es tan disparatado. El propio Bach solía recordarles a sus discípulos que las diversas partes de sus composiciones debían comportarse a manera de "personas conversando unas con otras, como se hace en una compañía selecta". Tal vez he tomado esa sugerencia un poco más a la letra de lo que Bach mismo pensaba;

[6] David y Mendel, *The Bach Reader*, pp. 255-256.

espero, sin embargo, que el resultado sea fiel a su significado. Fuente de particular inspiración han sido ciertos rasgos de las composiciones de Bach que desde siempre me han impresionado y que de manera tan excelente describen David y Mendel en *The Bach Reader*:

> Su forma se basaba, en general, en las relaciones entre secciones distintas. Estas relaciones iban desde la identidad total de pasajes, por un lado, hasta la recurrencia de determinado principio de elaboración o la reaparición de una simple alusión temática, por otro. Las estructuras así originadas suelen ser simétricas, pero de ninguna manera se trata de una regla indispensable. A veces las relaciones entre las diversas secciones crean un laberinto de hilos entreverados que sólo un análisis detallado puede desenredar. Sin embargo, hay por lo general cierto número de rasgos dominantes que proporcionan una orientación adecuada a primera vista o a primer oído, y, por más que en el curso del estudio podamos ir descubriendo interminables sutilezas, jamás nos queda la menor incertidumbre en cuanto a la unidad que reúne a todas las creaciones de Bach.[7]

He procurado urdir una Eterna Trenza de Oro con estos tres hilos: Gödel, Escher, Bach. Mi intención inicial era escribir un ensayo en cuyo centro iba a estar el Teorema de Gödel. Me lo imaginé de las dimensiones de un folleto. Pero mis ideas se expandieron como una esfera y no tardaron en toparse con Bach y con Escher. Tardé algún tiempo en comprender la necesidad de hacer explícita esta conexión en vez de dejarla funcionar sólo como fuerza motivadora personal. Pero al final me di cuenta de que Gödel, Escher y Bach no eran, para mí, sino sombras proyectadas en distintas direcciones por alguna esencia *sólida* central. Traté de reconstruir el objeto central y lo que me resultó es este libro.

[7] *Ibid.*, p. 40.

Invención a Tres Voces

Aquiles (guerrero griego, el más veloz de todos los mortales) y una Tortuga están conversando al rayo del sol, en una pista polvorienta. A lo lejos, donde acaba la pista, hay un asta de la cual pende una bandera rectangular de gran tamaño. La bandera es de color rojo macizo, salvo un lugar en que le han recortado a la tela un agujerito en forma de anillo a través del cual puede verse el cielo.

Aquiles: ¿Qué es esa extraña bandera, allí, al final de la pista? Me recuerda en cierta forma un grabado de mi artista preferido, M. C. Escher.

Tortuga: Es la bandera de Zenón.

Aquiles: ¿No le parece a usted que el agujero que tiene es como los agujeros de la banda de Möbius que una vez dibujó Escher? Algo raro sucede en esa bandera, no cabe duda.

Tortuga: El anillo que le han recortado tiene la forma del numeral cero, que es el predilecto de Zenón.

Aquiles: ¡Pero el cero no se ha inventado todavía! Tendrán que pasar unos milenios para que lo invente un matemático hindú. Con lo cual, señora T, demuestro que esa bandera es imposible.

Tortuga: Su argumento es persuasivo, Aquiles, y me es forzoso aceptar que esa bandera es imposible en efecto. Pero de todas maneras es bonita, ¿no le parece?

Aquiles: Ah, eso desde luego: no hay duda de que es bonita.

Tortuga: ¿Habrá alguna relación entre su belleza y su imposibilidad? No es que yo sepa de estas cosas. Nunca he tenido ocasión de analizar la Belleza. Es una Esencia con Mayúscula, y veo que jamás he tenido tiempo para ocuparme de Esencias con Mayúscula.

Aquiles: A propósito de Esencias con Mayúscula, señora T, ¿nunca se ha preguntado usted cuál es la Finalidad de la Vida?

Tortuga: Caramba, no.

Aquiles: ¿No se ha preguntado nunca por qué estamos aquí, ni quién nos inventó?

Tortuga: Ah, eso es completamente distinto. Somos invento de Zenón (como veremos muy pronto); y la razón de nuestra presencia aquí es que vamos a jugar una carrera usted y yo.

Aquiles: ¿Una carrera? ¡Pero qué disparate! ¡Yo, el más veloz de todos los mortales, y usted, campeona de pachorra entre todos los pachorrudos! No le veo el menor chiste a una carrera así.

Tortuga: Podría usted darme un poco de ventaja.

Aquiles: Un mucho, diría yo.



Figura 10. Banda de Möbius, *de M. C. Escher (grabado en madera impreso en cuatro planchas, 1961).*

Tortuga: No me opongo.

Aquiles: Pero tarde o temprano la alcanzaré a usted, y lo más seguro es que temprano.

Tortuga: Si las cosas suceden de acuerdo con la paradoja de Zenón, no va a ser así. Zenón espera utilizar nuestra competencia para demostrar que el movimiento es imposible, ¿me entiende usted? Según Zenón, es sólo en la mente donde parece posible el movimiento. A decir verdad, El Movimiento Es Inherentemente Imposible. El lo demuestra con bastante elegancia.

Aquiles: Ya, ya, ahora lo recuerdo: el famoso koan zen sobre el maestro zen. Tiene usted razón, es cosa muy simple.

Tortuga: ¿Koan zen? ¿Maestro zen? ¿De qué está usted hablando?

Aquiles: Va así: dos monjes disputaban acerca de una bandera. Uno decía: "La bandera se está moviendo". El otro decía: "El aire se está moviendo". Acertó a pasar por allí el sexto patriarca, Zenón, y les dijo: "Ni el aire, ni la bandera; lo que se mueve es la mente".

Tortuga: Me temo que esté usted algo confundido, Aquiles. Zenón no es

maestro zen ni cosa que se le parezca. Es un filósofo griego, nacido en la ciudad de Elea (que queda a medio camino entre los puntos A y B). Dentro de unos siglos, este Zenón se hará célebre por sus paradojas acerca del movimiento. En una de esas paradojas, justamente, va a tener papel central esta competencia de velocidad entre usted y yo.

Aquiles: Pero entonces estoy hecho un lío. Recuerdo clarísimamente cómo solía yo recitar y recitar los nombres de los seis patriarcas zen, siempre decía: "El sexto patriarca es Zenón, el sexto patriarca es Zenón. . ."

(Sopla de repente una brisa suave y tibia.)

¡Ah! ¡Mire, señora Tortuga! ¡Mire cómo ondea la bandera! Me encanta ver esas olitas que van rizando la tela tan suave. ¡Y el anillo que le recortaron está ondeando también!

Tortuga: No sea usted tonto. La bandera es imposible, por lo tanto no puede estar moviéndose. El aire es el que se mueve.

(En este momento acierta a pasar Zenón.)

Zenón: ¡Hola! ¡Muy buenas tardes! ¿Qué pasa? ¿Qué hay de nuevo?

Aquiles: Que la bandera se está moviendo.

Tortuga: Que el aire se está moviendo.

Zenón: ¡Amigos, Amigos Míos! ¡Suspendan ustedes su disputa! ¡No dejen correr más vitriolo! ¡Abandonen su discordia! Yo me comprometo a resolverles su problema en un momentito. ¡Vaya pleito! ¡Y en un día tan despejado!

Aquiles: Este fulano seguramente se está haciendo el loco.

Tortuga: No se apresure, Aquiles. Oigamos lo que quiere decirnos. Oh, Desconocido Señor, ¿querría usted hacernos partícipes de sus pensamientos en torno a este problema?

Zenón: Con todo gusto. Ni el aire ni la bandera: ninguno de los dos se está moviendo. Más aún, no hay cosa alguna que se mueva. Y la razón de ello es que he descubierto un gran Teorema que dice: "El Movimiento es Inherentemente Imposible". Teorema del cual se sigue otro teorema más grande aún, el Teorema de Zenón: "El Movimiento Inexiste".

Aquiles: ¿"Teorema de Zenón"? Dígame, señor, ¿es usted de casualidad el filósofo Zenón de Elea?

Zenón: Sí, Aquiles. El mismo.

Aquiles: (*rascándose la cabeza, muy perplejo*): ¿Y eso? ¿Cómo habrá averiguado mi nombre?

Aquiles: ¿Estarían ustedes dispuestos a prestarme oídos mientras les explico por qué mi Teorema es verdadero? Esta misma tarde, después de salir del punto A, he tomado el camino de Elea sin más propósito que encontrar a alguien que quisiera concederme un poco de

atención y escuchar mi bien afilado argumento. Pero todo el mundo anda corriendo de aquí para allá, y nadie me ha hecho caso. No tienen ustedes idea del desaliento que le entra a uno cuando se topa con negativa tras negativa. Pero perdón, no quiero abrumarlos con problemas míos. Una sola cosa les pido. ¿Accederían ustedes a complacer a este filósofo viejo y tonto durante unos cuantos momentos —unos cuantos, de veras— escuchando sus excéntricas teorías?

Aquiles: ¡Pero claro, no faltaba más! Ilumínemos usted, tenga la bondad. Y me consta que estoy hablando, no sólo por mí, sino también por mi compañera, la señora Tortuga, que hace apenas unos momentos se expresaba de usted con gran veneración y mencionaba especialmente sus paradojas.

Zenón: Gracias. Pues verán ustedes: mi Maestro, el quinto patriarca, me enseñó que la realidad es una, inmutable e inalterable, y que toda pluralidad, todo cambio y todo movimiento son meras ilusiones de los sentidos. Algunos se han reído de esas ideas; pero yo les demostraré a ustedes lo absurdo de sus burlas. Mi argumento es sencillísimo. Voy a ilustrarlo con dos personajes que son Invento mío: Aquiles (guerrero griego, el más veloz de todos los mortales) y una Tortuga. en mi cuento, un transeúnte que se topa con ellos los persuade a jugar, en una pista polvorienta, una carrera cuya meta es una bandera distante que ondea al soplo de la brisa. Vamos a suponer que a la Tortuga, por ser un corredor mucho más lento, se le da una ventaja de, digamos, diez varas. Comienza entonces la carrera. De unas cuantas zancadas ha llegado Aquiles al punto de donde partió la tortuga.

Aquiles: ¡Ja!

Zenón: Y ahora la ventaja que la tortuga le lleva a Aquiles es sólo de una vara. Llegar a ese punto es, para Aquiles, cuestión de un instante.

Aquiles: ¡Jo jo!

Zenón: Durante ese instante, sin embargo, la Tortuga ha conseguido avanzar otro poquito. En un relámpago, Aquiles cubre también esta distancia.

Aquiles: ¡Je je je!

Zenón: Sólo que en ese relámpago brevísimo la Tortuga ha logrado adelantar un poquitín más, de manera que Aquiles continúa a la zaga. Como ustedes pueden ver, para que Aquiles alcance a la Tortuga va a ser preciso que este juego de alcánzame-si-puedes" se juegue un número INFINITO de veces, lo cual equivale a decir que Aquiles no podrá alcanzar NUNCA a la Tortuga.

Tortuga: ¡Ji ji ji ji!

Aquiles: Hmm. . . hmm. . . hmm. . . hmm. . . hmm. . . Este argumentito me suena mal. Pero por más vueltas que le doy, no hallo dónde está lo malo.

Zenón: ¿No es excelente como quebradero de cabeza? Es mi paradoja predilecta.

Tortuga: Perdóneme usted, Zenón, pero creo que su cuento no está ilustrando el principio que debiera. Porque, mire: usted acaba de exponernos eso que dentro de unos siglos va a llamarse "la paradoja de Aquiles" de Zenón, la cual demuestra (¡ejem!) que Aquiles no alcanza nunca a la Tortuga; pero la demostración de que El Movimiento Es Inherentemente Imposible (y, por consiguiente, de que El Movimiento Inexiste) está en otra de sus paradojas, la "paradoja de la dicotomía", ¿no es así?

Zenón: ¡Pero qué cabeza la mía! tiene usted toda la razón, por supuesto. Es la que explica cómo, para llegar de A a B, hay que recorrer primero la mitad del trayecto, y para cubrir la distancia restante también hay que recorrer primero la mitad, y así más y más veces. Pero, como ustedes ven, estas dos paradojas están hechas en realidad de una sola materia. Hablando con franqueza, yo no he tenido sino una sola Gran Idea, y simplemente la exploto de distintas maneras.

Aquiles: Estoy segurísimo de que esos argumentos contienen una falla. No consigo ver dónde, pero no pueden estar bien.

Zenón: ¿Duda usted de la validez de mi paradoja? ¿Por qué no la sometemos a una prueba? ¿Ve usted esa bandera roja allí, donde acaba la pista?

Aquiles: ¿La imposible, basada en un grabado de Escher?

Zenón: Esa misma. ¿Qué le parece si usted y la señora Tortuga la toman como meta de una carrera? Estará usted de acuerdo en darle a la señora T una justa ventaja de. . . mmm. . . no sé. . .

Tortuga: ¿Qué tal diez varas?

Zenón: Me parece perfecto: diez varas.

Aquiles: Cuando usted guste.

Zenón: ¡Estupendo! ¡Qué emoción! ¡La prueba empírica de un Teorema mío que está rigurosamente demostrado! Señora Tortuga, ¿quiere usted ocupar su posición a diez varas de donde estamos?

(La tortuga avanza diez varas en dirección de la bandera)

Tortuga y Aquiles: ¡Listos!

Zenón: ¡En sus marcas! ¡Prepárense! ¡Ya!

CAPITULO I

El acertijo MU

Sistemas formales

UNA DE LAS NOCIONES CENTRALES de este libro es la de *sistema formal.* El tipo de sistema formal que utilizo fue creado por el lógico norteamericano Emil Post durante la década de los veinte, y es denominado a menudo "sistema de producción de Post". Este capítulo expone un sistema formal; espero que, además, el lector sienta el deseo de ampliar aunque sea mínimamente esta noción: así, a fin de provocar su curiosidad, he planteado un modesto acertijo.

"¿Puede usted producir MU?", es el desafío. Para comenzar, se deberá disponer de una *cadena* (se trata de una cadena de letras).[1]

Para interrumpir el suspenso, digamos que esa cadena será MI. Serán establecidas determinadas reglas, cuya aplicación permitirá transformar una cadena en otra distinta. Si alguna de tales reglas es utilizable en cierto momento, y se desea aplicarla, no hay inconveniente en hacerlo, pero no habrá nada que indique cuál regla es la adecuada en caso de que sean varias las utilizables. Es necesario optar, y en ello consiste la práctica del juego a través del cual todo sistema formal puede llegar a asemejarse a un arte. El requisito principal, obviamente, es que no se debe proceder al margen de las reglas. "Requisito de Formalidad", podemos llamar a esta limitación, que probablemente *no* deba ser subrayada en el transcurso de este capítulo; sin embargo, y por extraño que parezca, predigo que cuando juegue con algunos sistemas formales de los capítulos siguientes, el lector descubrirá que está *violando* repetidas veces el Requisito de Formalidad, excepto si ha trabajado anteriormente con sistema formales.

Lo primero por decir a propósito de nuestro sistema formal —*el sistema MIU*— es que emplea *sólo* tres letras del alfabeto: M, I, U. Esto significa que las cadenas del sistema MIU estarían formadas exclusivamente por esas tres letras. Las que siguen son algunas de las cadenas del sistema:

[1] Para referirnos a las cadenas, emplearemos las siguientes convenciones: si aparecen en la misma tipografía que el resto del texto, serán señaladas mediante comillas *simples* o dobles. La puntuación que corresponda a la frase, y no a la cadena de que se hable, estará ubicada *fuera* de las comillas, como es lógico. Por ejemplo, la primera letra de esta oración es "P", mientras que la primera letra de 'esta oración' es 'e'. Sin embargo, cuando la cadena aparezca en otra tipografía, no se usarán comillas, a menos que sea imprescindible por razones de claridad. Por ejemplo, la primera letra de otra es o.

MU
UIM
MUUMUU
UIIUMIUUIMUIIUMIUU

Pese a que todas las precedentes son cadenas legítimas, aún no están "en poder" del jugador. En realidad, la única que éste posee hasta ahora es MI. Sólo mediante la aplicación de las reglas, que a continuación enuncio, podrá ampliar el lector su colección privada. He aquí la primera regla:

REGLA I: Si se tiene una cadena cuya última letra sea I, se le puede agregar una U al final.

Dicho sea de paso, por si no se lo ha advertido, al decir "cadena" se da por sentado que las letras están situadas en un orden establecido. Por ejemplo, MI e IM son dos cadenas diferentes. Una cadena de símbolos no es precisamente un "saco" de símbolos, donde el orden interno sería indiferente.

He aquí la segunda regla:

REGLA II: Supongamos que se tenga M*x*. En tal caso, puede agregarse M*xx* a la colección.

Unos pocos ejemplos ilustrarán esto.

Dado MIU, se puede obtener MIUIU.
Dado MUM, se puede obtener MUMUM.
Dado MU, se puede obtener MUU.

En consecuencia, la letra '*x*' simplemente representa cualquier cadena, pero una vez que se ha decidido cuál es la cadena representada, es preciso ajustarse a tal decisión (hasta que se vuelva a aplicar la regla: entonces será posible decidir otra cosa). Observemos el tercero de los ejemplos anteriores, que muestra cómo, una vez que se tiene MU, se puede incorporar otra cadena a la colección, ¡pero primero es necesario obtener MU! Quisiera hacer un último comentario acerca de la letra '*x*': el modo en que ésta integra el sistema formal no es el mismo que caracteriza a 'M', 'I' y 'U'. Nos resulta útil contar con alguna manera de referirnos en general, simbólicamente, a las cadenas del sistema, y ésa es la función de '*x*': representar cadenas arbitrarias. Si alguien suma a su "colección" una cadena que contenga una '*x*', está cometiendo un error, porque las cadenas del sistema MIU nunca pueden incluir '*x*'.

Ahora, la tercera regla:

REGLA III: Si en una de las cadenas de la colección aparece la secuencia III, puede elaborarse una nueva cadena sustituyendo III por U.

Ejemplos:

Dado UMIIIMU, se puede elaborar UMUMU.
Dado MIIII, se puede elaborar MIU (también MUI).
Dado IIMII, la aplicación de esta regla no permite ninguna transformación (las tres III deben ser consecutivas).
Dado MIII, se elabora MU.

Bajo ninguna circunstancia ha de pensarse en emplear la regla en sentido inverso, como en el ejemplo siguiente:

Dado MU, obtener MIII. ⇐ Erróneo.

Las reglas son unidireccionales.
He aquí la última:

REGLA IV: Si aparece UU en el interior de una de las cadenas, está permitida su eliminación.

Dado UUU, se obtiene U.
Dado MUUUIII, se obtiene MUIII.

Eso es todo; a continuación, hay que tratar de obtener MU. No hay que preocuparse si no se lo consigue: lo principal es hacer un pequeño intento, a fin de tomarle el gusto a este acertijo. Diviértase el lector.

…nas, axiomas, r…as

La solución del acertijo MU aparece en otra parte de este libro. Lo importante ahora no es leer la solución, sino investigarla. Si el lector ya hizo algunos intentos para producir MU, tendrá elaborada su colección personal de cadenas. Estas, generadas mediante el empleo de las reglas, se llaman *teoremas*. El sentido del término "teorema" es, aquí, por completo diferente al que es común en el ámbito de la matemática, la cual llama de ese modo a las afirmaciones formuladas en lenguaje corriente cuya veracidad ha sido probada por medio de una demostración rigurosa; por ejemplo, el Teorema de Zenón sobre la "inexistencia" del movimiento, o el Teorema de Euclides acerca de la infinitud de los números primos. En los sistemas formales, en cambio, no hay necesidad de considerar los teoremas como afirmaciones: son, simplemente, cadenas de símbolos y, por otra parte, en lugar de ser *demostrados*, sólo son *producidos*, como si los

elaborara una máquina con arreglo a determinadas reglas *tipográficas*. Con el objeto de subrayar esta importante distinción en los significados de la palabra "teorema", adoptaré en más la siguiente convención: cuando "teorema" aparezca con mayúscula inicial, se tratará de la acepción ordinaria: un teorema es una afirmación formulada en lenguaje corriente cuya veracidad alguien probó a través de cierto tipo de demostración lógica. Cuando aparezca en minúsculas, "teorema" estará empleado en su sentido técnico: una cadena producible dentro de algún sistema formal. Bajo estas condiciones, el acertijo MU plantea si MU es un teorema del sistema MIU.

Al empezar, proporcioné gratuitamente un teorema al lector, MI. Este teorema "gratuito" es un *axioma*; se repite ahora el caso de que el significado técnico difiere por completo del significado habitual. Un sistema formal puede tener cero, uno, varios o inclusive infinitos axiomas; en el curso de este libro aparecerán ejemplos de todas estas variantes.

Todo sistema formal cuenta con reglas de derivación de símbolos, tales como las cuatro reglas del sistema MIU. Estas reglas son denominadas *reglas de producción*, o bien *reglas de inferencia*; utilizaré en adelante ambas expresiones.

Por último, el concepto que quiero comentar en este desarrollo es el de *derivación*. Lo que sigue es una derivación del teorema MUIIU:

(1)	MI	axioma
(2)	MII	de (1), aplicando la regla II
(3)	MIIII	de (2), aplicando la regla II
(4)	MIIIIU	de (3), aplicando la regla I
(5)	MUIU	de (4), aplicando la regla III
(6)	MUIUUIU	de (5), aplicando la regla II
(7)	MUIIU	de (6), aplicando la regla IV

Una derivación de un teorema es una demostración, explícita y punto por punto, del modo en que es producido el mismo de acuerdo a las reglas del sistema formal. El concepto de derivación está acuñado siguiendo el modelo del de prueba, pero una derivación es pariente lejana de una prueba, en realidad. Si alguien dice que *probó* MUIIU, sonaría raro, pero no sonaría tan raro si se dice que se ha *derivado* MUIIU.

Interior y exterior del sistema

Muchas personas abordan el acertijo MU dedicándose a derivar, de una manera enteramente azarosa, gran cantidad de teoremas, sólo por ver qué sucede. Muy pronto, esas personas comienzan a advertir ciertas propiedades en los teoremas que han elaborado: es aquí donde la inteligencia humana introduce la descripción. Por ejemplo, probablemente no era

obvio para el lector que todos los teoremas iban a comenzar con M hasta que no hizo unos pocos intentos. Y luego, ya descubierto el modelo, el lector habrá podido comprenderlo a través del análisis de las reglas, cuyo atributo es obligar a que cada nuevo teorema reciba su primera letra de un teorema precedente; en último caso, por consiguiente, todas las letras iniciales de los teoremas pueden ser obtenidas a partir de la primera letra del axioma MI: y esto constituye una demostración de que todos los teoremas del sistema MIU deben comenzar con M.

Ha ocurrido aquí algo muy significativo: lo anterior muestra una diferencia entre seres humanos y máquinas. Es perfectamente posible —y muy fácil, en realidad— programar una computadora para que genere teorema tras teorema del sistema MIU; y podríamos incluir en la programación la orden de que sólo se detenga al generar U. El lector ya sabe que una computadora así programada no se detendría nunca. Y ello no lo asombra, pero ¿qué ocurre si le pide a un amigo que trate de generar U? Le parecerá natural que, pasado un rato, el amigo se lamente de no poder evitar la inicial M, y de estar persiguiendo, en consecuencia, un objetivo imposible. Aun cuando se trate de una persona no muy aguda, no dejará de formular algunas observaciones a propósito de lo que está haciendo, y tales observaciones le permitirán comprender con claridad el problema: en el programa de computación que hemos descrito la comprensión estará ausente.

Seré muy explícito acerca de lo que quiero decir cuando señalo que lo anterior ilustra una diferencia entre seres humanos y máquinas. Quiero significar que es *posible* programar una máquina para que realice una tarea rutinaria, de un modo tal que la máquina jamás advierta ni siquiera los hechos más obvios vinculados con lo que está haciendo; en cambio, apercibirse de determinados hechos vinculados con lo que se está haciendo es algo inherente a la conciencia humana. Pero el lector ya sabía muy bien esto. Si alguien oprime el "1" de una máquina sumadora, y luego repite la operación, y la sigue repitiendo sin cesar durante horas y horas, la máquina no aprenderá jamás a anticiparse al operador sumando un nuevo "1" por sí misma, a pesar de que cualquier persona asimilaría muy rápidamente el comportamiento repetitivo. O bien, para agregar un ejemplo simple, un automóvil jamás captará la idea de que es necesario no chocar con otros automóviles o con obstáculos cuando circule; por mucho o muy bien que haya sido conducido, tampoco llegará a aprender ni siquiera los trayectos más habituales de su propietario.

La diferencia, entonces, reside en que a la máquina le es *posible* actuar sin advertirlo, cosa imposible para el ser humano. Hago notar que no estoy diciendo que todas las máquinas son necesariamente incapaces de efectuar observaciones refinadas: sólo algunas máquinas lo son. Tampoco estoy afirmando que toda persona, siempre, efectúa ese tipo de observaciones; en realidad, la gente actúa a menudo sin ejercitar la observación. Sin embargo, puede conseguirse que las máquinas sean absolutamente no

observadoras, cosa que no es posible con los seres humanos. La mayoría de las máquinas construidas hasta ahora, por cierto, están bastante cerca de la inobservancia total. Es probable que ello motive la opinión generalizada de que la inobservancia es el rasgo característico de las máquinas. Por ejemplo, si alguien dice que cierta tarea es "mecánica" no quiere expresar que no puede ser realizada por una persona, sino que únicamente una máquina podría efectuarla una y otra vez sin quejarse, o sin aburrirse.

Brincos fuera del sistema

Uno de los atributos inherentes a la inteligencia es la capacidad de alejarse mediante un brinco de lo que está haciendo, con el objeto de examinarlo; en todos los casos esto es buscar, y a menudo con éxito, modelos. Ahora bien, dije que la inteligencia puede brincar fuera de su labor, pero eso no quiere significar que así ocurra siempre; sin embargo, muchas veces basta una leve incitación para conseguirlo. Por ejemplo, una persona que está leyendo un libro puede quedarse dormida; en lugar de seguir la lectura hasta terminarla, actúa del mismo modo que cuando se deja el libro a un lado y se apaga la luz. Se ha desplazado "fuera del sistema", y sin embargo ello nos parece lo más natural del mundo. O si no, supongamos que una persona A está viendo televisión cuando una persona B entra en la habitación y muestra evidente desagrado. La persona A puede creer que comprende el problema, e intentar solucionarlo mediante el abandono del sistema en curso (ese programa de televisión); en consecuencia, acciona el botón selector en busca de un programa mejor. Pero la persona B puede tener un concepto más radical acerca de qué es "abandonar el sistema": es decir, ¡apagar la televisión! Hay casos, por cierto, donde únicamente contados individuos tienen la lucidez de percibir un sistema que está gobernando la existencia de muchas personas, un sistema que nunca antes había sido identificado como sistema; a partir de ese momento, esos individuos suelen dedicar su vida a la empresa de convencer al resto de que realmente el sistema está allí, ¡y que es preciso abandonarlo!

¿Hasta qué punto las computadoras han sido enseñadas a brincar fuera del sistema? Citaré un ejemplo que sorprendió a algunos testigos. En un torneo de ajedrez por computadoras que tuvo lugar no hace mucho, en Canadá, un programa —el más endeble de todos los que competían— presentó la característica inusual de abandonar antes que el juego terminase. No practicaba un buen ajedrez, pero tuvo al menos la rescatable cualidad de advertir las situaciones sin salida, y retirarse de inmediato, sin aguardar que el programa rival desarrollase el aburrido ritual del jaque mate. A pesar de que perdió todas sus partidas, mostró un estilo; muchos de los expertos locales en ajedrez quedaron impresionados. En re-

sumen, si se define "el sistema" como "efectuar movidas en un juego de ajedrez", resulta claro que este programa contó con una refinada y anteprogramada capacidad para abandonar el sistema. Por otra parte, si se entiende que "el sistema" es "todo lo que ha sido programado para que la computadora haga", *no* hay duda de que la computadora no contó con aquella capacidad.

Cuando se estudian sistemas formales, es importante distinguir *entre* lo que se hace *dentro* del sistema, por un lado, y por otro las enunciaciones u observaciones que se formulan *acerca* del sistema. Supongo que el lector habrá abordado el acertijo MU, lo mismo que la mayoría de la gente, manteniéndose al principio en el interior del sistema, pero que luego, poco a poco, se ha ido impacientando cada vez más hasta el punto de salir del sistema, sin pensarlo mucho, tratando de evaluar los resultados obtenidos, y preguntándose por qué no había podido producir MU. Quizá descubrió una razón para explicar por *qué* no obtuvo MU: esto es pensar acerca del sistema. Quizá produjo MIU en algún punto del desarrollo que elaboró: esto es actuar dentro del sistema.

Ahora bien, mi interés no es presentar ambas modalidades como si fuesen absolutamente incompatibles; tengo la seguridad de que todo ser humano, en alguna medida, es capaz de actuar dentro de un sistema y, simultáneamente, de pensar acerca de lo que está haciendo. En la esfera de los asuntos humanos, por cierto, a menudo es casi imposible separar las cosas de forma que pertenezcan nítidamente al "interior del sistema" o al "exterior del sistema"; sería simplista pensar de tal manera, teniendo en cuenta que la vida está compuesta por demasiados engranajes, entrelazamientos y sistemas muchas veces incoherentes. Sin embargo, en ocasiones es útil formular muy claramente ideas simples, a fin de poder emplearlas como modelos en la comprensión de ideas más complejas. Por eso es que estoy hablando ahora de sistemas formales; pero ya es hora de volver a discutir el sistema MIU.

La vía M, la vía I, la vía U

El acertijo MU fue enunciado de modo tal que alentase un cierto grado de búsqueda dentro del sistema MIU, a través de la derivación de teoremas. Pero no se afirmó que necesariamente había que mantenerse dentro del sistema para obtener resultados. En consecuencia, se alentó también cierta oscilación entre las dos modalidades de trabajo. Una forma de diferenciar estas últimas sería contar con dos hojas de papel: una, reflejaría lo que hacemos en ejercicio de "nuestra habilidad mecánica", por lo que sólo escribiríamos en ella *letras* M, I, y U; la otra reflejaría "nuestra capacidad de pensar", y volcaríamos en ella todo lo que nuestra inteligencia sugiera: formulación de reflexiones, esbozo de ideas, utilización de abreviaturas taquigráficas (como la letra '*x*'), sintetización de varios pasos en

uno solo, modificación de las reglas del sistema para ver qué surge, y todo lo que se nos pueda ocurrir al respecto. Es posible percatarse de que los números 3 y 2 juegan un papel importante, ya que la *acumulación* triple de Ies, y la doble de Ues, se elimina, y que la regla II permite duplicar la extensión (fuera de la M). Por lo tanto, la segunda hoja podrá contener alguna conjetura a propósito de ello. Más adelante haremos alguna referencia a aquellas dos modalidades de abordamiento de los sistemas formales, a las que denominaremos *Vía mecánica* (*vía M*) y *Vía inteligente* (*vía I*). Para completar nuestras vías de modo que tengamos una por cada letra del sistema MIU, incluiremos una tercera: la *No vía* (*vía U*), que consiste en la vía Zen de aproximación a las cosas. Volveremos sobre esto algunos capítulos más adelante.

Procedimientos de decisión

Se puede observar que este acertijo comprende reglas caracterizadas por *dos tendencias opuestas*: *reglas ampliadoras* y *reglas reductoras*. Hay dos reglas (I y II) que permiten aumentar la extensión de las cadenas (aunque sólo mediante fórmulas muy rígidas y precisas, por supuesto); y hay otras dos que permiten reducirlas un tanto (también a través de requisitos rígidos). Parece haber una variedad inacabable de instancias en las cuales pueden ser aplicados estos diferentes géneros de reglas, y como consecuencia se puede esperar que, de una manera u otra, se termine produciendo MU. Ello puede traducirse en una ampliación gigantesca de la cadena, para luego extraerle elemento tras elemento hasta que no queden sino dos símbolos; o bien, menos satisfactoriamente, puede implicar sucesivos estadios de ampliación y reducción alternados, seguidos por otros similares, y así en más. Pero no existe garantía alguna acerca de lo que puede ocurrir. Ciertamente, ya hemos observado que U no puede ser producida de ninguna forma, y no podrá ser de otro modo, aunque el lector se dedique a ampliar y a reducir hasta el día del juicio final.

No obstante, el caso de U y el caso de MU parecen ser enteramente distintos. Un rasgo muy obvio de U es lo *que obliga* a reconocer la imposibilidad de producirla: no la precede una M (teniendo en cuenta que todos los teoremas deben comenzar con M). Es de gran utilidad apelar a este método tan simple para detectar no teoremas. Ahora bien, ¿quién dice que esta verificación permitirá detectar *todos* los no teoremas? Hay incontables cadenas que *comienzan con* M, pero no son producibles; quizá MU sea una de ellas. Esto significaría que la "prueba de la primera letra" es de utilidad limitada: sirve únicamente para descubrir un cierto número de no teoremas, pero otros se le escapan. Queda la posibilidad, sin embargo, de que una verificación algo más elaborada distinga perfectamente las cadenas que pueden ser producidas por aplicación de las reglas, de las que no llenan esta condición. Tenemos que enfrentar aquí el siguiente

interrogante: "¿Qué entendemos por verificación?" A lo mejor no se percibe cuál es el fundamento de tal pregunta, o su importancia, en el presente contexto. Para aclarar esto, daré el ejemplo de una "verificación" que, de alguna manera, viola el espíritu de esa palabra.

Imaginemos un genio que tiene todo el tiempo del mundo, y disfruta dedicándolo a producir teoremas del sistema MIU, de un modo más bien metódico. La que sigue, por ejemplo, es una de las direcciones que posiblemente elegiría el genio:

Paso 1: Emplear todas las reglas aplicables al axioma MI. Esto produciría dos nuevos teoremas: MIU, MII.

Paso 2: Emplear todas las reglas aplicables a los teoremas obtenidos en el paso 1. Esto produciría tres nuevos teoremas: MIIU, MIUIU, MIIII.

Paso 3: Emplear todas las reglas aplicables a los teoremas obtenidos en el paso 2. Esto produciría cinco nuevos teoremas: MIIIIU, MIIUIIU, MIUIUIUIU, MIIIIIIII, MUI.

.
.
.

Tarde o temprano, este método produce todos los teoremas, porque las reglas son empleadas en todos los órdenes concebibles (véase la figura 11). Todas las alternancias ampliación-reducción que mencionamos antes van a surgir aquí, sin ninguna duda. Empero, no está claro cuánto habrá que

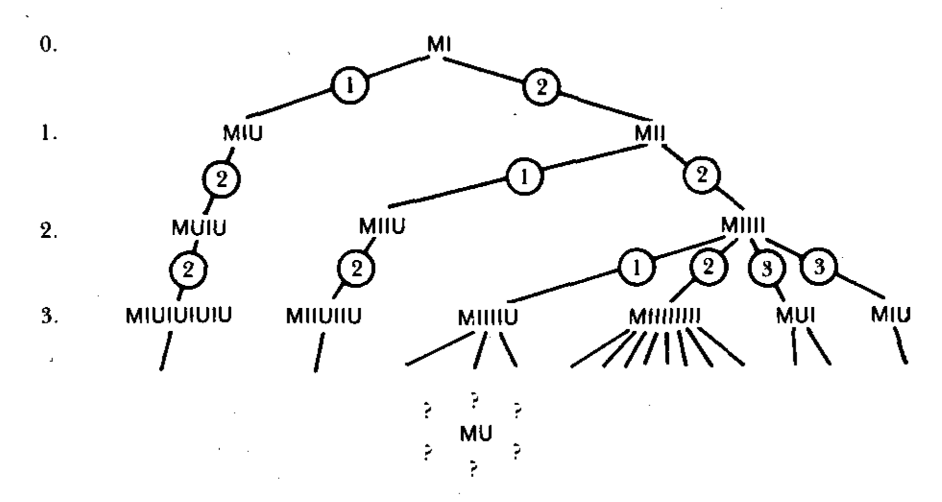


Figura 11. Un "árbol" sistemáticamente construido de todos los teoremas del sistema MIU. El nivel N *contendrá aquellos teoremas cuya derivación contiene* N *pasos. Los números rodeados por círculos qué regla fue empleada. ¿Este árbol incluirá a* MU?

esperar para que aparezca una cadena determinada, ya que el orden de los teoremas responde a la brevedad de su derivación. No se trata de un orden muy conveniente, si se está interesado en una cadena en particular (MU, por ejemplo), de la que ni siquiera se sabe si cuenta con alguna derivación, y mucho menos entonces qué extensión puede tener ésta.

Ahora, formularemos la "verificación de teoremidad" propuesta:

> Es necesario esperar hasta que la cadena en cuestión se produzca; si así ocurre, se sabe que es un teorema. Y si así no ocurre nunca, se sabrá que no es un teorema.

Esto suena ridículo, porque presupone que no tenemos inconveniente en esperar pacientemente la respuesta durante un lapso infinito, lo cual nos conduce al punto de partida: qué es una "verificación". Es de importancia primordial contar con la garantía de que obtendremos nuestra respuesta dentro de un lapso finito. Si existe una prueba de la teoremidad, una verificación que se complete dentro de un lapso finito, su nombre es *procedimiento de decisión*, correspondiente al sistema formal de que se trate.

Cuando se cuenta con un procedimiento de decisión, se tiene con él una caracterización muy concreta de la naturaleza de todos los teoremas del sistema. A primera vista, puede parecer que las reglas y axiomas del sistema formal proveen una caracterización de los teoremas del sistema, que no es menos completa que la aportada por el procedimiento de decisión. La palabra engañosa aquí es "caracterización". Sin duda, las reglas de inferencia y los axiomas del sistema MIU caracterizan, *tácitamente*, a las cadenas que son teoremas. Más *tácitamente* aun, caracterizan a las cadenas que *no* son teoremas. Pero una caracterización tácita no basta para satisfacer todas las finalidades, ni mucho menos. Si alguien sostiene que dispone de una caracterización de todos los teoremas, pero que necesita un plazo infinitamente largo para deducir si una cadena en particular es un teorema, nos inclinaríamos a decir, probablemente, que algo falta en esa caracterización: no es lo bastante concreta todavía. El descubrimiento de que existe un procedimiento de decisión, entonces, constituye un avance de gran importancia. El significado de este descubrimiento consiste en la posibilidad de realizar una prueba que verifique la teoremidad de una cadena; aun en el caso de que la prueba sea complicada, *la finalización queda garantizada*. Como principio, la verificación es simple, mecánica, finita y plena de certidumbre, pues reside en la sola comprobación de que la primera letra de una cadena sea M. ¡Un procedimiento de decisión es la "prueba del papel tornasol" de la teoremidad!

Además, los sistemas formales requieren que el conjunto de *axiomas* esté caracterizado por un procedimiento de decisión, que actúe como prueba del papel tornasol de la axiomidad. Así se asegura que, al menos

al comienzo, se puede ingresar sin problemas al campo de trabajo. Esta es la diferencia que separa al conjunto de los axiomas del conjunto de los teoremas: el primero siempre está dotado de un procedimiento de decisión, que en el segundo puede faltar.

Estoy seguro de que el lector, cuando afrontó por vez primera el sistema MIU, se encontró precisamente con estos problemas. El único axioma era conocido, y las reglas de inferencia eran simples, de modo que los teoremas quedaban tácitamente caracterizados; empero, no estaba claro qué consecuencias surgían de tal caracterización. Específicamente, no estaba claro en absoluto si MU es un teorema o no lo es.



Figura 12. Castillo en el cielo, *de M. C. Escher (xilografía, 1928).*

Invención a dos voces

o
Lo que dijo la Tortuga a Aquiles

por Lewis Carroll[2]

Aquiles había alcanzado a la Tortuga, y se sentó cómodamente sobre ella.

"¿Así que llegó al final de la pista?", dijo la Tortuga, "¿a pesar de que consiste en una serie infinita de distancias? Creía que algún sabihondo había probado que eso no podía ser."

"PUEDE ser", dijo Aquiles, "¡HA sido! *Solvitur ambulando.* Entenderá que las distancias han ido DISMINUYENDO en forma constante, y entonces. . ."

"¿Y si hubieran ido AUMENTANDO en forma constante?", interrumpió la Tortuga. "¿Qué pasaría?"

"Pasaría que yo no estaría aquí", respondió Aquiles en tono recatado, "y usted habría dado varias vueltas al mundo, entretanto."

"Usted me APLASTA —con sus elogios, quiero decir— ", dijo la Tortuga, "pues hay mucho peso en USTED, ¡sin NINGUNA duda! Bueno, ¿querría saber ahora de una pista que casi toda la gente cree poder recorrer en dos o tres pasos, pero que EN REALIDAD está formada por un número infinito de distancias, cada una de ellas más larga que la anterior?"

"¡Por cierto que sí!", dijo el guerrero griego, sacando de su casco (pocos griegos usaban BOLSILLOS en aquella época) un enorme cuaderno y un lápiz. "¡Adelante! Y hable lentamente, por favor. ¡LA TAQUIGRAFIA no ha sido inventada todavía!"

"¡Ese precioso Primer Postulado de Euclides!", susurró la Tortuga como en sueños. "¿Admira usted a Euclides?"

"¡Con pasión! Por lo menos, lo que uno PUEDE admirar un tratado que será escrito algunos siglos más adelante."

"Bien, tomemos ahora una pequeña parte de la demostración del Primer Postulado: sólo DOS pasos, y la conclusión que se extrae de ellos. Anote con cuidado en su cuaderno. Para referirnos adecuadamente a esos pasos y a la conclusión, los llamaremos A, B y Z:

A. Las cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí.
B. Los dos lados de este Triángulo son iguales a un tercero.
Z. Los dos lados de este Triángulo son iguales entre sí.

2 Lewis Carroll, "What the Tortoise Said to Achilles", *Mind*, n.e., 4 (1895), pp. 278-80.

Los lectores de Euclides admitirán, creo, que Z es la consecuencia lógica de A y B; entonces, ¿si uno acepta que A y B son verdaderos, DEBE aceptar que Z es verdadero?"

"¡Sin duda alguna! El alumno más torpe de una escuela secundaria —en cuanto se inventen las escuelas secundarias, dentro de unos dos mil años— estará de acuerdo."

"Y si algún lector NO acepta la veracidad de A y B, supongo que de todos modos puede aceptar que la SECUENCIA es VALIDA."

"Estoy seguro de que tal lector debe existir. Y podría pensar: 'acepto la veracidad de la Proposición Hipotética según la cual, si A y B son verdaderos, Z debe ser verdadero; pero NO acepto la veracidad de A y B.' Tal lector haría bien en olvidarse de Euclides y dedicarse al futbol."

"¿No podría haber asimismo un lector que dijera: 'acepto la veracidad de A y B, pero NO la Proposición Hipotética'?"

"Es claro que sí. También este lector debería dedicarse al futbol."

"¿Y NINGUNO de ambos lectores", prosiguió la Tortuga, "siente todavía necesidad lógica alguna de aceptar la veracidad de Z?"

"Así es", asintió Aquiles.

"Bien, ahora quiero que ME considere un lector del SEGUNDO tipo, y me fuerce lógicamente a aceptar la veracidad de Z."

"Una tortuga jugando al futbol. . .", empezó Aquiles.

". . .una anormalidad, por supuesto", lo interrumpió inmediatamente la Tortuga. "Nada de digresiones. Primero obtengamos Z, y luego pasemos al futbol."

"¿Debo forzarlo a aceptar Z?", dijo pensativamente Aquiles. "Y en este momento está dispuesta a aceptar que A y B son verdaderos, pero NO que la Hipotética lo sea. . ."

"Llamémosla C", dijo la Tortuga.

". . .entonces, usted no acepta que:

C. Si A y B son verdaderos, Z debe ser verdadero."

"Eso es", dijo la Tortuga.

"Por lo tanto, tengo que pedirle que acepte C."

"Así lo haré", dijo la Tortuga, "tan pronto como lo haya anotado en su cuaderno. ¿Qué más ha escrito en él?"

"Sólo unos pocos apuntes", dijo Aquiles, agitando nerviosamente las hojas, "unos pocos apuntes sobre. . . sobre las batallas en que me he distinguido."

"¡Todas las páginas en blanco, por lo que veo!", observó jovialmente la Tortuga. "¡Vamos a necesitar TODAS!" (Aquiles se estremeció.) "Ahora, escriba lo que le dicto:

A. Las cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí.
B. Los dos lados de este Triángulo son iguales a un tercero.

C. Si A y B son verdaderos, Z debe ser verdadero.
Z. Los dos lados de este Triángulo son iguales entre sí."

"Si acepta A, B y C, DEBE aceptar Z: esto tendría que ser llamado D, y aparecer en lugar de Z, INMEDIATAMENTE a continuación de los otros tres", dijo Aquiles.

"¿Y por qué?"

"Porque se sigue LOGICAMENTE. Si A y B y C son verdaderos, Z DEBE ser verdadero. No discutirá ESO, me imagino."

"Si A y B y C son verdaderos, Z DEBE ser verdadero", repitió pensativamente la Tortuga. "Se trata de OTRA Hipotética, ¿verdad? Y si yo no consiguiera percibir su veracidad, ¿podría aceptar A y B y C, pero negar Z?"

"Podría", admitió el candoroso héroe, "pero tal obtusidad sería fenomenal, sin duda. De todos modos, es un acontecimiento POSIBLE, por lo que debo pedirle que admita UNA Hipotética más."

"Perfectamente, lo haré con mucho gusto en cuanto lo anote. Lo llamaremos, pues,

D. Si A y B y C son verdaderos, Z debe ser verdadero.

¿Ya lo escribió en su cuaderno?"

"¡Sí!", exclamó gozosamente Aquiles, al tiempo que guardaba el lápiz en su estuche. "¡Y por fin llegamos al extremo de nuestra pista ideal! Puesto que acepta A y B y C y D, POR SUPUESTO acepta Z."

"¿Yo?", dijo inocentemente la Tortuga. "Aclaremos esto: Acepto A y B y C y D, pero suponga que TODAVIA me niego a aceptar Z."

"Entonces la Lógica debería oprimirle el gaznate, y OBLIGARLA a hacerlo", replicó Aquiles con voz victoriosa. "La Lógica le diría: 'Puede advertirlo sin ayuda, ¡puesto que ha aceptado A y B y C y D, DEBE aceptar Z!' Ya ve que no tiene alternativa."

"Cualquier cosa que la LOGICA se digne decirme merece ser ANOTADO", dijo la Tortuga, "así que escríbalo en su cuaderno, por favor. Lo llamaremos

E. Si A y B y C y D son verdaderos, Z debe ser verdadero.

Hasta que yo no haya aceptado ESTO, no tengo por qué aceptar Z: es un requisito completamente NECESARIO, ¿se da cuenta?"

"Me doy cuenta", dijo Aquiles, con algo de melancolía.

En este momento, el narrador fue reclamado por apremiantes problemas bancarios que lo obligaron a abandonar a la dichosa pareja durante varios meses. Cuando los volvió a encontrar, Aquiles continuaba sentado sobre la sufrida Tortuga, y escribía en su cuaderno, el cual daba la impresión de estar casi lleno. La Tortuga estaba diciendo: "¿Ha anotado

el último paso? Salvo que haya perdido la cuenta, es el número mil uno. Faltan algunos millones todavía. Y le pido un favor personal, ¿tendría a bien considerar qué cantidad de conocimientos aportará nuestro diálogo a los Lógicos del Siglo Diecinueve. . .? ¿Tendría a bien admitir un juego de palabras que mi prima, la Falsa Tortuga, inventará por entonces con el fin de atribuirle un nuevo epíteto? Será algo así como 'el héroe de los pies ligeros, rápidamente atortugado por la sabiduría'."

"Como quiera", respondió el fatigado guerrero, hundido ya en la desesperanza y sepultando el rostro entre sus manos, "con tal que me permita contestarle con un juego de palabras jamás compuesto por la Falsa Tortuga: '¡*Aquí-les* presento una tortuga que asesina con calma!'"

CAPITULO II

Significado y forma en matemática

LA *INVENCION A DOS VOCES* INSPIRO mis dos personajes. Del mismo modo que Lewis Carroll se permitió libertades con la Tortuga y el Aquiles de Zenón, yo me las tomé con la Tortuga y el Aquiles de Lewis Carroll. En el diálogo de éste, los mismos acontecimientos se van sucediendo una y otra vez, sólo que en cada oportunidad se sitúan en un nivel más alto que el anterior; esto es de una asombrosa analogía con el Canon en Perpetuo Ascenso de Bach. El diálogo carrolliano, pese a su agudeza, deja en pie un profundo problema filosófico: *¿Las palabras y los pensamientos están regidos, o no, por reglas formales?* Tal es el problema que se plantea este libro.

En este capítulo, y en el siguiente, examinaremos algunos otros sistemas formales. Esto nos abrirá una perspectiva mucho más amplia a propósito del concepto de sistema formal. Al finalizar estos dos capítulos, el lector tendrá una noción muy completa de las posibilidades con que cuentan los sistemas formales, y por qué interesan a los matemáticos y a los lógicos.

El sistema pq

El sistema formal de este capítulo es el que llamaremos *sistema pq*. No es de gran interés para los matemáticos o los lógicos, porque en realidad se trata simplemente de una invención mía. Su importancia reside, exclusivamente, en el hecho de que ilustra de manera muy satisfactoria muchas de las ideas básicas de este libro. El sistema pq cuenta con tres símbolos:

p q -

Es decir, las letras p y q, y el guión.

El sistema pq tiene una cantidad infinita de axiomas. Como no podemos enunciarlos todos, nos hace falta contar con una descripción de lo que son. En verdad, necesitamos algo más que una descripción de los axiomas: necesitamos un medio que nos indique si determinada cadena es o no un axioma. Una simple descripción de los axiomas puede brindar

una caracterización completa, pero al mismo tiempo endeble, de los mismos, tal como vimos que ocurría con el método de caracterización de teoremas en el sistema MIU. Queremos evitar la situación de estarse esforzando *durante* un lapso prolongado, quizá infinito, nada más que para descubrir si cierta cadena es un axioma o no. En consecuencia, vamos a definir los axiomas de manera tal que se disponga de un procedimiento de decisión evidente, capaz de determinar la axiomidad de las cadenas formadas por los símbolos p, q y guión.

DEFINICIÓN: *x*p-q*x*- es un axioma, siempre que *x* esté compuesto sólo por guiones.

Advierto que '*x*' debe representar la misma cadena de guiones las dos oportunidades en que aparece. Por ejemplo, --p-q--- es un axioma. La expresión '*x*p-q*x*-' no es un axioma, por supuesto (porque '*x*' no pertenece al sistema pq), sino más bien una matriz que moldea todos los axiomas; se la llama *esquema de axioma*.

El sistema pq tiene solamente una regla de producción:

REGLA: Supongamos que *x*, *y*, y *z* representan cadenas específicas formadas exclusivamente por guiones. Y supongamos que se sabe que *x*p*y*q*z* es un teorema. Luego, *x*p*y*-q*z*- es un teorema.

Por ejemplo: *x* vale '--', *y* vale '---', y *z* vale '-'. La regla nos indica que
Si --p---q- resulta ser un teorema, entonces
--p----q--, también lo será.

Tal como es característico de las reglas de producción, el enunciado establece una vinculación entre la teoremidad de ambas cadenas, pero no afirma la teoremidad de ninguna de las dos por sí mismas.

Un ejercicio sumamente útil para el lector consistirá en tratar de descubrir un procedimiento de decisión para aplicar a los teoremas del sistema pq. No es tarea difícil, si se la intenta durante un rato.

El procedimiento de decisión

Doy por sentado que el lector ya hizo el ensayo. En primer lugar, y aunque parezca demasiado obvio, quisiera puntualizar que todos los teoremas del sistema pq tienen tres grupos separados de guiones, y que los elementos de separación son únicamente una p, y una q, ubicadas en ese orden. (Esto se puede fundar en un razonamiento "heredado": se trata del mismo medio utilizado para probar que todos los teoremas del sistema MIU tenían que empezar con M.) Lo anterior significa que, considerando solamente su forma, podemos excluir cadenas como la siguiente: --p--p--p--q--------.

Ahora bien, destacar la frase "considerando solamente su forma" puede parecer una simpleza, pues ¿qué otra cosa hay en una cadena ade-

más de su forma?, ¿qué otra cosa cuenta con una función para determinar sus propiedades? Ninguna, sin duda. Empero, será necesario retener estas consideraciones cuando sigamos hablando de los sistemas formales, pues la noción de "forma" comenzará a hacerse más complicada y abstracta, y nos será preciso reflexionar con mayor detenimiento en el significado del término "forma". Como quiera que sea, llamaremos *cadena bien formada* a toda cadena que empiece con un grupo de guiones, tenga luego una p, seguida por un segundo grupo de guiones, luego una q, y por último otro grupo de guiones.

Volvamos al procedimiento de decisión. El criterio de teoremidad consistirá en que la suma de los dos primeros grupos de guiones deberá coincidir con la extensión del tercer grupo. Por ejemplo, --p--q---- es un teorema, porque 2 más 2 es igual a 4, en tanto que --p--q- no lo es, porque 2 más 2 no es igual a 1. Observando el esquema del axioma se percibe la razón por la cual éste es el criterio adecuado: es evidente que el esquema admite exclusivamente axiomas que satisfagan el criterio de adición. Asimismo, corresponde recordar la regla de producción: si la primera cadena satisface el criterio de adición, también lo hará la segunda e, inversamente, si la primera no satisface dicho criterio, tampoco lo hará la segunda. La regla convierte al criterio de adición en una propiedad hereditaria de los teoremas: todo teorema determina la presencia de la propiedad en sus descendientes. Esto muestra por qué es correcto el criterio de adición.

Por otra parte, existe una circunstancia que también nos permitiría decir con seguridad que el sistema pq cuenta con un procedimiento de decisión, aun sin haber descubierto todavía el criterio de adición. Se trata de que el sistema pq no sufre la complicación de reglas de *ampliación* y *reducción* creando tensiones opuestas: tiene nada más que reglas de ampliación. Un sistema formal que nos indique cómo elaborar teoremas más prolongados a partir de otros más breves, pero nunca lo inverso, es seguro que incluye un procedimiento de decisión aplicable a sus teoremas.

Supongamos que se nos pone delante una cadena cualquiera. Lo primero por hacer será verificar si es o no un axioma (estoy dando por supuesto que existe un procedimiento de decisión para la axiomidad, pues de otro modo no habría salida). Si es un axioma, es por definición un teorema, y no hace falta verificarlo. Pero supongamos que no es un axioma. Entonces, para ser un teorema, debe provenir de una cadena más breve, a través de la aplicación de alguna de las reglas. Repasando una a una las diversas reglas, es posible establecer con precisión no sólo las reglas que pueden haber producido la cadena, sino también, y en forma exacta, cuáles cadenas más breves están en condiciones de ser sus antecesoras dentro del "árbol genealógico". De este modo, el problema se "reduce" a la determinación de si alguna de las nuevas cadenas más cortas es un teorema. Cada una de estas últimas puede, a su vez, ser sometida a la misma verificación. Lo peor que puede ocurrir es una proliferación de cadenas por verificar, cada vez en mayor número y más breves.

Si se continúa en este retorno milimétrico, se logrará llegar muy cerca de la fuente de todos los teoremas: el esquema de axioma. Se puede avanzar indefinidamente hacia cadenas más breves; en consecuencia, o se descubre por último que una de las cadenas cortas aparecidas es un axioma, o se llega a un atolladero, donde ninguna de esas cadenas es un axioma, y ninguna de ellas puede ser reducida una vez más en el marco de alguna de las reglas, o de algún otro expediente de retorno. Esto indica que, en realidad, los sistemas formales dotados exclusivamente de reglas de ampliación no despiertan un gran interés; es el juego recíproco de reglas de ampliación y de reducción lo que otorga un atractivo especial a tales sistemas.

Abajo arriba *vs.* arriba abajo

El método anterior puede ser denominado un procedimiento de decisión *arriba abajo*, que contrasta con un procedimiento *abajo arriba*, del cual hablaré a continuación. Tiene cierto parecido con el método de generación de teoremas del sistema MIU seguido por el genio paciente, pero incluye un esquema de axioma que le agrega complejidad. Imaginemos un "saco", al que iremos arrojando los teoremas a medida que los produzcamos. Procederemos así:

1a. Arrojaremos el axioma posible más simple (-p-q--) dentro del saco.
1b. Aplicaremos la regla de inferencia al elemento anterior, y colocaremos el resultado dentro del saco.
2a. Arrojamos dentro del saco el axioma ubicado en segundo orden de simplicidad.
2b. Aplicamos la regla a todos los elementos metidos en el saco, al que arrojamos también los resultados.
3a. Arrojamos dentro del saco el axioma ubicado en tercer orden de simplicidad.
3b. Aplicamos la regla a todos los elementos metidos en el saco, al que arrojamos también los resultados, etc., etc.

Un instante de reflexión nos permitirá percatarnos de que, de esta manera, no podremos menos que producir todos los teoremas del sistema pq. Por otra parte, andando el tiempo el saco se llenará con teoremas cada vez más extensos, lo cual es también una consecuencia de la falta de reglas de reducción. Si se tiene una cadena en particular, como --p---q-----, cuya teoremidad quiere verificarse, basta con proceder de acuerdo a los pasos enumerados, examinando atentamente todas las cadenas que aparezcan. Si surge la que nos interesa, ¡albricias!, es un teorema. Si en deter-

minado momento, el elemento que debe ir al saco es más extenso que la cadena en cuestión, debemos desentendernos: no es un teorema.

Este procedimiento de decisión es señalado como de *abajo arriba* porque se mueve desde lo básico, es decir, los axiomas, mientras que el procedimiento anterior es de *arriba abajo* porque se desplaza en sentido inverso, hacia lo básico.

Los isomorfismos conducen a la significación

Nos dirigiremos ahora hacia el tema central de este capítulo, y por cierto del libro entero. Posiblemente ya se le haya ocurrido al lector que los teoremas pq son semejantes a sumas. La cadena --p---q----- es un teorema porque 2 más 3 es igual a 5. Se podría pensar inclusive que el teorema --p---q----- es un *enunciado*, escrito mediante una notación arbitraria, cuyo *significado* es que 2 más 3 son 5. ¿Es ésta una manera razonable de analizar las cosas? En realidad, debo decir que elegí deliberadamente 'p' para hacer presente 'más',* 'q' para hacer presente 'igual'. . .** Entonces, ¿la cadena --p---q----- en verdad *significa* "2 más 3 igual a 5"?

¿Qué nos podrá hacer percibir esto? Mi respuesta sería que hemos advertido un *isomorfismo* entre los teoremas pq y las sumas. En la Introducción, la palabra "isomorfismo" fue definida como una transformación destinada a conservar la información. Ahora podemos ingresar algo más profundamente en este concepto, y examinarlo desde otra perspectiva. La palabra "isomorfismo" es utilizada cuando dos estructuras complejas pueden ser proyectadas una sobre otra, de tal modo que cada parte de una de ellas tiene su parte correspondiente en la otra: "correspondiente" significa que ambas partes cumplen papeles similares en sus respectivas estructuras. Este empleo proviene de una noción más precisa, perteneciente a la matemática.

Un matemático se regocija cuando logra descubrir un isomorfismo entre dos estructuras previamente conocidas. Se trata a menudo de una "iluminación", y se convierte en fuente de asombro. La percepción de un isomorfismo entre dos estructuras ya conocidas es un avance significativo del conocimiento, y sostengo que tales percepciones son lo que genera *significaciones* en la mente humana. Una cosa más acerca de la percepción de isomorfismos: dado que estos últimos se presentan bajo muy diversas figuras y dimensiones, por decir así, no siempre es fácil estar seguro de haber descubierto un isomorfismo. En consecuencia, "isomorfismo" es una palabra caracterizada por toda la ambigüedad habitual de las palabras, lo cual es una carencia, pero también una ventaja.

* 'Plus', en el texto original. [T.]
** 'Equals', en el texto original. [T.]

En el presente caso, disponemos de un excelente prototipo del concepto de isomorfismo. Por una parte, hay un "nivel inferior" en nuestro isomorfismo, esto es, una proyección entre las partes de las dos estructuras:

p ⇐⇒ más
q ⇐⇒ igual a
- ⇐⇒ uno
-- ⇐⇒ dos
--- ⇐⇒ tres
etc.

Esta correspondencia entre palabra y símbolo tiene un nombre: *interpretación*.

Por otra parte, en un nivel más alto, se sitúa la correspondencia entre proposiciones verdaderas y teoremas. Pero debe tenerse muy en cuenta que esta correspondencia de nivel superior puede no ser advertida si no se establece previamente una interpretación de los símbolos. Sería más preciso, pues, hablar de correspondencia entre proposiciones verdaderas y teoremas *interpretados*. De todas maneras, hemos puesto de manifiesto una correspondencia entre dos órdenes, tal como es característico en todo isomorfismo.

Cuando uno se encuentra con un sistema formal del que no se conoce nada, con la esperanza de descubrir en él alguna significación recóndita, el problema es cómo asignar interpretaciones significativas a sus símbolos: en otros términos, cómo hacerlo de modo tal que surja una correspondencia de nivel superior entre proposiciones verdaderas y teoremas. Es posible que se lancen muchos puñetazos de ciego antes de hallar un conjunto satisfactorio de palabras que se relacionen con los símbolos. Es algo muy similar a los intentos por abrir una brecha en un código, o descifrar inscripciones en un idioma desconocido, como en el caso del Lineal B de Creta: la única forma de proceder es por la vía del ensayo y el error, bajo la guía de conjeturas fundadas. Cuando se hace una elección adecuada —una elección "significativa"—, las cosas empiezan súbitamente a ordenarse, y la tarea avanza con gran rapidez; muy pronto, todo se ubica en su lugar. La excitación que acompaña a una experiencia de esta clase ha sido bien reflejada por John Chadwick en *The Decipherment of Linear B*.

Pero no es frecuente, ni mucho menos, encontrarse en situación de "decodificar" un sistema formal aparecido en las excavaciones de una antigua civilización. Los matemáticos (y, desde hace poco tiempo, los lingüistas, los filósofos y algunos otros especialistas) son los únicos que utilizan sistemas formales, e invariablemente se ajustan a una interpretación, asociada a los sistemas formales que emplean y difunden. Su propósito es establecer un sistema formal cuyos teoremas reflejen, isomórficamente,

algún segmento de la realidad. La elección de los símbolos, por ende, reconoce una fuerte motivación en estos casos, como se lo ve en la adopción de reglas tipográficas de producción. Tal fue mi actitud cuando ideé el sistema pq. Está a la vista por qué elegí determinados símbolos: no es casual que los teoremas del sistema pq sean isomórficos con respecto a las sumas, puesto que opté deliberadamente por una forma que las reflejase tipográficamente.

Interpretaciones significativas y no significativas

El lector puede optar por intepretaciones distintas a la mía. No necesita conseguir que cada teorema resulte verdadero, pero no habría motivo para elaborar una interpretación donde, digamos, todos los teoremas resulten falsos; menor fundamento, aun, tendría una interpretación bajo la cual no haya correlación alguna, ni positiva ni negativa, entre teoremidad y veracidad. En consecuencia, cabe distinguir entre dos tipos diferentes de interpretación. En primer lugar, podemos encontrarnos con una interpretación *no significativa*, bajo la cual no se advierte la menor asociación isomórfica entre los teoremas del sistema y la realidad. Tales interpretaciones abundan: cualquier elección hecha enteramente al azar corresponderá a este tipo. Por ejemplo, tomemos la siguiente:

p ⇐⇒ caballo
q ⇐⇒ feliz
- ⇐⇒ manzana

Tenemos así una nueva interpretación para -p-q--: "manzana caballo manzana feliz manzana manzana"; una expresión poética que quizá interese a los caballos, y que hasta podría inclinarlos en favor de este modo de interpretar las cadenas pq. Lamentablemente, esta interpretación tiene muy escasa "significación"; bajo la interpretación, los teoremas no dan la impresión de ser más verdaderos, o más aceptables, que los no teoremas. Un caballo puede gustar de "feliz feliz feliz manzana caballo" (correspondiente a qqq-p) casi tanto como de un teorema interpretado.

Llamaremos *significativa* a la segunda clase de interpretación. Bajo ésta, los teoremas y las verdades se corresponden: es decir, existe isomorfismo entre los teoremas y determinada porción de la realidad. Es por ello que conviene distinguir entre *interpretaciones* y *significados*. Cualquier palabra podía haber sido adoptada como interpretación de 'p', pero adopté "más" porque es la única elección *significativa* en la que puedo pensar. En síntesis, el significado de 'p' parece ser 'más', pese a que sea posible un millón de interpretaciones diferentes.

Significados activos *vs.* pasivos

Es probable que lo más importante de este capítulo, para quienes lo comprendan acabadamente, sea lo siguiente: el sistema pq parece obligarnos a reconocer que los *símbolos de un sistema formal, aunque inicialmente carezcan de significado, no pueden evitar el asumir alguna clase de "significado", en cuanto se descubre un isomorfismo*. Ahora bien, hay una diferencia muy grande entre el significado relativo a un sistema formal, y el vinculado al lenguaje: cuando hemos aprendido el significado de una palabra dentro de un idioma dado, pasamos a elaborar nuevos enunciados basados en aquél. Hasta cierto punto, el significado se convierte en *activo*, ya que actúa como una nueva regla de creación de frases. Esto quiere decir que nuestro dominio del idioma no se asemeja a un producto terminado: las reglas de elaboración de frases se multiplican en la medida en que aprendemos nuevos significados. En un sistema formal, en cambio, los teoremas son definidos *a priori* por las reglas de producción. Podemos elegir "significados" que se funden en un isomorfismo (si nos es posible encontrarlo) entre teoremas y proposiciones verdaderas, pero ello no nos autoriza a extender el campo, agregando nuevos teoremas a los ya establecidos: el Requisito de Formalidad, en el Capítulo I, nos previene precisamente acerca de esto.

En el sistema MIU, por supuesto, no había motivo para sentir la tentación de ir más allá de las cuatro reglas, porque no se buscó ni se descubrió ninguna interpretación. Pero aquí, en nuestro nuevo sistema, los "significados" recién hallados para cada símbolo pueden llevarnos a pensar que la cadena

--p--p--p--q--------

es un teorema. Cuando menos, uno puede *desear* que esta cadena sea un teorema, pero eso no cambia el hecho de que no lo es. Y también constituiría un serio error pensar que "debe" ser un teorema, sólo porque 2 más 2 más 2 más 2 es igual a 8. Tampoco sería correcto atribuirle algún significado, puesto que no es una cadena bien formada, y nuestra interpretación significativa procede exclusivamente de la observación de cadenas bien formadas.

En un sistema formal, el significado debe permanecer *pasivo*; podemos leer cada cadena siguiendo los significados de los símbolos que la integran, pero no estamos facultados para crear nuevos teoremas sobre la única base de los significados que hemos asignado a los símbolos. Los sistemas formales interpretados se ubican en la frontera que separa a los sistemas sin significado de los sistemas con significado: puede pensarse de sus cadenas que "expresan" cosas, pero es imprescindible tener en cuenta

que ello ocurre exclusivamente como consecuencia de las propiedades formales del sistema.

¡Double entendre!

Y ahora, quiero destruir cualquier ilusión que se haya forjado en el sentido de haber descubierto *los* significados de los símbolos del sistema pq. Consideremos la siguiente correlación:

p ⇐⇒ igual a
q ⇐⇒ restado de
- ⇐⇒ uno
-- ⇐⇒ dos
etc.

Así, --p---q----- recibe una interpretación nueva: "2 igual a 3 restado de 5". Se trata por supuesto de una proposición verdadera; todos los teoremas resultarán verdaderos bajo esta nueva interpretación, la cual, por otra parte, es casi tan significativa como la anterior. Pero, "¿cuál es *el* significado de la cadena?" Una interpretación es significativa en la medida en que manifiesta con precisión determinado isomorfismo asociado al mundo real. Cuando aspectos diferentes del mundo real son isomórficos entre sí (en este caso, la suma y la resta), un solo sistema formal puede ser isomórfico con respecto a ambos aspectos mencionados, y asumir en consecuencia dos significados pasivos. Esta clase de doble valor en símbolos y cadenas constituye un fenómeno de la mayor importancia. En este momento parecerá trivial, caprichoso, inoportuno, pero cuando lo retomemos dentro de contextos más complejos aportará una gran riqueza de ideas.

Lo que sigue es un resumen de nuestras observaciones acerca del sistema pq. Bajo cualquiera de las dos interpretaciones significativas dadas, toda cadena bien formada tiene como contrapartida una afirmación gramatical; algunas cadenas son verdaderas, otras falsas. Una *cadena bien formada*, dentro de los sistemas formales, es aquella que, al ser interpretada símbolo por símbolo, produce oraciones *gramaticales*. (Se sobrentiende que esto último depende de la interpretación que se siga, pero por lo común se aplica un patrón determinado.) Dentro de las cadenas bien formadas, aparecen los teoremas. Estos son definidos por un esquema de axioma y una regla de producción. Mi propósito, cuando ideé el sistema pq, fue imitar la suma: cada teorema debía expresar una suma verdadera, sujeta a interpretación; inversamente, toda suma verdadera de dos enteros positivos debía poderse traducir, de manera precisa, en forma de cade-

na, la cual sería así un teorema. Tal propósito fue conseguido; tómese nota, por ende, de que toda suma falsa —como "2 más 3 igual a 6"— es traducible a cadenas que estarán bien formadas, pero que no son teoremas.

Sistemas formales y realidad

El anterior es nuestro primer ejemplo de un caso donde un sistema formal se fundamenta en un segmento de la realidad, y parece reproducirla a la perfección, ya que sus teoremas son isomórficos respecto a las verdades concernientes a esa parte de la realidad. No obstante, la realidad y los sistemas formales son independientes entre sí. Nadie necesita tener presente que hay un isomorfismo entre ambos. Cada una de estas esferas se sostiene por sí misma: uno más uno es igual a dos, sepamos o no que -p-q-- es un teorema; y -p-q-- sigue siendo un teorema aunque no lo asociemos con la adición.

Es improbable que la aplicación de este sistema formal, o de cualquier otro, arroje nuevas luces sobre la veracidad, en el campo de su interpretación; por cierto, el hecho de producir teoremas pq no nos hace aprender sumas nuevas. Sin embargo, sí hemos aprendido algo acerca de la naturaleza de la adición, vista como un proceso, a saber: que se la puede figurar con facilidad mediante una regla tipográfica que rige símbolos sin significación. Esto no es muy sorprendente, tratándose de una operación tan simple como la suma; con frecuencia se dice que es factible aprehender la adición observando los mecanismos giratorios de una caja registradora.

De todos modos, queda claro que hemos rasguñado enérgicamente la superficie, en la medida en que los sistemas formales lo permiten; es natural preguntarse qué porción de la realidad puede ser imitada, en su comportamiento, por un conjunto de símbolos sin significación, gobernados por reglas formales. ¿Será posible transformar toda la realidad en sistema formal? Pareciera que, en un sentido muy amplio, puede responderse afirmativamente: es posible sugerir, por ejemplo, que la realidad no es, en sí misma, más que un sistema formal extremadamente complicado. Sus símbolos no se diseminan sobre un papel sino, todo lo contrario, dentro de un vacío tridimensional (espacio): son las partículas elementales que dan su composición a todas las cosas. (Suposición implícita: que hay una finalidad en la sucesión descendente de la materia, de modo que la expresión "partículas elementales" tiene sentido.) Las "reglas tipográficas" son aquí las leyes de la física, las cuales nos dicen cómo proceder, dadas la posición y la velocidad de todas las partículas en un momento determinado, para modificar esos valores y dar lugar a un nuevo conjunto de posiciones y velocidades, propios del momento "siguiente".

Luego, los teoremas de este gran sistema formal serían las configuraciones posibles que asumen las partículas en diferentes instantes de la his-

toria del universo. El único axioma es (*era*, quizá) la configuración original de todas las partículas "en el principio de los tiempos".

Sin embargo, esta concepción tiene dimensiones tan colosales que su interés es únicamente especulativo; además, la mecánica cuántica (y otros sectores de la física) plantean al respecto algunas dudas, que se extienden inclusive a las presuntas potencialidades teóricas de la idea. Básicamente, nos estamos preguntando si el universo actúa en forma determinista, lo cual sigue siendo un problema abierto.

Matemática y manipulación simbólica

En vez de abordar un campo tan gigantesco, limitaremos nuestro "mundo real" a la matemática. Lo primero que surge en este caso es un serio interrogante: luego de modelar un sistema formal relativo a cierta porción de la matemática, ¿cómo estar seguros de haber procedido correctamente, en especial si no estamos totalmente familiarizados con esa parte de la matemática? Supongamos que el objetivo del sistema formal es aportarnos nuevos conocimientos en esa disciplina, ¿cómo sabremos que la interpretación de cada teorema es verdadera, a menos que hayamos probado que el isomorfismo es perfecto?, ¿y cómo probaremos que el isomorfismo es perfecto, si no contamos desde el comienzo con un conocimiento total acerca de las verdades de la disciplina?

Supongamos que en una excavación, no importa en qué sitio, hemos descubierto un misterioso sistema formal. Intentaríamos diversas interpretaciones del mismo, y quizá tuviéramos la suerte de hallar una que, aparentemente, consiga que todo teorema resulte verdadero, y todo no teorema, falso. Pero esto es algo que sólo podríamos verificar directamente en un número finito de casos. Lo más probable es que la cantidad de teoremas sea infinita. Así, ¿cómo *sabremos* que todos los teoremas expresan verdades bajo esta interpretación, salvo que conozcamos todo lo que hay que conocer acerca del sistema formal, y también del ámbito de interpretación correspondiente?

En alguna medida, se plantea esta singular situación siempre que intentamos correlacionar la realidad de los números naturales (es decir, los enteros no negativos: 0, 1, 2, . . .) con los símbolos tipográficos de un sistema formal. Vamos a hacer ahora un esfuerzo para comprender qué relación existe entre lo que llamamos "verdad" en teoría de los números, y lo que nos es posible obtener a través de la manipulación de los símbolos.

Por ello, nos remitiremos someramente a los fundamentos para estar en condiciones de clasificar como verdaderos a algunos enunciados de teoría de los números, y a otros como falsos. ¿Cuánto es 12 veces 12? Cualquiera sabe que 144, pero, ¿cuántos, de entre quienes dan esa respuesta, han diseñado alguna vez en su vida un rectángulo de 12 por 12, y contado luego

los cuadraditos interiores? La mayor parte, seguramente, considerará innecesaria semejante tarea, ofreciendo como prueba, en cambio, unos pocos trazos sobre un papel; los siguientes:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{\times 12} \\ 24 \\ \underline{12} \\ 144 \end{array}$$

Y ésta sería la "demostración". Prácticamente todo el mundo está convencido de que, si se cuentan los cuadraditos, habrá 144; son muy pocos los que experimentan dudas acerca de este resultado.

El conflicto entre ambos puntos de vista se hace más agudo si nos formulamos el problema de determinar el valor de 987654321 × 123456789. En primer lugar, es virtualmente imposible construir un rectángulo adecuado y, lo que es más grave, aun cuando se lo pudiera diseñar harían falta ejércitos de personas, trabajando durante siglos, para contar todos los cuadrados; pese a todo, solamente alguien muy crédulo aceptaría el resultado así obtenido. Muy probablemente, en alguna parte, de alguna manera, se haya hecho un pequeño intento de esta índole.

¿Es posible conocer la respuesta al presente problema? Si se tiene confianza en el proceso simbólico que se traduce en la manipulación de los dígitos con arreglo a ciertas reglas sencillas, la contestación a la pregunta anterior es afirmativa. Este proceso es presentado a los alumnos de las escuelas como un artificio que permite obtener resultados correctos; muchos de estos alumnos, absorbidos por las operaciones, no advierten la armonía, y tampoco la razón, de ese proceso. Las leyes de derivación de dígitos mediante la multiplicación se basan, principalmente, en unas pocas propiedades de la suma y de la multiplicación, de las cuales se da por supuesto que son aplicables a todos los números.

Las leyes básicas de la aritmética

La clase de supuesto de que hablo es la ilustrada más abajo. Podemos figurarnos que diseminamos algunas barras:



Luego las contamos, y al mismo tiempo invitamos a otra persona a contarlas también, pero comenzando por el extremo opuesto. ¿Es seguro que se obtendrá el mismo resultado? La respuesta que surge de un proceso de cálculo es independiente del modo en que se lo realice. Esto constituye,

en rigor, un supuesto relativo a dicho proceso, y tiene un carácter tan básico que carecería de sentido dedicarse a probarlo: se lo acepta o no, pero en este último caso una demostración no contribuiría en nada.

A partir de esta clase de supuesto se llega a la conmutatividad y a la asociatividad de la adición (es decir, respectivamente, que $b + c = c + b$, y que $b + (c + d) = (b + c) + d$, siempre, en ambos casos). El mismo supuesto puede conducirnos a la conmutatividad y a la asociatividad de la multiplicación: basta pensar en muchos cubos reunidos de manera de formar un gran cuerpo sólido rectangular. La conmutatividad y la asociatividad de la multiplicación consisten simplemente en el supuesto de que, si se hace girar en diferentes direcciones dicho cuerpo, la cantidad de cubos seguirá siendo la misma. Pero tal supuesto no es verificable en todos los casos, porque el número de éstos es infinito. Los damos por demostrados, con la convicción más profunda que se pueda concebir (en el caso de que alguna vez se nos ocurra pensar en ello). La suma de dinero que llevamos en el bolsillo no se modifica cuando caminamos por la calle, empujándonos con otra gente; el número de libros que poseemos no se modifica aunque los empaquemos en una caja, los subamos a un automóvil, los traslademos cien kilómetros más allá, descarguemos la caja, los desempaquemos, y los ubiquemos en nuevos anaqueles. Todo esto forma parte de lo que queremos significar cuando decimos *número*.

Hay cierto tipo de personas que, ni bien es formulado algún hecho innegable, halla divertido abocarse a mostrar por qué ese "hecho" es, después de todo, falso. Pertenezco a ese tipo, y tan pronto enuncié los ejemplos anteriores acerca de barras, dinero y libros, imaginé situaciones donde tales ejemplos se equivocan. Puede que el lector haya hecho otro tanto. De este modo, mostraremos que los números como abstracciones, en verdad, son por entero diferentes de los números que utilizamos en la vida cotidiana.

La gente gusta de inventar expresiones que violan las bases de la aritmética, pero que son capaces de ilustrar verdades "más profundas", como se puede ver en "1 y 1 hacen 1" (referido a un par de enamorados), o en "1 más 1 más 1 es igual a 1" (la Trinidad). Es fácil advertir fallas en estas expresiones: por ejemplo, que la utilización del término "+" es inadecuada en ambos casos. Pero los casos semejantes abundan. Dos gotas de lluvia, sobre el cristal de una ventana, se unen; ¿es válido ahora decir que uno más uno es igual a uno? Y cuando una nube se separa en dos, ¿no evidencia lo mismo? No resulta fácil en absoluto distinguir con precisión entre aquellos casos donde lo que está sucediendo puede ser llamado "suma", y aquellos otros donde se necesita otra palabra. Si uno reflexiona sobre este problema, es probable que se decida por algún criterio de diferenciación de los objetos en el espacio, apto para asegurar la separación de cada uno de ellos con respecto a todos los demás. Pero entonces, ¿cómo contar las ideas?, ¿o el número de gases que contiene la atmósfera? Si se las busca, no es arduo encontrar en distintas fuentes afirmaciones como:

"En la India hay 17 idiomas y 462 dialectos". Enunciaciones tan precisas encierran un toque de extrañeza, si se tiene en cuenta que no hay límites exactos entre "idioma" y "dialecto".

Números ideales

Los números son reacios a comportarse satisfactoriamente como realidades. Sin embargo, existe la vieja e innata creencia, en el común de la gente, de que no están obligados a hacerlo. Hay algo nítido y puro en la noción abstracta de número, al alejarla de sumas, gotas, nubes o dialectos. Tiene que haber un modo de hablar de los números evitando el recurso rudimentario de apelar a la intromisión de la realidad.

Las muy precisas reglas que rigen los números "ideales" constituyen la aritmética, y sus extensiones más avanzadas han dado lugar a la teoría de los números. No hay más que una sola pregunta pertinente acerca del tránsito desde los números como cosas prácticas, hacia los números como cosas formales: una vez que hemos resuelto tratar de encapsular la teoría de los números íntegra en un sistema ideal, ¿nos será realmente posible cumplir por completo la tarea?. ¿los números son tan puros, cristalinos y armoniosos que su naturaleza puede ser enteramente encuadrada por las reglas de un sistema formal? *Liberación* (figura 13), una de las más bellas obras de Escher, presenta un prodigioso contraste entre lo formal y lo informal, vinculados por una fascinante zona de transición. ¿Los números son tan libres como los pájaros?, ¿sufren igual que ellos al ser sometidos a un sistema de reglas imperativas?, ¿existe una zona de transición mágica entre los números de la realidad y los números trazados sobre papel?

Cuando hablo de las propiedades de los números naturales, no me estoy refiriendo a propiedades tales como la suma de dos enteros determinados. Esta puede ser establecida mediante el cálculo, y nadie que pertenezca a este siglo pone en duda la posibilidad de mecanizar procesos como contar, sumar, multiplicar, etc. A lo que aludo es a la clase de propiedades que los matemáticos se interesan por investigar, buscando respuestas que el proceso de cálculo —ni siquiera en el plano teórico— puede proveer. Veamos un ejemplo clásico de estas propiedades de los números naturales, analizando la afirmación "hay una cantidad infinita de números primos": en primer lugar, no existe proceso de cálculo alguno capaz de confirmar o refutar tal afirmación: todo lo que podemos hacer es dedicar un tiempo a contar los números primos, para luego conceder que hay "un montón" de ellos. Ningún esfuerzo de cálculo resolverá la cuestión de si la cantidad de primos es finita o infinita; la cuenta nunca estaría completa.

La proposición conocida como "Teorema de Euclides" (obsérvese la mayúscula "T") no tiene nada de obvio, en absoluto. Puede parecer razonable, o interesante, pero no obvia. Aun así, los matemáticos posteriores a Euclides siempre la han reputado verdadera, ¿por qué motivo?



Figura 13. Liberación, *de M. C. Escher (litografía, 1955).*

El motivo es que el *razonamiento* se los dice. Razonaremos, pues, siguiendo una variante de la demostración de Euclides. Esta muestra que si se elige un número, cualquiera sea, habrá un primo que es mayor. Elijamos un número: N; multipliquemos después todos los enteros positivos entre sí, empezando por la unidad y terminando en N. En otras palabras, formamos el factorial de N, cuya simbolización es "$N!$". El producto obtenido es divisible por todos los números incluidos en la serie. Si a $N!$ se le suma 1, el resultado

> no puede ser múltiplo de 2 (porque cuando se divide por 2, el resto es 1);
> no puede ser múltiplo de 3 (porque cuando se divide por 3, el resto es 1);
> no puede ser múltiplo de 4 (porque cuando se divide por 4, el resto es 1);
>
> no puede ser múltiplo de N (porque cuando se divide por N, el resto es 1).

Dicho de otro modo, $N! + 1$ únicamente es divisible por números mayores que N, en caso que sea divisible por números distintos a la unidad y a sí mismo. De modo que, o N es primo, o sus divisores primos son mayores que él. Y, en cualquiera de ambos casos, hemos mostrado que tiene que existir un primo por encima de N. El proceso sigue siendo el mismo sea cual fuere el valor de N: siempre habrá un primo de valor mayor. Y así acaba la demostración de la infinitud de los primos.

Señalemos, por otra parte, que el último paso es llamado *generalización;* lo volveremos a encontrar más adelante, dentro de un contexto más formalizado. Consiste en desarrollar una demostración, tomando como base un número determinado (N), y luego establecer que N carece de especificidad, por lo que la demostración se generaliza.

La prueba de Euclides es característica de lo que constituye la "matemática real". Es, además, simple, precisa y bella. Enseña que, cuando se parte de un punto en particular, es posible recorrer un largo camino a través de etapas relativamente cortas. En nuestro caso, los puntos de partida están dados por ciertas nociones básicas relativas a la multiplicación, la división, etc. Las breves etapas son los pasos que sigue el razonamiento. Y, a pesar de que cada uno de estos pasos parece obvio, el resultado final no lo es. Nos es imposible verificar de modo directo la veracidad de la proposición; no obstante, le damos fe, porque confiamos en el razonamiento se-

guido. Si aceptamos razonar, parecería que no nos queda alternativa; si hemos estado de acuerdo con cada paso dado por Euclides, tendremos que estar de acuerdo con la conclusión que formula. Y éste es un hecho muy feliz, porque significa que los matemáticos siempre coincidirán en reputar "verdaderas" a ciertas proposiciones, y "falsas" a ciertas otras.

Esta demostración es ejemplo de un proceso sistemáticamente ordenado: cada aserción se relaciona de manera inevitable con las anteriores. Por eso es calificada como "prueba", y no como "evidencia suficiente". En matemática, el propósito perseguido es siempre aportar una prueba rigurosa en sustento de las proposiciones que no son obvias. La circunstancia misma de que los pasos estén articulados por medio de una sucesión rigurosa parece sugerir la existencia de una *estructura modelada* para eslabonar entre sí las distintas aserciones. Esta estructura puede ser expuesta más adecuadamente a través de un vocabulario específico —un vocabulario convencional, consistente en símbolos—, apto solamente para expresar afirmaciones relativas a números. De tal forma, podremos examinar la prueba en su versión traducida. Se tratará de un conjunto de enunciados cuya correspondencia, establecida línea por línea, estará formulada de modo aprehensible. Pero los enunciados, puesto que serán representados por un conjunto pequeño convencional de símbolos, asumirán la apariencia de *modelos*. En otros términos: aun cuando al ser leídos en voz alta impresionen como aserciones acerca de números y las propiedades de éstos, al ser analizados sobre una hoja de papel tendrán forma de modelos abstractos, y la estructura sistemática de la prueba puede comenzar a asemejarse a una lenta transformación de modelos, regida por la aplicación de unas pocas reglas tipográficas.

Soslayando el infinito

Aunque la prueba de Euclides demuestra que *todos* los números están dotados de cierta propiedad, rehúye tratar separadamente cada uno de los infinitos casos cubiertos por la demostración. Alude a ellos utilizando frases como "cualquiera sea N", o bien "sea cual fuere el valor de N". Podríamos desarrollar de nuevo la prueba empleando la expresión "todo N". Si se conoce el contexto pertinente, y la manera correcta de usar las expresiones anteriores, no será necesario abordar una cantidad infinita de casos, sino solamente dos o tres conceptos, entre ellos el de "todo". Éste, en sí mismo finito, abarca sin embargo una infinitud; mediante su empleo, dejamos a un lado la circunstancia evidente de que hay un número infinito de hechos que necesitaríamos probar.

Aplicamos la palabra "todo" a través de unas pocas formas, las cuales son definidas por el proceso de razonamiento establecido; es decir, hay

reglas que gobiernan tal aplicación. Puede que no seamos conscientes de ello, y que creamos operar sobre la base del *significado* de dicha palabra; sostener esto último, empero, no es sino un rodeo para manifestar que somos guiados por reglas que en ningún momento explicitamos. Durante toda nuestra existencia, hemos empleado palabras reguladas por determinados modelos, pero en lugar de llamar "reglas" a los modelos, atribuimos el curso de nuestros procesos de pensamiento al "significado" de las palabras. Reconocer esto ha implicado un descubrimiento primordial en el largo camino hacia la formalización de la teoría de los números.

Si analizáramos más profundamente la demostración de Euclides, veríamos que está compuesta por muchos y muy pequeños pasos: casi infinitesimales. Si los formuláramos todos, línea por línea, la demostración se convertiría en algo enormemente complicado. Hay mayor claridad para nuestro entendimiento cuando diversos pasos son reunidos en uno, dando lugar a un solo enunciado. Asimismo, al emprender el examen despacioso de la prueba, comenzamos a distinguir estructuras individuales en su interior. Dicho de otra forma, la disección puede avanzar hasta allí, y permitirnos así captar la naturaleza "atómica" del proceso de razonamiento. Una demostración puede ser fragmentada en una serie de saltos minúsculos pero discontinuos, que parecen discurrir con fluidez cuando son observados desde una posición ventajosa. En el Capítulo VIII, mostraremos un modo de descomponer la demostración en unidades atómicas, y veremos qué extraordinaria cantidad de pasos son englobados. Pero quizá esto no sea sorprendente. Cuando Euclides ideó su prueba, las operaciones producidas en su cerebro seguramente movilizaron millones de neuronas (células nerviosas), muchas de las cuales habrán entrado en actividad centenares de veces en sólo un segundo. La simple formulación de una frase activa centenares de miles de neuronas. Como los pensamientos de Euclides fueron altamente complejos, se justifica que su demostración contenga una cantidad colosal de pasos. (Puede que sea escasa la vinculación directa entre la actividad neuronal del cerebro de Euclides, y una prueba en nuestro sistema formal, pero las complejidades de ambos son comparables. Es como si la naturaleza exigiera no olvidar la complejidad de la prueba relativa a la infinitud de los primos, a pesar de que los sistemas respectivos sean muy diferentes entre sí.)

En los capítulos venideros, expondremos un sistema formal que, 1) incorpora un vocabulario convencional que permite formular todos los enunciados atinentes a los números naturales, y 2) cuenta con reglas que corresponden a todos los tipos de razonamiento que se consideren necesarios. Un interrogante de la mayor importancia será el de si las reglas que estableceremos para guiar la manipulación simbólica tienen en realidad las mismas potencialidades (dentro del marco de la teoría de los números) que nuestras facultades habituales de razonamiento, o bien si, de manera más genérica, es teóricamente posible igualar el nivel de nuestras capacidades mentales, a través del empleo de un sistema formal.

Sonata
Para solo de Aquiles

Suena el teléfono; Aquiles levanta el receptor.

Aquiles: Sí; habla Aquiles.
Aquiles: Hola, señora T, ¿cómo le va?
Aquiles: ¿Tortícolis? Oh, cuánto lo lamento. ¿Tiene idea de cómo se le produjo?
Aquiles: ¿Cuánto estuvo en esa posición?
Aquiles: Bueno, no es para sorprenderse de que esté rígida, entonces. ¿Y qué cosa pudo inducirla a torcer su cuello de esa forma, durante tanto tiempo?
Aquiles: ¿Pasmosos?, ¿de qué clase, por ejemplo?
Aquiles: ¿Qué quiere usted decir con "bestias fantasmagóricas"?

Figura 14: Mosaico II, *de M. C. Escher (litografía, 1957).*



Aquiles: ¿No era espantoso tener tantos enfrente al mismo tiempo?

Aquiles: ¡¿Una guitarra?! ¿Eso fue lo que se le ocurrió en medio de todos esos seres horripilantes? Dígame, ¿toca usted la guitarra?

Aquiles: Oh, está bien, me da lo mismo.

Aquiles: Tiene razón; no sé por qué no me fijé nunca en esa diferencia entre violines y guitarras. Hablando de violines, ¿le gustaría venir a escuchar una de las sonatas para solo de violín de su autor preferido, J. S. Bach? Acabo de comprar una magnífica grabación. Estoy impresionado con la forma en que Bach se basó en un solo violín para crear una obra tan interesante.

Aquiles: ¿Así que se siente como catatónica, todavía? Lástima. Debería irse a la cama.

Aquiles: Me imagino. ¿Trató de contar ovejas?

Aquiles: Oh, oh, ya veo, sí; comprendo perfectamente lo que me quiere decir. Bueno, si ESO la perturba, quizá sería mejor que me lo contara, y me permitiera tratar de ayudarla, además.

Aquiles: Una palabra que tenga en su interior, y consecutivas, las letras 'T', 'A', 'T', 'O', 'N', 'I'. ¿Qué le parece "atónita"?

Aquiles: Es cierto, no cumple exactamente con las reglas, tendré que pensar otra.

Aquiles: ¿Horas y horas? Parece que me metí en un complicado acertijo. ¿Dónde aprendió este rompecabezas infernal?

Aquiles: ¿Me dice usted que él parecía entregado a la meditación de esotéricos temas budistas, pero que en realidad estaba pensando en acertijos con palabras intrincadas?

Aquiles: ¡Ajá! . . . el caracol sabía lo que este tipo tramaba. ¿Pero cómo llegó usted a hablar con el caracol?

Aquiles: Oiga, escuché una vez un acertijo verbal un poquito parecido al suyo. ¿Se lo digo? ¿O la haría sentirse más perturbada todavía?

Aquiles: Es claro . . . No puede hacerle daño. Ahí va: ¿cuál es una palabra de cinco sílabas, cuya primera sílaba es 'CA' y cuya última sílaba, fíjese usted, también es 'CA'.

Aquiles: Muy ingenioso . . . pero hay un poco de trampa. ¡No es la respuesta que tengo prevista!

Aquiles: Por supuesto que acertó usted . . . eso satisface los requisitos, pero es una suerte de solución "pervertida". Yo pensaba en otra respuesta.

Aquiles: ¡Exactamente! ¿Cómo la encontró tan rápido?

Aquiles: Pues éste es un caso donde sentirse algo catatónica puede haberle ayudado, en lugar de afectarla. ¡Excelente! Pero sigo en la oscuridad a propósito de su enigma "TATONI".

Aquiles: ¡Felicitaciones! Quizá pueda usted dormir ahora. Así que dígame, ¿cuál ES la solución?

Aquiles: Bueno, por lo común prefiero arreglarme sin sugerencias, pero me convence usted, ¿cuál es?

Aquiles: No sé qué quiere usted significar con "figura" y "campo" en este caso.

Aquiles: ¡Seguramente que conozco *Mosaico II*! Conozco TODAS las obras de Escher; por algo es mi pintor predilecto. Y tengo una reproducción de *Mosaico II* sobre la pared, perfectamente a la vista desde aquí.

Aquiles: Sí, veo los animales oscuros.

Aquiles: Sí, también veo cómo su "espacio negativo" —el que los rodea— define a los animales claros.

Aquiles: ¿Así que a ESO llama usted "figura" y "campo"? ¿Y qué tiene que ver con el acertijo "TATONI"?

Aquiles: Oh, esto es demasiado enmarañado para mí. Creo que me estoy empezando a sentir algo catatónico.

Aquiles: ¿Que desea venir ahora? Fíjese, me parece . . .

Aquiles: Muy bien. Quizá resuelva entretanto SU acertijo, con la ayuda de su insinuación acerca de figura-campo, relacionándola con MI acertijo.

Aquiles: Me complace que usted me escuche tocar.

Aquiles: ¿Ha inventado usted una teoría sobre eso?

Aquiles: ¿Acompañado por qué instrumento?

Aquiles: Pues, si es así, parece un poco extraño que él no haya escrito la parte del clavicordio, para hacerla conocer junto con la otra.

Aquiles: Entiendo . . . algo así como un atractivo opcional. Uno puede escucharla de las dos maneras . . . con o sin acompañamiento. ¿Pero cómo puede uno saber de qué modo se ha previsto que suene el acompañamiento?

Aquiles: Ah, sí, supongo que, después de todo, más vale dejarlo librado a la imaginación de quien va a escuchar. Y a lo mejor, como dice usted, Bach jamás pensó para nada en ninguna clase de acompañamiento. Por cierto que esas sonatas parecen estar muy bien como están.

Aquiles: Correcto. Bueno, la espero.

Aquiles: Hasta luego, señora T.

CAPITULO III

Figura y campo

Primos *vs.* compuestos

LA IDEA DE QUE LOS CONCEPTOS pueden ser capturados por la sola acción de manipulaciones tipográficas despierta la curiosidad. El único concepto aprehendido hasta ahora ha sido el de adición, lo cual puede no haber parecido muy extraño. Supongamos, en cambio, que se planeara crear un sistema formal con teoremas de la forma P*x*, donde la letra '*x*' representa una cadena de guiones; en tales teoremas, la cadena de guiones deberá contener necesariamente un número primo de guiones. Así, P--- será un teorema, y P---- no lo será. ¿Cómo se podrá expresar esto tipográficamente? Primero, es importante especificar con claridad qué quiere decir operaciones *tipográficas*. El repertorio completo ha sido presentado junto con los sistemas MIU y pq, de manera que ahora necesitamos solamente elaborar la lista de las posibilidades que hemos permitido:

1) leer y reconocer cualquiera de entre un conjunto finito de símbolos;
2) formular cualquiera de los símbolos pertenecientes a dicho conjunto;
3) reproducir cualquiera de esos símbolos en otra ubicación;
4) anular cualquiera de esos símbolos;
5) verificar si un símbolo es el mismo que otro;
6) conservar y utilizar una lista de teoremas ya producidos.

El inventario es algo redundante, pero no hay inconveniente en ello. Lo que importa señalar es que solamente convoca capacidades triviales, todas ellas inferiores a las necesarias para distinguir entre números primos y no primos. ¿Cómo haremos, entonces, para emplear algunas de esas operaciones en la construcción de un sistema formal donde los números primos y los números compuestos son diferenciados entre sí?

El sistema tq

El primer paso sería tratar de resolver un problema más simple, pero relacionado con la pregunta anterior. Tendríamos que intentar la construcción de un sistema similar al pq, pero para representar la multiplicación y ya no la suma. Lo llamaremos *sistema tq:* 't' quiere decir 'veces'. Más de-

talladamente, supongamos que *X, Y* y *Z* son, respectivamente, el número de guiones en las cadenas de guiones *x, y* y *z*. (Obsérvese que adopto especial cuidado en distinguir entre una cadena y el número de guiones que la misma contiene.) Luego, establecemos que la cadena *x*t*y*q*z* es un teorema si, y sólo si, *X* veces *Y* es igual a *Z*. Por ejemplo, --t---q------ sería un teorema porque 2 veces 3 es igual a 6, pero --t--q--- no lo sería. El sistema tq puede ser caracterizado casi tan fácilmente como el pq, es decir, mediante un solo esquema de axioma y una regla de inferencia:

ESQUEMA DE AXIOMA: *x*t-q*x* es un axioma, siempre que *x* sea una cadena de guiones.

REGLA DE INFERENCIA: Supongamos que *x, y* y *z* son todas cadenas de guiones. Y supongamos que *x*t*y*q*z* es un teorema conocido. Luego, *x*t*y*-q*zx* será un nuevo teorema.

A continuación derivamos el teorema --t---q------:

1)	--t-q--	(axioma)
2)	--t--q----	(aplicando la regla de inferencia, y tomando el del paso (1) como teorema anterior)
3)	--t---q------	(aplicando la regla de inferencia, y tomando el del paso (2) como teorema anterior).

Advirtamos cómo crece la cadena central, a razón de un guión por cada oportunidad en que es aplicada la regla de inferencia; de tal forma, si se desea obtener un teorema con diez guiones en el centro, es previsible que haya de aplicarse nueve veces la regla de inferencia, dentro de esa serie.

La captura de la compositividad

Acabamos de "capturar" tipográficamente a la multiplicación, concepto éste sólo ligeramente más complejo que el de la suma: su captura se parece a la de los pájaros, en *Liberación*, de Escher. ¿Cómo haremos con la primidad? He aquí un plan que puede considerarse astuto: emplear el sistema tq para definir un nuevo conjunto de teoremas de la forma C*x*, la cual caracterizará a los números *compuestos*. Veamos:

REGLA: Supongamos que *x, y* y *z* son cadenas de guiones. Si *x*-t*y*-q*z* es un teorema, entonces C*z* también es un teorema.

Debe indicarse que *Z* (el número de guiones de *z*) es un compuesto que equivale al producto de dos números mayores que 1, a saber, $X + 1$, e

Y + 1 (*X* e *Y* son el número de guiones de *x* e *y*, respectivamente). Voy a fundamentar esta regla aportando algunas argumentaciones del tipo "vía inteligente", puesto que el lector es un ser humano, y reqüiere saber *por qué* elaboro dicha regla. Si la actitud fuera de no abandonar los límites de la "vía mecánica", no haría falta justificación alguna, pues los seguidores de la vía M obedecen mecánica y complacidamente las reglas, sin cuestionarlas jamás.

A causa de que la actitud del lector responde a la vía I, tenderá a confundir la distinción entre cadenas y sus interpretaciones. Está a la vista que las cosas pueden presentarse sin ninguna claridad tan pronto como se percibe que hay "significación" en los símbolos que se están manipulando. El lector, con seguridad, tiene que luchar consigo mismo para no pensar que la *cadena* '---' es el *número* 3. El Requisito de Formalidad, que probablemente impresionara como enigmático en el Capítulo I (por ser tan obvio), se volverá ahora complejo y concluyente. Es esencial guardarse de mezclar la vía I con la vía M; o, en otros términos, es esencial no confundir los hechos de la aritmética con los teoremas tipográficos.

Caracterización ilegítima de primos

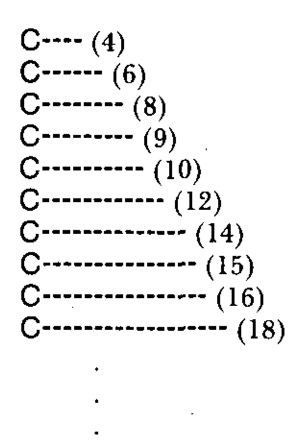
Es sumamente tentador brincar desde los teoremas del tipo C, directamente, a los del tipo P, mediante la proposición de una regla del siguiente género:

REGLA PROPUESTA: Supongamos que *x* es una cadena de guiones. Si C*x* *no* es un teorema, entonces P*x* *es* un teorema.

La falla insoluble, aquí, es que la verificación de si C*x* *no* es un teorema no constituye una operación expresamente tipográfica. Para saber a ciencia cierta que MU no es un teorema del sistema MIU, es imprescindible *salir* del sistema . . . y lo mismo ocurre con la Regla Propuesta. Se trata de una regla que viola en su totalidad la noción de sistema formal, desde el momento que nos exige operar informalmente, o sea, fuera del sistema. La operación tipográfica (6) nos permite examinar la colección de teoremas descubiertos, mientras que la Regla Propuesta nos requiere que inspeccionemos una hipotética "Tabla de no teoremas". Ahora bien, si queremos elaborar esta tabla, tenemos que conducir ciertos razonamientos *fuera del sistema:* razonamientos que muestren la causa por la cual algunas cadenas no pueden ser producidas dentro del sistema. Pero bien podría ser que hubiese *otro* sistema formal facultado para generar la "Tabla de no teoremas", por medio de recursos exclusivamente tipográficos. En realidad, nuestro propósito es descubrir un sistema semejante; ya que la Regla Propuesta no es una regla tipográfica, debe ser desestimada.

Este aspecto es de tal importancia que conviene extendernos un poco

más a su respecto. En nuestro *sistema C* (el cual incluye el sistema tq y la regla que define los teoremas del tipo C), tenemos teoremas de la forma C*x*, donde '*x*' representa, como siempre, una cadena de guiones. También hay no teoremas de la forma C*x* (a ellos aludo cuando digo "no teoremas", si bien t t - C q q u otras revolturas caprichosas son también no teoremas). La diferencia reside en que los teoremas tienen un número compuesto de guiones, y los no teoremas tienen un número primo de guiones. Por otra parte, todos los teoremas cuentan con una "forma" común, porque son generados por un mismo conjunto de reglas tipográficas. Luego, ¿tendrán asimismo los no teoremas una "forma" común, por análogas razones? Más abajo aparece una lista de teoremas del tipo C, enunciados sin sus derivaciones; los números entre paréntesis representan simplemente la suma de los guiones que corresponden a cada teorema:


C---- (4)
C------ (6)
C-------- (8)
C--------- (9)
C---------- (10)
C------------ (12)
C-------------- (14)
C--------------- (15)
C---------------- (16)
C------------------ (18)
.
.
.

Los "huecos" de la lista son los no teoremas. Podemos parafrasear la pregunta anterior: ¿los huecos tienen una "forma" común?, y agregar: ¿sería razonable sostener que, sólo por tratarse de los huecos de esta lista, comparten una forma común? Sí y no. Que comparten *cierta* cualidad tipográfica es innegable, pero no lo es la posibilidad de llamar "forma" a esa cualidad. La incertidumbre se funda en que los huecos están definidos de manera exclusivamente *negativa*: son las cosas que han sido descartadas en la confección de una lista definida *positivamente*.

Figura y campo

Esto recuerda la célebre distinción artística entre *figura* y *campo*. Cuando una figura o "espacio positivo" (sea una forma humana, una letra, o una naturaleza muerta) es trazada en el interior de un marco determinado, se produce la inevitable consecuencia de que también queda trazada su forma complementaria —llamada otras veces "campo", "fondo" o "espacio

negativo" — . Sin embargo, en la mayoría de los diseños la relación figura-campo juega un papel menor; el artista se interesa mucho más por la figura que por el campo. Pero hay ocasiones en que el artista presta atención a este último.

Existen hermosos alfabetos cuya eficacia se basa en la distinción figura-campo. Poco más abajo se muestra un mensaje escrito en un alfabeto semejante; al principio se creería que es una hilera de algo parecido a gotas caprichosas, pero si uno retrocede por etapas y se va fijando con atención, súbitamente se verán aparecer siete letras . . .



Figura 15.

Un efecto análogo podrá observarse en mi dibujo *Señal de fumar* (figura 139). Siguiendo sus líneas, puede considerarse este acertijo: ¿es posible elaborar, de un modo u otro, un dibujo que contenga palabras en la figura *y* en el campo?

Haremos ahora una distinción canónica entre dos clases de figuras: las que se trazan *cursivamente*, y las *recursivas* (quizá es del caso aclarar que se trata de categorías que me pertenecen; no son del uso común). Una figura *cursiva* es aquella cuyo campo aparece tan sólo como subproducto del acto de dibujar. Una figura *recursiva*, en cambio, es aquella cuyo campo puede ser visto, por derecho propio, como una figura. Generalmente, es el artista en forma plenamente deliberada quien otorga esta relevancia al campo. El "re" de "recursivo" expresa el hecho de que tanto el primer plano como el plano posterior, o fondo, son trazables en forma cursiva: la figura es "doblemente cursiva". El límite entre figura y fondo, en una figura recursiva, es una espada de doble filo. M. C. Escher fue un maestro en materia de figuras recursivas, como se aprecia, por ejemplo, en su bello dibujo recursivo de pájaros mostrado en la figura 16.

Nuestra distinción no es tan rigurosa como las de la matemática, porque, ¿quién puede afirmar concluyentemente que un campo en particular no es una figura? Una vez que se le ha prestado atención, casi cualquier campo gana interés *por sí mismo*. En tal sentido, no hay figura que no sea recursiva; pero no es éste el alcance que le doy al término: hay una noción intuitiva y natural que permite el reconocimiento de formas; entonces, el primer plano y el fondo ¿son ambos formas reconocibles? Si es así, la imagen es recursiva. Si observamos los campos de la mayoría de los diseños de tipo técnico, nos resultarán irreconocibles. Esto demuestra que:



Figura 16. Cobertura de un plano mediante pájaros (de un cuaderno de apuntes, 1942).

Existen allí formas reconocibles, cuyo espacio negativo no es una forma reconocible cualquiera.

Dicho en terminología más "especializada":

Existen allí figuras trazables cursivamente, que no son recursivas.

Creo que *FIGURA-FIGURA Figura*, de Scott Kim, mostrada en la figura 17, responde a la pregunta que planteamos. Si nos fijamos al mismo tiempo en las zonas blancas y en las negras, veremos "FIGURA" en todas partes, ¡y "CAMPO" en ninguna! Es un paradigma de figura recursiva. En este talentoso diseño, hay dos recursos no equivalentes de caracterización de las zonas negras:



Figura 17. FIGURA-FIGURA Figura , de Scott E. Kim (1975).

1) como *espacio negativo* de las zonas blancas;
2) como *copias alteradas* de las zonas blancas (mediante el desplazamiento y el entintado de cada zona blanca).

(En el caso especial de *FIGURA-FIGURA Figura*, ambas caracterizaciones *son* equivalentes; pero en la mayoría de las pinturas en blanco y negro no lo son.)

En el Capítulo VIII formulamos nuestra Teoría de los Números Tipográfica (TNT): confiamos en que nos permita caracterizar de forma análoga al conjunto de todas las proposiciones falsas de teoría de los números, es decir:

1) como *espacio negativo* del conjunto de todos los teoremas TNT;
2) como *copias alteradas* del conjunto de todos los teoremas TNT (producidos mediante la negación de cada uno de los teoremas TNT).

Pero tal confianza se verá frustrada, porque:

1) dentro del conjunto de todos los no teoremas se descubren algunas verdades;
2) fuera del conjunto de todos los teoremas negados se descubren algunas falsedades.

Ya veremos cómo y por qué ocurre esto, en el Capítulo XIV. Entretanto, analicemos la representación gráfica de la situación que exhibe la figura 18.

Figura y campo en música

También se pueden buscar figuras y campos en la música, donde melodía y acompañamiento se relacionan de modo análogo, ya que la melodía está siempre en el primer plano de nuestra atención, mientras que el acompañamiento, de algún modo, es secundario. De aquí que resulte sorprendente encontrar a veces, en las líneas menos audibles de una pieza musical, melodías reconocibles. Esto no ocurre demasiado a menudo en la música posterior a la barroca. Por lo general, los elementos armónicos no son considerados de primer plano, pero dentro de la música barroca —en Bach, sobre todo— las distintas líneas actúan como "figuras", ya sean altas, bajas o intermedias. En este sentido, las composiciones de Bach pueden ser denominadas "recursivas".

Existe otra distinción figura-campo en música: la que encontramos entre "tiempos" y "contra-tiempos". Si uno cuenta las notas mediante la pauta "uno-y, dos-y, tres-y, cuatro-y", la mayor parte de las notas melódicas coincidirán con los números. Pero en ocasiones una melodía es desplazada hacia las "y", buscando un efecto distinto, como sucede en algunos

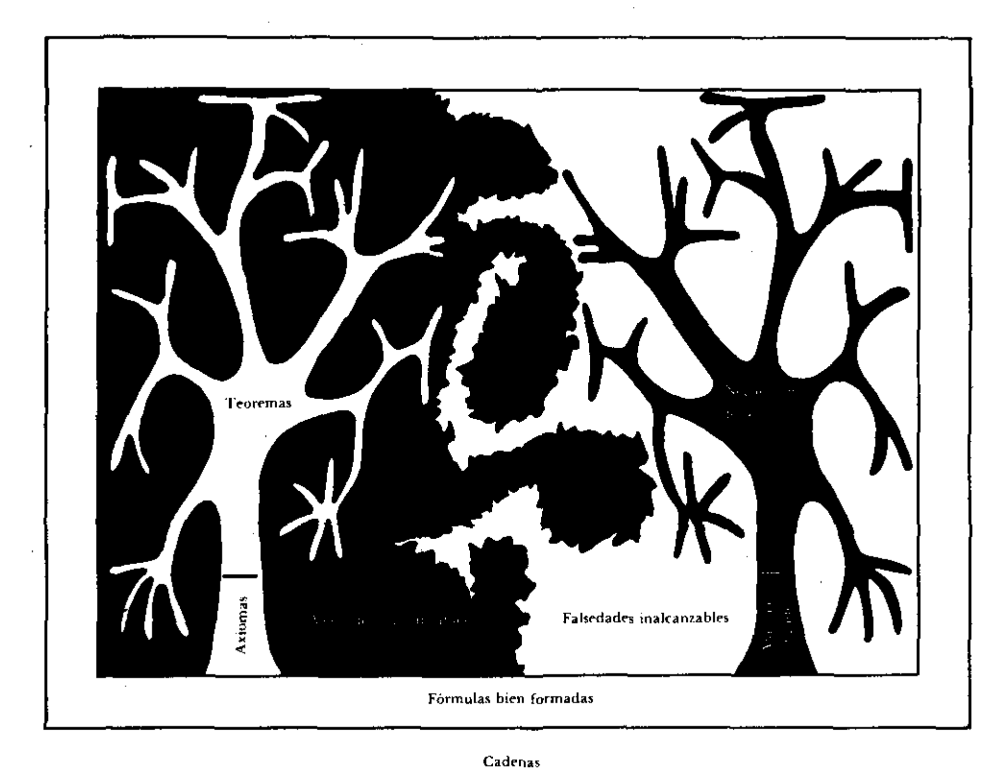


Figura 18. Este diagrama de las relaciones existentes entre las diversas clases de cadenas TNT concentra un grado considerable de simbolismo visual. El rectángulo mayor representa el conjunto de todas las cadenas TNT; el que lo sigue en tamaño, el conjunto de todas las cadenas TNT bien formadas. *Dentro de éste se encuentra el conjunto de todos los* enunciados *de TNT. Ahora las cosas se ponen interesantes. El conjunto de los* teoremas *es dibujado en forma de árbol, cuyo tronco representa el conjunto de los* axiomas. *El árbol símbolo fue adoptado a causa del modelo de crecimiento recursivo que exhibe: ramas nuevas (los teoremas) que se gestan constantemente a partir de las más viejas. Las ramas delgadas sondean los rincones de la región comprimida (el conjunto de* verdades*), pero nunca los podrán ocupar por completo. La frontera divisoria entre el conjunto de verdades y el conjunto de falsedades ha sido diseñada para sugerir una costa caprichosamente serpenteada; por más detalladamente que se la examine, siempre aparecerán en ella niveles estructurales más sutiles, por lo que resulta imposible describirla con exactitud aplicando métodos finitos (véase el libro de B. Mandelbrot,* Fractals*). El árbol en negro representa el conjunto de* negaciones de teoremas*; éstos, pese a ser falsos en su totalidad, no pueden cubrir, como conjunto, el espacio de los enunciados falsos. [Dibujo del autor.]*

estudios para piano de Chopin. Esto también se aprecia en Bach, sobre todo en sus Sonatas y Partitas para solo de violín, y en sus Suites para solo de violoncelo. En estas composiciones, Bach logra que dos o más líneas

musicales avancen de manera simultánea; lo consigue, en ciertas oportunidades, haciendo que el instrumento a cargo del solo realice "acordes", es decir, dos notas por tiempo; en otras, ubica una voz sobre los tiempos, y la otra voz sobre los contra-tiempos, así el oído las separa, y oye dos melodías diferentes que se entrelazan, se distancian, y en todo momento armonizan entre sí. No hace falta decir que Bach no se detuvo en este nivel de complejidad . . .

Conjuntos recursivamente enumerables *vs.* conjuntos recursivos

Vamos a llevar ahora las nociones de figura y campo al dominio de los sistemas formales. En nuestro ejemplo, la función de espacio positivo es cumplida por los teoremas del tipo C, y la de espacio negativo por cadenas con un número primo de guiones. Hasta ahora, el único medio que hemos encontrado para representar números primos tipográficamente ha sido concebirlos como un espacio negativo. Sin embargo, ¿no habrá alguna forma, así sea muy complicada, de representar a los primos como un espacio *positivo,* esto es, como conjunto de teoremas de un sistema formal?

Diferentes intuiciones dan diferentes respuestas a esto. Recuerdo muy bien la perplejidad y la intriga en que me había sumido mientras estudiaba la distinción entre caracterización positiva y caracterización negativa. Yo estaba completamente convencido de que no sólo los primos, sino *cualquier* conjunto de números que pudiese ser representado negativamente, también podía ser representado positivamente. Mi convencimiento se fundaba en una intuición que es sintetizada por la pregunta: "*¿Cómo es posible que una figura y su campo no contengan la misma información?*" Para mí, ambos incluían la misma información, aunque codificada de dos maneras complementarias. ¿Era una respuesta correcta?

Resultó que yo estaba acertado acerca de los primos, pero equivocado en general, lo cual me asombró, y continúa asombrándome todavía hoy. No se discute que:

> Existen sistemas formales cuyo espacio negativo (conjunto de no teoremas) no es el espacio positivo (conjunto de teoremas) de ningún sistema formal.

Esta conclusión manifiesta una profundidad similar a la del Teorema de Gödel, de modo que no es sorprendente que mi intuición se frustrase. Igual que los matemáticos de comienzos de este siglo, yo contaba con que el mundo de los sistemas formales y el de los números naturales se mostrasen más previsibles de lo que son. Para decirlo con terminología más técnica:

Hay conjuntos recursivamente enumerables que no son recursivos.

La expresión *recursivamente enumerable* (frecuentemente abreviada "r.e.") es el correlato matemático de nuestra noción artística de "cursivamente trazable", y *recursivo* es el correlato de "recursivo". Que un conjunto de cadenas sean "r.e." significa que *pueden* ser generadas mediante la aplicación de reglas tipográficas: el conjunto de los teoremas del tipo C, el conjunto de los teoremas del sistema MIU, por ejemplo, y por supuesto el conjunto de teoremas de cualquier sistema formal. Esto es comparable con una concepción de "figura" como "conjunto de líneas que pueden ser generadas mediante la aplicación de reglas artísticas" (¡sea lo que fuere lo que se entienda por esto!). Y un "conjunto recursivo" es como una figura cuyo campo es también una figura: es r.e., pero su complemento también es r.e.

Se sigue entonces que:

> Existen sistemas formales para los que no hay procedimiento tipográfico de decisión.

¿Cómo se llega a esto? Muy fácilmente. Un procedimiento tipográfico de decisión es un método que distingue entre teoremas y no teoremas. Su existencia nos permite producir sistemáticamente todos los no teoremas, mediante el simple recurso de enumerar *todas* las cadenas y someterlas al procedimiento verificador, una por una, descartando las cadenas y teoremas mal formados. Esto equivale a disponer de un método tipográfico de producción del conjunto de no teoremas. Pero según lo enunciado anteriormente (y en este momento le daremos plena fe), ello no es posible en *algunos* sistemas. Luego, debemos concluir que no todos los sistemas formales cuentan con procedimientos tipográficos de decisión.

Supóngase que tenemos un conjunto *F* de números naturales ('*F*' representa a 'Figura') —los números compuestos, por ejemplo—, a los que pudiéramos generar mediante algún método formal. Supongamos que su complemento es el conjunto *C* ('*C*' representa a 'Campo') —los números primos, por ejemplo—. Juntos, *F* y *C* abarcan todos los números naturales, y conocemos una regla que nos permite producir todos los números del conjunto *F*, pero no conocemos ninguna similar para producir los números del conjunto *C*. Es importante fijarse en que, si los miembros de *F* fueran generados siempre en orden *creciente*, podríamos en todo momento caracterizar a *C*. El problema es que muchos conjuntos r.e. son generados a través de métodos que diseminan los elementos en un orden arbitrario, así que nunca se sabe si un número omitido largo tiempo obtendrá, esperando un poco más, su inclusión.

A la pregunta "¿son recursivas todas las figuras?" respondimos negativamente, en el plano artístico. Ahora vemos que la respuesta también debe ser negativa en el plano de la matemática, cuya pregunta se formula así: "¿son recursivos todos los conjuntos?" Desde esta perspectiva, volvamos a la elusiva palabra "forma": observando de nuevo nuestro conjunto-

figura *F* y nuestro conjunto-campo *C*, podemos convenir en que todos los números del conjunto *F* tienen cierta "forma" común, pero, ¿puede decirse lo mismo de los números del conjunto *C*? Es un problema curioso. Cuando estamos comenzando a abordar un conjunto infinito —el de los números naturales—, los vacíos creados por el desplazamiento de algún subconjunto pueden ser muy difíciles de definir explícitamente. Pudiera ser, entonces, que no estén vinculados por ningún atributo o "forma" común. En último caso, usar la palabra "forma" es cuestión de preferencia personal, siempre que se recuerden sus facetas problemáticas. Quizá sea mejor no definir "forma", sino dejarla un tanto librada a la fluidez de las intuiciones.

Y a continuación, planteo un acertijo relacionado con los temas recién examinados: ¿Cómo se puede caracterizar el conjunto de enteros (o su espacio negativo) que sigue?

1 3 7 12 18 26 35 45 56 69 . . .

¿Qué tiene de parecido esta secuencia con *FIGURA-FIGURA Figura*?

Los primos: figura, no campo

En definitiva, ¿qué decir acerca de un sistema formal para la producción de números primos?, ¿cómo construirlo? El ardid consiste en brincar por sobre la multiplicación, y recurrir directamente a la *no divisibilidad* para su representación positiva. Tenemos aquí un esquema de axioma y una regla para la generación de teoremas, los cuales manifiestan el hecho de que un número *demostradamente no divide* (DND) a otro en forma exacta.

ESQUEMA DE AXIOMA: *x y* D N D *x*, donde *x* e *y* son cadenas de guiones.

Por ejemplo, -----D N D--, donde *x* ha sido remplazado por '--' e *y* por '---'.

REGLA: Si *x* D N D *y* es un teorema, también lo es *x* D N D *x y*.

Aplicando dos veces la regla, se obtiene este teorema:

-----D N D------------

que corresponde interpretar como "5 no divide a 12". Sin embargo, ---DND------ no es un teorema, ¿dónde está la equivocación si tratamos de producirlo?

Ahora bien, para determinar que un número dado es primo debemos poseer algunos conocimientos acerca de sus propiedades de no divisibilidad. En particular, tenemos que saber que no es divisible por 2, ni por 3,

ni por 4, etc., hasta el número *inferior* en 1 al número dado. Pero en el ámbito de los sistemas formales no podemos decir, tan ambiguamente, "etcétera", sino que debemos formular algo concreto. Sería bueno contar con una forma de decir, en el lenguaje del sistema, "el número *Z* está *exento de divisores* hasta *X*", para significar que ningún número entre 2 y *X* divide a *Z*. Esto se puede lograr, aunque a costa de una triquiñuela. Piénselo el lector, si le interesa.

La solución es la siguiente:

REGLA: Si --DND *z* es un teorema, también lo es *z* ED--.

REGLA: Si *z* ED *x* es un teorema, y también *x* - D N D *z* es un teorema, entonces *z* ED *x* - es un teorema.

Estas dos reglas capturan la noción de *exención de divisor.* Todo lo que necesitamos hacer es decir que los primos son números exentos de divisor hasta 1 menos que ellos mismos:

REGLA: Si *z* - ED *z* es un teorema, luego P *z* - es un teorema.

Por cierto: ¡no olvidemos que 2 es primo!

AXIOMA: P - -.

Y ya está. El fundamento de la representación formal de la primidad consiste en que hay una prueba de la divisibilidad, que puede ser practicada sin necesidad de volver atrás. Marchamos constantemente hacia adelante, verificando primero la divisibilidad por 2, luego por 3, y así siguiendo. Es la "monotonicidad" o unidireccionalidad del método —la ausencia de toda interacción entre ampliación y reducción, o entre incremento y decremento— lo que permite que la primidad sea aprehendida. Esta compleja capacidad de los sistemas formales para desarrollar y acumular interferencias arbitrarias que operan en distintas direcciones es la causa de tan pobres resultados como el Teorema de Gödel, el descubrimiento de Turing sobre las imperfecciones de la cibernética, y de que no todos los conjuntos recursivamente enumerables sean recursivos.

Contracrostipunto

Aquiles ha ido de visita a la casa de su amiga y compañera de trotes, la Tortuga.

Aquiles: ¡Caray! Por cierto que tiene usted una admirable colección de búmerangs.

Tortuga: Pss . . . no es mejor que la de cualquier otra Tortuga. ¿Le agradaría pasar al salón?

Aquiles: Magnífico. (*Camina hasta el ángulo de la habitación.*) Veo que tiene una gran colección de discos. ¿Qué clase de música prefiere?

Tortuga: Sebastian Bach no es del todo malo, creo. Pero le confieso que en estos días estoy desarrollando un interés cada vez mayor por un tipo más bien especializado de música.

Aquiles: Cuénteme, ¿qué clase de música es ésa?

Tortuga: No me parece probable que haya usted escuchado este tipo de música. Yo la llamo "música para romper fonógrafos".

Aquiles: ¿Dijo usted "para romper fonógrafos"? Sí que es un concepto curioso. Ya la veo, maza en mano, haciendo añicos un fonógrafo tras otro a los compases de la heroica obra maestra de Beethoven, la *Victoria de Wellington.*

Tortuga: No se trata exactamente de esa música. Pero sin duda usted la encontrará seductora. ¿Se la describo en pocas palabras?

Aquiles: Eso estaba deseando.

Tortuga: Bastante poca gente la ha oído. Todo empezó con una visita que me hizo mi amigo el Cangrejo, ¿lo conoce usted, por casualidad?

Aquiles: Sería un placer, estoy seguro. Pese a que he escuchado hablar mucho de él, no lo conozco todavía.

Tortuga: En algún momento yo me encargaré de reunirlos. Simpatizarán ustedes espléndidamente. Quizá nos encontremos por casualidad en el parque, uno de estos días . . .

Aquiles: ¡Preciosa sugerencia! Me quedaré esperándolo. Pero iba usted a hablarme de su misteriosa "música para destrozar fonógrafos", ¿verdad?

Tortuga: Ah, sí. Bueno, mire, el Cangrejo vino un día a visitarme. Debe usted saber que él siempre tuvo debilidad por los artefactos llamativos, y en ese momento estaba apasionado, más que por ninguna otra cosa, por los dispositivos de pasar discos. Acababa de comprar el primero de su vida y, como es un poco crédulo, había creído todo lo que le dijo el vendedor: en especial, que ese aparato era capaz de reproducir cualquier clase de sonido. En fin, el Cangrejo estaba convencido de poseer un fonógrafo Perfecto.

Aquiles: Naturalmente, supongo que usted habrá intentado disuadirlo.

Tortuga: Claro que sí, pero él no escuchó mis razones. Sostenía empecinadamente que su adquisición podía reproducir el sonido que fuera. Ya que no podía convencerlo de lo contrario, dejé de insistir, y poco tiempo después le devolví su visita, llevando conmigo el disco de una canción que yo había compuesto. La canción se llamaba "No puedo ser escuchada mediante el fonógrafo 1".

Aquiles: Un tanto inusual. ¿Era un regalo para el Cangrejo?

Tortuga: De ningún modo. Yo sugerí que la pusiéramos en su nuevo fonógrafo, y él tuvo mucho agrado en complacerme. Pero, lamentablemente, después de unas pocas notas, el fonógrafo comenzó a vibrar con bastante fuerza y luego, con un sonoro "plop", se deshizo en un sinnúmero de pedacitos, que quedaron esparcidos por toda la habitación. Ni decir que también el disco se destruyó por completo.

Aquiles: Qué explosión infortunada, pobre tipo. ¿Qué le pudo ocurrir al fonógrafo para estallar así?

Tortuga: Verdaderamente, nada en particular, nada en absoluto, sólo que no pudo reproducir los sonidos del disco que yo había llevado, porque eran sonidos que lo hacían vibrar hasta *romperse*.

Aquiles: Raro, ¿no? Yo había entendido que era un fonógrafo Perfecto; así había dicho el vendedor, en todo caso.

Tortuga: ¡Aquiles, no me diga que se cree todo lo que afirman los vendedores! ¿Es usted tan ingenuo como el Cangrejo?

Aquiles: ¡El Cangrejo es mucho más ingenuo! ¡Sé muy bien que los vendedores son unos grandes embusteros, no nací ayer!

Tortuga: Entonces, quizá pueda usted aceptar que este vendedor había exagerado algo en cuanto a la calidad del equipo comprado por el Cangrejo . . . es posible que *no* fuese del todo Perfecto, y que no pudiera reproducir todo sonido posible.

Aquiles: A lo mejor la explicación es ésa. Pero no hay explicación para la asombrosa coincidencia de que su disco tuviera esos mismos sonidos fatales . . .

Tortuga: Salvo que hayan sido puestos allí deliberadamente. Verá usted: antes de devolver su visita al Cangrejo, fui a la tienda donde mi amigo había comprado su aparato y averigüé quiénes eran sus fabricantes. Luego, escribí a éstos pidiéndoles detalles de diseño; me los remitieron por correo, y yo entonces me puse a examinar a fondo la construcción del fonógrafo. Descubrí así que si determinado conjunto de sonidos era producido en las cercanías del artefacto, éste comenzaría a sacudirse y finalmente se haría pedazos.

Aquiles: ¡Qué bajeza! No hace falta que me cuente los demás detalles, ya los sé: usted se encargó de grabar esos sonidos en un disco, y se lo llevó como regalo . . .

Tortuga: ¡Maldición! ¡Usted no sabe nada, porque la historia no termina ahí! El Cangrejo no quiso creer que la falla estuviera en su aparato, de modo que, tercamente, fue y compró un nuevo fonógrafo, más caro

que el anterior, y esta vez el vendedor le prometió devolverle el doble del precio si el Cangrejo encontraba algún sonido que el equipo no pudiese reproducir con exactitud. Todo esto me vino a relatar excitadamente mi amigo, y yo le prometí ir a visitarlo de nuevo para ver su flamante modelo.

Aquiles: Corríjame en caso de que me equivoque: seguramente usted, antes de volver a casa del Cangrejo, escribió al fabricante otra vez, y compuso y grabó una canción llamada "No puede ser escuchada mediante el fonógrafo 2", basada en el diseño del nuevo equipo.

Tortuga: ¡Brillantísima deducción, Aquiles! Ha captado usted la situación de un modo perfecto.

Aquiles: ¿Y qué ocurrió ahora?

Tortuga: Lo que tenía que ocurrir, exactamente de la misma manera: el fonógrafo se hizo mil pedazos, y el disco quedó deshecho.

Aquiles: Y, como consecuencia, el Cangrejo por fin se convenció de que no podía existir semejante cosa como un fonógrafo Perfecto.

Tortuga: Aunque le parezca un tanto sorprendente, no fue del todo eso lo que pasó . . . El estaba seguro de que un tercer modelo funcionaría sin problemas, y como disponía del doble del dinero que antes, se . . .

Aquiles: ¡Oh . . . se me ocurrió una idea! El pudo haberla engañado fácilmente a usted, con un fonógrafo de BAJA-fidelidad: uno que no fuese capaz de reproducir los sonidos que lo destruirían. De esta forma, evitaría la treta preparada por usted.

Tortuga: Sí, pero eso alteraría el objetivo primordial, es decir, tener un fonógrafo que reprodujese cualquier sonido del mundo, aun su propio ruido al romperse, lo cual es por supuesto imposible.

Aquiles: Es verdad. Ahora veo claro el dilema: si un fonógrafo —digamos el Fonógrafo X— está dotado de la necesaria alta-fidelidad, cuando se intente escuchar en él la canción "No puede ser escuchada mediante el Fonógrafo X", generará las vibraciones que precisamente causarán su destrucción . . . y dejará de ser Perfecto. Pero el único medio de sortear este embrollo, o sea la variante de que el Fonógrafo X cuente con fidelidad más baja, no es solución porque se confirma más directamente todavía que no es Perfecto. Pareciera que todos los fonógrafos son susceptibles de tener defectos, a causa de una u otra de estas fallas.

Tortuga: No sé por qué los llama usted "defectos". Se trata sólo de una circunstancia inherente a los fonógrafos: no pueden hacer todo lo que usted desea que sean capaces de hacer. Si existe un defecto en alguna parte, no está en ELLOS, sino en nuestras expectativas acerca de lo que son capaces de hacer. Y el Cangrejo estaba lleno de expectativas infundadas de esa clase.

Aquiles: Y yo estoy lleno de compasión hacia el Cangrejo. Alta fidelidad o baja fidelidad, fracasó de todos modos.

Tortuga: Nuestro jueguito siguió adelante, en el mismo estilo, durante

algunos asaltos más, y finalmente nuestro amigo trató de actuar con mucho mayor ingenio. Se inspiró en el mismo principio por el cual yo grababa mis discos, e intentó adelantárseme. Escribió a los fabricantes, enviándoles la descripción de un equipo de su propia invención para que se lo construyeran. Lo llamó "Fonógrafo Omega", y era mucho más complejo que un fonógrafo común.

Aquiles: Permítame hacer alguna conjetura: no tenía partes móviles, ¿o estaba hecho de algodón? O . . .

Tortuga: Se lo diré yo, y ganaremos tiempo. En primer lugar, el Fonógrafo Omega tenía una cámara de televisión cuya finalidad era examinar cada disco, antes de hacerlo escuchar. Esta cámara estaba conectada a una pequeña computadora construida a propósito, encargada de determinar con exactitud la naturaleza de los sonidos mediante el análisis de los surcos del disco.

Aquiles: Sí, hasta aquí muy bien, pero ¿qué hacía el Fonógrafo Omega con esa información?

Tortuga: A través de complicados procesos de cálculo, la computadora establecía los efectos que el sonido podía ejercer sobre el fonógrafo. Si deducía que los sonidos serían de tal tipo que dañarían la configuración presente del aparato, realizaba entonces una acción muy astuta: el Primer Omega contenía un dispositivo capaz de desarmar las partes componentes del fonógrafo, y volver a armarlas de diferentes maneras, de forma tal que, realmente, estaba en condiciones de modificar su propia estructura. Si los sonidos eran "peligrosos", era adoptada una configuración nueva, alejada de la amenaza; su construcción la concretaba la subunidad reconstructora, bajo la dirección de la pequeña computadora. Unicamente después de toda esta operación, el Fonógrafo Omega hacía escuchar el disco.

Aquiles: ¡Ajá! Eso debe haber significado el fin de sus tretas, señora. Estoy seguro de que experimentó usted un leve contratiempo . . .

Tortuga: Es curioso que me diga eso . . . Me imagino que no conoce usted en profundidad el Teorema de la Incompletitud, de Gödel, ¿verdad?

Aquiles: ¿En profundidad el Teorema de QUIEN? Jamás oí hablar de nada parecido; debe ser fascinante, pero preferiría seguir hablando de "música para romper discos", porque es un relato asombroso el suyo. Me parece que lo puedo completar sin dificultad: obviamente, no había por qué seguir adelante, y usted admitió humildemente su fracaso, ¿no fue así?

Tortuga: ¡Qué! ¡Casi medianoche ya! Yo diría que llegó la hora de irme a la cama. Me encantaría conversar un rato más, pero confieso que me estoy durmiendo.

Aquiles: Lo mismo que yo. Bueno, me marcho. (*Cuando llega a la puerta, se detiene de pronto y da media vuelta.*) Caramba, qué tonto soy; casi olvido que le traje un regalito. Aquí está. (*Extiende a la Tortuga un pequeño y primorosamente envuelto paquete.*)

Tortuga: Pero . . . ¡no tenía por qué, verdaderamente! Cuánto se lo agradezco. Me encantaría abrirlo ahora mismo. (*Ansiosos desgarrones abren el paquete, y aparece dentro una copa de cristal.*) ¡Oh, qué copa tan exquisita! ¿Sabía usted que yo tengo afición, más que por ninguna otra cosa, por las copas de cristal?

Aquiles: Ni la menor idea. ¡Qué grata coincidencia!

Tortuga: Mire, si sabe usted guardar un secreto, le diré una cosita: estoy tratando de encontrar una copa Perfecta, una que no tenga la menor imperfección en su forma. ¿No sería magnífico que esta copa —llamémosla "C"— fuera así? Dígame, ¿dónde consiguió la Copa "C"?

Aquiles: Lo lamento, pero eso es un secretito MIO. De todos modos, quizá quiera saber quién es su fabricante.

Tortuga: Se lo ruego: dígamelo, ¿quién es?

Aquiles: ¿Ha oído hablar del famoso vidriero Johann Sebastian Bach? Bueno, no se hizo famoso precisamente soplando vidrio —pero era su entretenimiento, aunque nadie lo sepa—, y esta copa es la última pieza que él sopló.

Tortuga: ¿De veras es la última? ¡Dios mío! Si en realidad fue hecha por Bach, su valor es inestimable. ¿Pero cómo es que usted está seguro de que él la fabricó?

Aquiles: Observe la inscripción aquí dentro . . . ¿alcanza a ver las letras grabadas: 'B', 'A', 'C', 'H'?

Tortuga: ¡No hace falta más! Qué cosa tan extraordinaria. (*Deposita con suavidad la Copa C en un estante.*) A propósito, ¿sabía usted que cada una de las cuatro letras del nombre de Bach es a su vez la denominación de una nota musical?

Aquiles: ¿Y eso no es posible? Después de todo, las notas musicales van solamente de la 'A' a la 'G'.

Tortuga: Así es; en muchos países es como usted dice. Pero en Alemania, la tierra del propio Bach, se presenta la diferencia de que a la nota 'B', la llaman 'H', y cuando nosotros decimos 'B-bemol', allí dicen 'B'. Por ejemplo, nosotros llamamos "Misa en B menor", de Bach, a lo que ellos llaman "H-moll Messe". ¿Está claro?*

Aquiles: . . . Hmmm . . . Creo que sí. Es un poco confuso: H es B, y B es B-bemol. Yo diría que su nombre constituye una melodía, entonces.

Tortuga: Curioso, pero cierto. En realidad, Bach elaboró sutilmente esa melodía dentro de una de sus obras más trabajadas, el *Contrapunto* final de su *Arte de la fuga*. Fue la última fuga que él compuso. La primera vez que la escuché, ignoraba por completo cómo terminaba. De pronto, sin aviso, se interrumpió. Y luego . . . un silencio de muerte. Comprendí de inmediato que era el momento en que Bach había muerto. Es algo tremendamente triste; el efecto que tuvo sobre mí fue

* La notación usada en los países *latinos* es la que va de 'DO' a 'SI'. 'A' equivale a 'LA', 'B' a 'SI', 'C' a 'DO', y así siguiendo hasta 'G', equivalente de 'SOL'. La obra citada es aquí, pues, *la Misa en Si menor*. [T.]





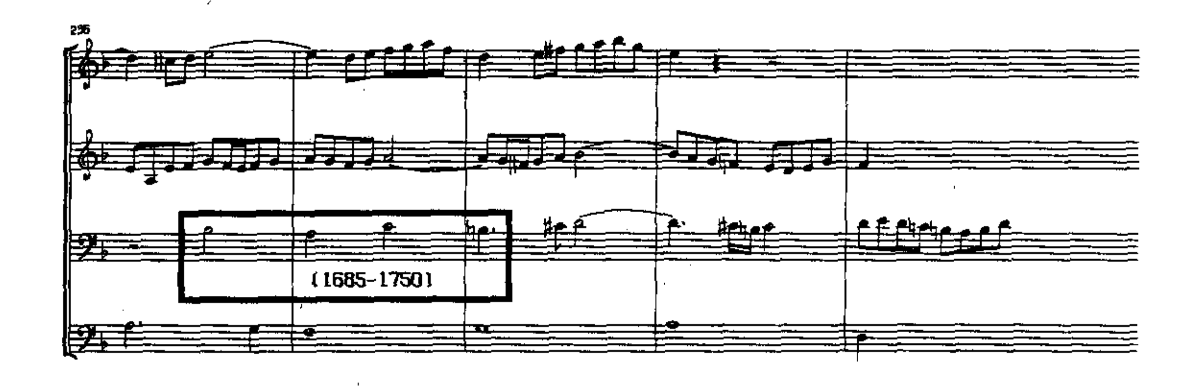


Figura 19. Última página del Arte de la fuga, *de Bach. En el manuscrito original, escrito de puño y letra del hermano de Bach, Carl Philipp Emanuel, se lee: "N.B. En el transcurso de esta fuga, y en el punto donde el nombre B.A.C.H. era empleado como contratema, el compositor murió". (En recuadro: B.A.C.H.) Pienso que esta página final de la última fuga de Bach es su mejor epitafio. [Música impresa por el programa "SMUT", de Donald Byrd, presentado en la Universidad de Indiana.]*

. . . angustioso. Como quiera que sea, el último tema de esa fuga es B-A-C-H. Está escondido en el interior de la obra, Bach no lo desarrolló explícitamente, pero usted lo podrá descubrir sin dificultad si conoce lo suficiente al autor. Ah . . . hay tantas cosas inteligentemente escondidas en la música . . .

Aquiles: . . . o en la poesía. Los poetas acostumbraban a hacer cosas similares, sabe usted (aunque ya no esté de moda). Lewis Carroll, por ejemplo, a menudo escondía palabras y nombres en las primeras letras (o en los personajes) de las líneas sucesivas de sus poemas. Estos; cuando encubren mensajes mediante este recurso, son llamados "acrósticos".

Tortuga: Bach escribió acrósticos también, en algunas ocasiones, lo cual no es sorprendente porque, después de todo, el contrapunto y el acróstico tienen sin duda algo en común, con sus niveles de significación oculta. Casi todos los acrósticos, sin embargo, tienen únicamente un nivel de significación de esa índole, pese a que no habría inconveniente en elaborar una doble cobertura: un acróstico como referencia de otro acróstico. También es posible un "contracróstico", donde el mensaje está formado por las letras iniciales, tomadas en orden *inverso*. ¡Caramba! Las posibilidades inherentes a la forma no tienen fin. Además, no se trata de un método reducido al empleo de los poetas: cualquiera puede escribir acrósticos, inclusive un dialógico.

Aquiles: A ver, ¿un día alógico? Eso es nuevo para mí.

Tortuga: Corríjolo: dije "dialógico", es decir, un escritor de diálogos. Hmmm . . . se me está ocurriendo una cosa. En el improbable caso de que un dialógico escribiese un acróstico contrapuntístico en homenaje a Bach, ¿qué le parece a usted más adecuado?, ¿que el acróstico trace su PROPIO nombre, o el de Bach? Oh, bueno, pero por qué ocuparse de semejante frivolidad. Si alguien emprende la creación de una obra así, hará lo que le parezca mejor. Volviendo al nombre melódico de Bach, ¿sabía usted que si se ejecuta la melodía B-A-C-H de abajo hacia arriba y de atrás para adelante, resulta lo mismo que ejecutando el original? Preveo . . .

Aquiles: Honestamente, ¿cómo es posible ejecutar algo de abajo para arriba? De atrás para adelante, pase, ubicamos las notas en el orden H-C-A-B y ya está, pero . . . de abajo arriba . . . Usted me está tomando el pelo.

Tortuga: . . . su incredulidad, pero le doy mi palabra. Es usted todo un escéptico, ¿verdad? Bien, tendré que hacerle una demostración. Permítame traer mi violín . . . (*Se dirige al cuarto contiguo, y regresa al instante, portando un violín de aspecto venerable.*) . . . y tocar para usted hacia adelante, hacia atrás y en todas las direcciones. Vamos a ver . . . (*Ubica su ejemplar de* El arte de la fuga *en el atril, y lo abre en la última página.*) . . . aquí está el último *Contrapunto*, y aquí el último tema . . .

La Tortuga comienza a tocar: B-A-C . . . pero cuando emite la H final, súbitamente y sin aviso la ejecución es interrumpida por un brusco fragor de cosas rotas. Ambos amigos giran justo a tiempo para vislumbrar una miríada de fragmentos de cristal, tintineando en su camino hacia el suelo, desde el estante donde acababa de estar, sólo hasta hacía un momento, la Copa C. Y luego . . . un silencio de muerte.

CAPITULO IV

Coherencia, completitud y geometría

Significación implícita y explícita

EN EL CAPITULO II VIMOS que la significación —al menos dentro del contexto *relativamente* simple de los sistemas formales— aparece cuando hay un isomorfismo entre símbolos gobernados por reglas, de un lado, y cosas del mundo real, del otro. Es necesario el isomorfismo más complejo para que los símbolos actúen adecuadamente en el circuito de la significación; lo ideal es un isomorfismo bien apuntalado, tanto desde el punto de vista de los instrumentos que utilice como de los conceptos que le den base.

Si un isomorfismo es muy simple (o muy familiar), nos inclinamos a decir que el significado a que nos da acceso es explícito: vemos el significado sin ver el isomorfismo. El ejemplo más saliente al respecto es el del lenguaje humano; a menudo la gente atribuye significados a las palabras mismas, sin advertir en absoluto el muy complejo "isomorfismo" que es, en realidad, lo que las dota de significación. Se comete con harta facilidad este error, consistente en atribuir toda la significación al *objeto* (la palabra), antes que al *vínculo* entre ese objeto y el mundo real. Se lo puede comparar con la creencia ingenua de que el ruido es un efecto colateral, de carácter necesario, de toda colisión entre dos objetos. Se trata de una creencia falsa, pues dos objetos pueden chocar en el vacío, donde no producirán el menor sonido. En este caso se repite la equivocación que deriva de atribuir el ruido exclusivamente a la *colisión*, y en no reconocer la función del *medio*, de lo que hace de vehículo entre los objetos y el oído.

Más arriba entrecomillé la palabra "isomorfismo" para indicar que debe ser tomada con gran cuidado. Los proceso simbólicos que subyacen a la comprensión del lenguaje humano son mucho más complejos que los procesos simbólicos de los sistemas formales convencionales; en consecuencia, si vamos a seguir sosteniendo que los isomorfismos son los vehículos intermediadores de la significación, tendremos que adoptar una concepción mucho más flexible que la utilizada hasta ahora acerca de aquéllos. En mi opinión, en verdad, el elemento clave para responder a la pregunta "¿qué es la conciencia?" tiene que ser el desciframiento de la naturaleza del "isomorfismo" que subyace a la significación.

El significado explícito del *Contracrostipunto*

Todo lo anterior nos sirve de prólogo para un examen del *Contracrostipunto*, para su estudio en los niveles de la significación. En el Diálogo hay significados explícitos e implícitos; el más visible de los primeros es simplemente la anécdota relatada. Este significado "explícito" es, estrictamente hablando, en gran medida *implícito* en el sentido de que los procesos cerebrales requeridos para comprender los acontecimientos incluidos en la anécdota, manifestados sólo como signos negros sobre papel blanco, son increíblemente complejos. No obstante, consideraremos dichos acontecimientos como significado explícito del diálogo, y supondremos que todos los lectores aplican más o menos el mismo "isomorfismo" para absorber tal significado a partir de los signos impresos.

De todos modos, me gustaría ser algo más explícito acerca del significado explícito del relato, y comenzaré entonces por referirme a los fonógrafos y a los discos. El aspecto principal es que hay dos niveles de significación en los surcos de los discos. El Nivel Uno es el de la música, pero ¿qué es la música?, ¿una secuencia de vibraciones producidas en el aire, o una sucesión de reacciones emocionales producidas en el cerebro? Es ambas cosas, pero antes de ser respuesta emocional debe ser vibración. Ahora bien, estas últimas son "sacadas" de los surcos por un fonógrafo, es decir, un artefacto relativamente fiel con respecto a lo que se aguarda de él; en realidad, se lo puede remplazar con un alfiler, pero dañando los surcos. Obtenidas las vibraciones, el oído las convierte en excitación de neuronas auditivas dentro del cerebro. Luego, tiene lugar una serie de etapas, a través de las cuales el cerebro transforma gradualmente la secuencia lineal de vibraciones en un modelo complejo de reacciones emocionales interrelacionadas: excesivamente complejo para que lo estudiemos aquí, a pesar de lo mucho que me interesaría hacerlo. Limitémonos pues a pensar en los sonidos transportados por el aire como "Nivel Uno" del significado de los surcos.

¿Cuál es el "Nivel Dos" de significación de los surcos? Es la secuencia de vibraciones producidas en el fonógrafo. Este significado sólo puede surgir después de que el del Nivel Uno ha sido extraído de los surcos, pues son las vibraciones en el aire las que causan las vibraciones en el aparato. Así, el significado del Nivel Dos depende del encadenamiento de *dos* isomorfismos:

1) el isomorfismo existente entre determinada grabación impresa en los surcos, y las vibraciones del aire;
2) el isomorfismo existente entre determinadas vibraciones del aire, y vibraciones en el fonógrafo.

El encadenamiento entre ambos isomorfismos es ilustrado por la figura 20. Adviértase que el isomorfismo 1 es el único que da origen al significa-

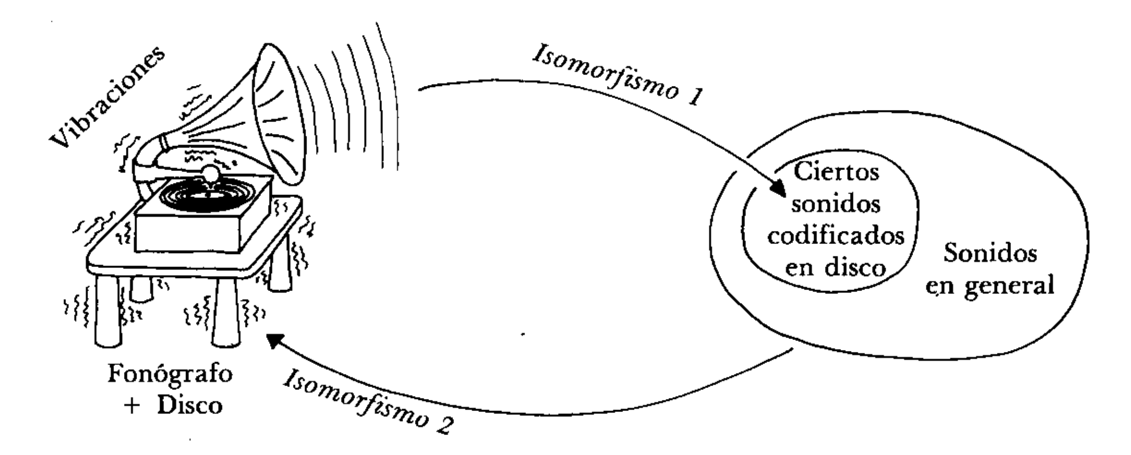


Figura 20. Presentación visual del fundamento básico del Teorema de Gödel: dos proyecciones en paralelo, dotadas de un inesperado efecto de búmerang. La primera circula desde los surcos impresos hacia los sonidos, vehiculizados por un fonógrafo. La segunda —cotidiana, pero comúnmente ignorada— va desde los sonidos hacia las vibraciones del fonógrafo. Obsérvese que la segunda proyección existe con independencia de la primera, pues cualquier sonido producido en las cercanías, y no sólo los originados en el fonógrafo, causaría tales vibraciones. La paráfrasis pertinente del Teorema de Gödel dice que hay discos que un fonógrafo no puede hacer escuchar, pues causarían indirectamente su autodestrucción. [Dibujo del autor.]

do Nivel Uno. El significado Nivel Dos es más implícito que el Uno, pues emana de la mediación de dos isomorfismos enlazados. Es el Nivel Dos lo que "estalla por la culata", generando la destrucción del aparato. El interés principal reside en que la producción del significado Nivel Uno fuerza la producción simultánea del significado Nivel Dos: no hay manera de tener Nivel Uno sin Nivel Dos. De modo que es el significado implícito del disco lo que vuelve a éste, y lo destruye.

Corresponde aplicar el mismo razonamiento a la copa. Hay una diferencia, consistente en que la analogía entre letras del alfabeto y notas musicales implica otro nivel de isomorfismo, que puede ser llamado "transcripción", al cual sigue la "traducción", o sea el acto de convertir las notas musicales en sonidos musicales. Y luego sucede la repercusión de las vibraciones sobre la copa, tal como lo hicieron sobre la serie ascendente de fonógrafos.

Significados implícitos del *Contracrostipunto*

¿Y qué pasa con los significados implícitos del Diálogo? (Sí, tiene más de uno.) El más simple ya ha sido señalado en los parágrafos anteriores, a sa-

ber, que los elementos de las dos mitades del diálogo son rudimentariamente isomórficos entre sí: el fonógrafo se convierte en un violín, la Tortuga pasa a ser Aquiles, el Cangrejo la Tortuga, los surcos impresos el autógrafo grabado, etc. Una vez advertido este sencillo isomorfismo, se puede ir más allá, y observar que, en la primera mitad, la Tortuga es quien perpetra los desbarajustes, mientras que en la segunda es la víctima; ya lo sabíamos, pero cabe subrayar que su mismo método ha dado un giro y disparado sobre ella. Y recordamos entonces los tiros por la culata de la música impresa en los discos, o de la inscripción grabada en la copa o, inclusive, de la propia colección de búmerangs de la Tortuga. Ciertamente, el tema de esta narración son los disparos por la culata, en dos niveles: los siguientes. . .

Nivel Uno: Las copas y los discos que lanzan impactos sobre sí mismos.
Nivel Dos: El travieso método de la Tortuga, consistente en aprovechar el significado implícito para causar tiros por la culata . . . mediante estallidos por la culata.

Por ello, inclusive podemos establecer un isomorfismo entre los dos niveles del relato, correlacionando la forma en que los discos y la copa se transforman en búmerangs de sí mismos, por una parte, con la forma en que el malintencionado método de la Tortuga se transforma después en búmerang que cae sobre ella misma, por la otra. Vista así, la narración misma es un ejemplo de las situaciones contraproducentes que relata. En consecuencia, es válido interpretar que el *Contracrostipunto* se refiere indirectamente a sí mismo, en la medida en que su estructura es isomórfica de los sucesos que contiene. (Exactamente del mismo modo en que la copa y los discos se refieren implícitamente a sí mismos mediante los isomorfismos en paralelo de hacer brotar sonidos, y causar vibraciones.) Por supuesto, uno puede leer el Diálogo sin percibir esta circunstancia, pero allí está en todo momento.

Correlación entre el *Contracrostipunto* y el Teorema de Gödel

Puede que el lector esté sintiendo ya un pequeño vértigo, pero todavía falta lo mejor. (En realidad, algunos niveles de significación implícita no serán mencionados, para que el lector los investigue por su cuenta.) La razón fundamental de este Diálogo es ilustrar el Teorema de Gödel, el cual, como ya dije en la Introducción, se apoya vigorosamente sobre dos niveles distintos de significación de las proposiciones propias de la teoría de los números. Cada una de las dos mitades del *Contracrostipunto* es una "réplica isomórfica" del Teorema de Gödel. Puesto que tal correla-

ción es la idea central del Diálogo, y teniendo en cuenta que es algo compleja, incluyo más abajo una cuidadosa diagramación:

fonógrafo	⇐⇒	sistema axiomático de la teoría de los números
fonógrafo de baja fidelidad	⇐⇒	sistema axiomático "débil"
fonógrafo de alta fidelidad	⇐⇒	sistema axiomático "fuerte"
fonógrafo "Perfecto"	⇐⇒	sistema completo de la teoría de los números
"diseño" de fonógrafo	⇐⇒	axiomas y reglas del sistema formal
disco	⇐⇒	cadena del sistema formal
disco escuchable	⇐⇒	teorema del sistema axiomático
disco inescuchable	⇐⇒	no teorema del sistema axiomático
sonido	⇐⇒	proposiciones verdaderas de teoría de los números
sonido reproducible	⇐⇒	teorema interpretado del sistema
sonido irreproducible	⇐⇒	proposición verdadera que no es un teorema
título de la canción:	⇐⇒	significado implícito de la cadena de Gödel:
"No puedo ser escuchado mediante el fonógrafo X"	⇐⇒	"No puedo ser derivado dentro del Sistema Formal X"

Lo anterior no abarca en toda su extensión el isomofismo vigente entre el teorema de Gödel y el *Contracrostipunto*, pero sí incluye lo principal. El lector no tiene por qué preocuparse si no capta plenamente el Teorema de Gödel todavía: tenemos varios capítulos por delante antes de abordarlo de lleno. Con todo, la lectura del Diálogo permitirá tomarle un poco el gusto al teorema, aun sin haberlo estudiado. Ahora, dejo al lector dedicado a la tarea de buscar otros significados implícitos en el *Contracrostipunto*. ¡"*Quaerendo invenietis*!"

El arte de la fuga

Unas pocas palabras acerca de *El arte de la fuga*: compuesto por Bach durante su último año de vida, se trata de una colección de dieciocho fugas, basadas todas en el mismo tema. Por lo visto, elaborar la *Ofrenda Musical* sirvió a Bach de inspiración, pues lo decidió a componer un conjunto de fugas sobre un tema mucho más simple, a fin de mostrar la gama completa de las posibilidades inherentes a esa forma. En *El arte de la fuga* desarrolla aquel tema a través de los modos más complejos que le fue posible. Toda la obra se ajusta a una clave única. La mayoría de las fugas están compuestas para cuatro voces, y van aumentando gradualmente la complejidad y profundidad de su expresión: hacia el final, se encumbran a tales alturas de inextricabilidad que uno sospecha que Bach no podrá ya mantenerse allí . . . pero lo consigue . . . hasta el *Contrapunto* final, inclusive.

Las circunstancias que provocaron la interrupción de *El arte de la fuga* (y, al mismo tiempo, de la vida de Bach) fueron las siguientes: como había tenido muy afectada su vista durante años, Bach deseaba ser operado. Así se hizo, pero el resultado fue muy poco satisfactorio, de manera que casi toda la última parte de su existencia la pasó en la ceguera. Pero esto no consiguió apartarlo de su monumental proyecto. Su propósito era formular una exposición completa de la creación fugal, una de cuyas facetas más importantes era el desarrollo de múltiples temas. Proyectó una composición para que siguiese a la última fuga, y con ese objeto inscribió su propio nombre, codificado bajo la forma de notas, como tercer tema. Pero a partir de este verdadero testamento, su salud llegó a hacerse tan precaria que debió abandonar su entrañable proyecto. En su enfermedad, se las arregló para dictar a su yerno un último preludio coral, del que su biógrafo Forkel dijo: "Su forma de piadosa resignación, y de devoción, siempre me ha afectado, cada vez que he asistido a su ejecución, así que puedo decir con toda sinceridad que hubiera preferido no conocer ni este Coral ni el final de la última fuga."

Problemas provocados por las conclusiones de Gödel

Dice la Tortuga que ningún fonógrafo, por poderoso que sea, puede ser perfecto, en el sentido de estar facultado para reproducir cualquier sonido posible grabado en un disco. Gödel dice que ningún sistema formal, por bien construido que esté, puede ser perfecto, en el sentido de reproducir toda proposición verdadera bajo la forma de teorema. Ahora bien, estos hechos impresionan como fallas sólo cuando se albergan esperanzas nada realistas acerca de las posibilidades de los sistemas formales. A pesar de ello, los matemáticos iniciaron el presente siglo llenos de expectativas

ilusorias de esta clase, esperanzados en que el razonamiento axiomático trajese la cura de todos los males. Comenzaron a pensar de otra manera en 1931. El hecho de que la verdad trascienda a la teoremidad, en cualquier sistema formal dado, es conocido como "incompletitud" de tal sistema.

Uno de los aspectos más enigmáticos con relación al método de prueba de Gödel es que emplea esquemas de razonamiento a los cuales, aparentemente, no es posible "encapsular": resisten su incorporación a cualquier sistema formal. Así pues, a primera vista, se diría que Gödel ha revelado una distancia hasta ahora desconocida, pero profundamente significativa, entre razonamiento humano y razonamiento mecánico. Esta misteriosa diferencia en las posibilidades de los sistemas animados por oposición a los inanimados es reflejada por la diferencia existente entre la noción de verdad y la noción de teoremidad . . . o bien, en último caso, se trata de una visión romántica de la situación.

El sistema pq modificado y la incoherencia

Para ver la situación de modo más realista, es necesario examinar con mayor profundidad por qué y cómo la significación, en los sistemas formales, es producida por la mediación de isomorfismos. Según creo, esto conduce a una perspectiva aun más romántica del problema. Procederemos pues a investigar algunas facetas adicionales de la relación entre significación y forma. Nuestro primer paso será construir un nuevo sistema formal, a través de la modificación, muy leve, de nuestro viejo amigo, el sistema pq. Le agregaremos un esquema de axioma (el anterior, y la única regla de inferencia, son conservados):

ESQUEMA DE AXIOMA II: Si *x* es una cadena de guiones, entonces *x*p - q*x* es un axioma.

Luego, evidentemente --p-q-- es un teorema del nuevo sistema, y también lo es --p--q---. Sin embargo, sus respectivas interpretaciones son: "2 más 1 igual a 2", "2 más 2 igual a 3". Nos damos cuenta de que nuestro nuevo sistema habrá de contener un gran número de proposiciones falsas (si tomamos las cadenas como proposiciones). Por ende, nuestro nuevo sistema es *incoherente con respecto al mundo externo*.

Como si esto fuera poco, nuestro nuevo sistema presenta también algunas dificultades *internas*, puesto que contiene proposiciones incongruentes entre sí, tales como -p-q-- (un axioma anterior) con respecto a -p-q- (un axioma nuevo). En consecuencia, nuestro sistema es incoherente en un segundo sentido: internamente.

¿La única cosa razonable por hacer, pues, sería la completa desestimación del nuevo sistema? Difícilmente. He presentado estas "incoherencias", de manera deliberada, a través de un método capcioso; en efecto, traté de exponer argumentos ambiguos con la mayor certidumbre posible a fin de inducir a error. Ciertamente, el lector puede haber ubicado las falacias incluidas en mis afirmaciones. La falacia central radica en que, sin el menor cuestionamiento, adopto exactamente las mismas palabras interpretativas para el nuevo sistema que para el anterior. Recordemos que en el último capítulo mencionamos el único motivo que guía la adopción de tales palabras, es decir, el hecho de que *los símbolos representan isomórficamente los conceptos* con los que están correlacionados mediante la interpretación. Pero si se modifican las reglas que gobiernan el sistema, forzosamente es alterado el isomorfismo; esto es irremediable. Así que las dificultades que deplorábamos en los parágrafos precedentes no son más que falsos problemas, pasibles de ser eliminados en un instante, a través de *la reinterpretación adecuada de algunos de los símbolos del sistema*. He dicho "algunos", porque no es necesario que todos los símbolos deban ser correlacionados con nuevas nociones. Unos pueden muy bien conservar su "significado", en tanto que otros lo modificarán.

Reconquistando coherencia

Supóngase, por ejemplo, que reinterpretamos únicamente el símbolo q, dejando constantes los demás; específicamente, daremos a q la siguiente interpretación: "es mayor que o igual a". Nuestros "contradictorios" teoremas -p-q- y -p-q--, ahora, vuelven a la normalidad ya que su interpretación ajustada se lee: "1 más 1 es mayor que o igual a 1", y "1 más 1 es mayor que o igual a 2", respectivamente. A un mismo tiempo hemos evitado, 1) la incoherencia con respecto al mundo exterior, y 2) la incoherencia interna. Y nuestra nueva interpretación es una interpretación *significativa*; por supuesto, la inicial es *no significativa*: no significativa *para el nuevo sistema*; para el sistema pq original, sirve de maravilla. Pero aplicarla al nuevo sistema pq sería tan desacertado y caprichoso como aquella interpretación "caballo-manzana-feliz", aplicada al sistema pq inicial.

La historia de la geometría euclidiana

A pesar de que he intentado sorprender con la guardia baja al lector, y desconcertarlo un poco, esta lección acerca de cómo interpretar los símbolos mediante las palabras no puede considerarse tremendamente ardua, una vez que se la ha captado. Realmente, no lo es. ¡Y sin embargo



Figura 21. Torre de Babel, *de M. C. Escher (xilografía, 1928).*

se trata de una de las más profundas enseñanzas de toda la matemática del siglo diecinueve! Todo comenzó con Euclides, quien compiló y sistematizó, aproximadamente trescientos años antes de Cristo, todo el saber de su tiempo en materia de geometría plana y del espacio. La obra que resultó, los *Elementos*, contó con tal solidez que durante más de dos mil años sirvió prácticamente de biblia de la geometría. ¿Cómo se explica una vigencia tan asombrosamente duradera?

La causa principal consiste en que Euclides fue el fundador del *rigor* en matemática. Los *Elementos* empiezan por conceptos muy simples, definiciones, etc., y paulatinamente erigen un vasto cuerpo de conclusiones, organizado de forma tal que una conclusión determinada depende exclusivamente de las anteriores. La obra, sin duda, se ajustó a un plan definido, a una arquitectura que le dio fuerza y vigor.

Esa arquitectura, empero, es de un tipo diferente a la de, digamos, un rascacielos (veáse figura 21). En este último, el solo hecho de que se mantenga en pie es prueba suficiente de que sus componentes estructurales son capaces de sostenerlo. En un libro de geometría, en cambio, donde se exige que cada proposición se siga lógicamente de las anteriores, no se producirá una fractura visible si una de las pruebas carece de validez; las vigas y columnas no son materiales concretos, sino abstractos. En realidad, la materia de que están hechas las pruebas, en los *Elementos* de Euclides, es el lenguaje humano: ese elusivo y resbaladizo medio de comunicación, tan lleno de tramas invisibles. ¿Qué ocurre entonces con la fortaleza arquitectónica de los *Elementos*? ¿Están sostenidos por sólidos componentes estructurales, o habrá en su interior una debilidad estructural?

Cada palabra que empleamos tiene un significado para nosotros, el cual nos guía en nuestra utilización de aquélla. Cuanto más corriente es la palabra, mayores son las asociaciones de que la rodeamos y más profundas son las raíces de su significación. Por ello, cuando alguien define una palabra corriente con la esperanza de mantenerse en los límites de su definición, se puede asegurar de antemano que no lo conseguirá sino que su manejo de esa palabra estará orientado, a causa sobre todo de influencias inconscientes, por las asociaciones almacenadas en la mente. Menciono esto porque es precisamente el tipo de problema provocado por Euclides en sus *Elementos*, al pretender la definición de palabras comunes y corrientes tales como "punto", "línea recta", "círculo" y otras similares. ¿Cómo puede definirse algo de lo cual ya todo el mundo tiene un concepto claro? El único recurso consiste en precisar que la palabra definida debe ser considerada un término técnico, y alejada de toda confusión con la palabra de uso cotidiano que se deletrea igual. El caso es que Euclides no hizo esta salvedad, porque creyó que los puntos y las líneas de los *Elementos* eran, sin duda alguna, *los* puntos y *las* líneas del mundo real. En la medida en que no se ocupó de disipar aquel género de asociaciones, Euclides alentó a sus lectores a ejercer libremente sus facultades asociativas . . .

Esto puede dar la impresión de un panorama más bien caótico, y es un

poco injusto hacia Euclides, quien estableció axiomas, o postulados, previstos para servir de pruebas de las proposiciones. Pero sólo previó estas pruebas, lo cual se constituyó en un nuevo error pues, como consecuencia inevitable del empleo de vocablos corrientes, algunas de las representaciones suscitadas por éstos se deslizaban dentro de dichas verificaciones. Ahora bien, quien vaya a analizar en los *Elementos* tales mecanismos no va a encontrar, en absoluto, vacíos evidentes en los pasos que sigue el razonamiento. Por el contrario, aquéllos son muy agudos, pues Euclides fue un pensador penetrante que no habría cometido errores ingenuos. Sin embargo, hay fisuras en casi toda obra clásica, generadoras de ligeras imperfecciones; no es para lamentarlo, sino para avanzar en cuanto a la capacidad de apreciación de la diferencia que existe entre el rigor absoluto y el relativo. En el largo plazo, la falta de rigor absoluto de Euclides ha sido la causa de algunas de las más fértiles revoluciones producidas dentro de la matemática, dos mil años después de escrita su obra.

Euclides aportó cinco postulados para que sirviesen como "planta baja" del infinito rascacielos de la geometría, donde los *Elementos* constituyen sólo el primero, entre centenares de pisos. Los primeros cuatro postulados son bastante concisos y transparentes:

1. Entre dos puntos cualesquiera puede ser trazado un segmento de recta.
2. Cualquier segmento de recta puede ser extendido indefinidamente en una línea recta.
3. Dado cualquier segmento de recta, puede ser trazado un círculo que tenga al segmento como radio y a uno de los extremos como centro.
4. Todos los ángulos rectos son congruentes.

Pero el quinto ya no es tan elegante:

5. Si son trazadas dos líneas de modo que intersecten con una tercera de manera tal que la suma de los ángulos internos, sobre uno de los lados, sea menor que dos ángulos rectos, luego, esas dos líneas deben inevitablemente intersectarse entre sí sobre el otro lado, si son extendidas lo suficiente.

Pese a que nunca lo reconoció explícitamente, Euclides consideraba este postulado algo inferior al resto, pues se las arregló para no tener que aplicarlo en las demostraciones correspondientes a sus primeras veintiocho proposiciones. Así, éstas pertenecen a lo que se puede llamar la "geometría de los cuatro postulados", es decir, la parte de la geometría que puede ser derivada a partir de los cuatro primeros postulados de los *Elementos*, sin intervención del quinto postulado. (También se la suele llamar *geometría absoluta*.) Sin duda, Euclides habría preferido, de muy

buena gana, *demostrar* este patito feo, en lugar de tener que darlo por *supuesto*. Mas no descubrió la demostración, y entonces debió suponerlo.

Pero los seguidores de Euclides no se contentaron con tener que dar por supuesto el quinto postulado. Durante siglos, incontables personas entregaron incontables años de sus existencias al propósito de probar que ese postulado era parte integrante de la geometría de los cuatro postulados. En 1763, fueron publicadas por lo menos veintiocho demostraciones distintas, ¡todas erróneas! (Alguien llamado G.S. Klügel dedicó una disertación a criticarlas.) Todas esas demostraciones insuficientes incurren en la equivocación de confundir las intuiciones cotidianas con los atributos estrictamente formales. Obvio es decir que el grueso de estas "demostraciones" no conserva en la actualidad ningún interés matemático o histórico . . . pero hay ciertas excepciones.

Las muy diferentes caras de lo no euclidiano

Girolamo Saccheri (1667-1733) fue contemporáneo de Bach. Tenía la ambición de liberar a Euclides de toda imperfección. Luego de elaborar algunos trabajos sobre problemas lógicos, resolvió intentar la aplicación de una nueva perspectiva a la demostración del célebre quinto postulado.

Vamos a imaginar que *suponemos su opuesto*, y que en adelante utilizamos *eso* como quinto postulado . . . Seguramente, al poco tiempo se nos creará una contradicción. Puesto que ningún sistema matemático puede tolerar una contradicción, quedará demostrada la falsedad de nuestro quinto postulado, y en consecuencia la validez del original, acuñado por Euclides. No hace falta ampliar esta analogía: baste decir que, muy hábilmente, Saccheri desarrolló proposición tras proposición de "geometría saccheriana" hasta que se aburrió; en ese punto, decidió que había obtenido una proposición "que repugnaba a la naturaleza de la línea recta", lo cual era exactamente su propósito: la contradicción afanosamente perseguida. Publicó entonces su trabajo bajo el título *Euclides liberado de toda imperfección*, y luego murió.

Lamentablemente, al actuar así, se despojó a sí mismo de notables glorias póstumas, puesto que de modo inadvertido había descubierto lo que más tarde sería conocido como "geometría hiperbólica". Cincuenta años más tarde, J. H. Lambert volvió a "errar por poco", aproximándose aun más al centro, si cabe. Finalmente, cuarenta años después de Lambert, y noventa después de Saccheri, la *geometría no euclidiana* fue intrínsecamente reconocida, es decir, en su carácter de auténtica nueva cualidad de la geometría: una bifurcación en la hasta entonces unitaria corriente de la matemática. En 1823 se produjo el descubrimiento de la geometría no euclidiana, por obra simultánea —en una de esas coincidencias extraordinarias— de dos matemáticos, el húngaro János (o Juan) Bolyai, de veintiún años, y el ruso Nikolai Lobachevski, de treinta. El

mismo año, irónicamente, el gran matemático francés Adrien-Marie Legendre obtuvo lo que él *llamó* una demostración del quinto postulado de Euclides, trabajando muy apegado a las líneas fijadas por Saccheri.

El padre de János, Farkas Bolyai, fue gran amigo del célebre Gauss, y dedicó por su parte muchos esfuerzos a tratar de probar el quinto postulado. En carta a su hijo, intentaba disuadirlo de meditar en estos problemas:

> No te sumerjas en el estudio de las paralelas. Conozco ese camino hasta el final. He atravesado esa noche sin fondo, que consumió toda la luz y todo el goce de mi existencia. Te lo ruego, deja en paz la ciencia de las paralelas . . . Yo me dispuse a sacrificarme en beneficio de la verdad; estaba decidido a convertirme en un mártir que desalojaría el error del seno de la geometría, y se la devolvería purificada a la humanidad. He realizado una monstruosa, enorme labor; mis logros han sido mucho más plenos que los de otros, pero no he podido cumplir por entero la tarea. Aquí es verdad aquello de que *si paullum a summo discessit, vergit ad imum*. He emprendido el regreso al ver que ningún hombre puede llegar al fondo de esta oscuridad. He emprendido el regreso desconsolado, compadeciéndome y compadeciendo a la humanidad . . . He atravesado todos los escollos de este infernal Mar Muerto, y he vuelto siempre con el mástil roto y las velas rasgadas. La decadencia de mi voluntad, y mi ruina, tienen esta causa. Irreflexivamente, expuse mi vida y mi felicidad: *aut Caesar aut nihil.*[1]

Pero más tarde, cuando estuvo convencido de que su hijo, realmente, "tenía algo", lo urgió a hacerlo conocer, previendo lúcidamente la simultaneidad que es tan frecuente en los descubrimientos científicos:

> Cuando llega el tiempo de sazón para ciertas cosas, éstas aparecen en diferentes lugares, a la manera de las violetas que se abren en los comienzos de la primavera.[2]

¡Cuán verdadero resultó esto último en el caso de la geometría no euclidiana! En Alemania, el mismo Gauss y algunos otros matemáticos, trabajando en forma relativamente independiente, formularon ideas no euclidianas. Un abogado llamado F. K. Schweikart, por ejemplo, quien escribió en 1818 a Gauss, describiendo una nueva geometría "astral"; y también su sobrino, F. A. Taurinus, que elaboró desarrollos trigonométricos no euclidianos; o F. L. Wachter, alumno de Gauss que falleció en 1817, a los veinticinco años, luego de arribar a varias conclusiones profundas en materia de geometría no euclidiana.

La orientación que siguió la geometría no euclidiana consistió en "considerar textualmente" las proposiciones surgidas de geometrías como las de Saccheri y Lambert. Las proposiciones de Saccheri "repugnan a la naturaleza de la línea recta" solamente en la medida en que uno se mantenga obediente de las nociones preconcebidas en cuanto a la "línea recta".

[1] Herbert Meschkovski, *Non-Euclidean Geometry*, pp. 31-2.
[2] Ibid., p. 33.

Si, en cambio, uno puede despojarse de tales nociones y, sencillamente, dejar que la "línea recta" sea algo que satisface las nuevas proposiciones, se conseguirá contar con un punto de vista radicalmente nuevo.

Términos indefinidos

Esto ya debería sonar familiar, especialmente porque retornaremos al sistema pq, y a su variante, en la cual los símbolos adquirieron significados pasivos en virtud de la función que debían cumplir en los teoremas. El símbolo q es particularmente interesante, puesto que su "significado" cambió cuando fue agregado un nuevo esquema de axioma. De manera exactamente igual, uno puede *dejar que el significado de "punto", "línea", etc., sea determinado por el conjunto de teoremas (o proposiciones) dentro de los cuales aparezcan*. Este fue el gran avance de los descubridores de la geometría no euclidiana. Descubrieron diferentes géneros de geometrías no euclidianas mediante la negación del quinto postulado de Euclides, practicada de diversas maneras y llevada hasta sus últimas consecuencias. Para hablar en términos estrictos, ellos (incluido Saccheri) no negaron directamente el quinto postulado, sino que optaron por negar un postulado equivalente, llamado el *postulado de las paralelas*, el cual dice así:

> Dada cualquier línea recta, y un punto fuera de ella, existe una y sólo una línea recta que pase a través de ese punto sin intersectar nunca con aquella línea, por mucho que se la prolongue.

Se dice entonces que la segunda línea recta es paralela a la primera. Si uno afirma que tal línea *no* existe, ingresa en la *geometría elíptica*; si uno afirma que existen *por lo menos dos líneas semejantes*, se ingresa en la *geometría hiperbólica*. Además, la razón para que tales variantes sean llamadas "geometrías" es que su componente central sigue siendo la geometría absoluta, o de los cuatro postulados. La presencia de este elemento es lo que crea la posibilidad de pensar que aquéllas describen las propiedades de alguna clase de espacio geométrico, aun cuando tal espacio no sea tan intuible como el espacio corriente.

En verdad, la geometría elíptica puede ser concebida sin dificultad. Todos los "puntos", "líneas" y demás tienen que ser parte de la superficie de una esfera común. Vamos a escribir "PUNTO" cuando se quiera significar el término técnico, y "punto" cuando se trate del sentido cotidiano. Luego, podemos decir que un PUNTO consiste en un par de puntos opuestos diametralmente sobre la superficie de la esfera. Una LINEA es un gran círculo sobre la esfera (un círculo que, igual que el ecuador, tiene su centro en el centro de la esfera). Bajo estas interpretaciones, las proposiciones de la geometría elíptica se refieren a hechos que suceden sobre

una esfera, no sobre un plano, aunque incluyan palabras como "PUNTO" y "LINEA". Adviértase que dos LINEAS siempre intersectarán exactamente en dos puntos antípodas de la superficie esférica: es decir, exactamente en un único PUNTO. Y del mismo modo que dos LINEAS determinan un punto, así dos PUNTOS determinan una LINEA.

Manejando palabras tales como "PUNTO" y "LINEA" como si tuvieran solamente el significado que les asignan las proposiciones donde aparecen, damos un paso adelante hacia la plena formalización de la geometría. Esta versión semiformal todavía emplea una gran cantidad de palabras tomadas en su significado usual (por ejemplo: "el", "la", "si", "y", "determinar", "tener"), a pesar de que la significación cotidiana ha sido desalojada de palabras específicas como "PUNTO" y "LINEA", las que son denominadas, a continuación, *términos indefinidos*. Términos indefinidos, igual que p y q dentro del sistema pq, que se transforman en definidos a través de la acción *implícita* de todas las proposiciones en que aparecen, antes que a través de la acción explícita de una definición.

Se podría sostener que una definición integral de los términos indefinidos depende solamente de los postulados, ya que las proposiciones que se siguen de los postulados están implicadas en ellos. Este criterio diría que los postulados son definiciones implícitas de los términos indefinidos, todos los cuales, a la vez, son definidos por la relación que los vincula entre sí.

La posibilidad de interpretaciones múltiples

Una formalización completa de la geometría tendría que dar el drástico paso de convertir a *todo* término en indefinido; es decir, de transformar a todo término en un símbolo "no significativo" de un sistema formal. Pongo entre comillas "no significativo" porque, como sabemos, los símbolos recogen automáticamente un significado pasivo en el interior de los teoremas donde aparecen. Pero el problema de si se advierte ese significado es de otra índole, pues para hacerlo se requiere haber hallado un conjunto de conceptos que puedan ser vinculados, mediante un isomorfismo, con los símbolos del sistema formal. Si se emprende la formalización de la geometría, es presumible que se tenga *prevista* una interpretación para cada símbolo, a fin de crear los significados pasivos en el interior del sistema. Así hice con p y con q al construir el primer sistema pq.

Pero puede haber allí otros significados pasivos, potencialmente perceptibles, que nadie había advertido. Por ejemplo, en el sistema pq original apareció por sorpresa la interpretación de p como "igual a" y de q como "restado de". Aun cuando se trate de una muestra más bien trivial, contiene la esencia de la noción de que los símbolos pueden tener muchas interpretaciones significativas: corresponde al observador la tarea de buscarlas.

Podemos sintetizar nuestras observaciones anteriores a la luz de la palabra "coherencia". Comenzamos nuestra exposición elaborando lo que parecía ser un sistema formal incoherente: carecía de coherencia interna tanto como externa con el mundo real. Pero un momento después nos rectificamos, al comprender nuestro error, consistente en adoptar interpretaciones inadecuadas para los símbolos. Modificando entonces las interpretaciones, recuperamos coherencia. Queda ahora claro que *la coherencia no es un atributo de un sistema formal per se, sino que depende de las interpretaciones que se asignen a éste*. Por lo mismo, tampoco la incoherencia es un atributo intrínseco de ningún sistema formal.

Distintas variedades de coherencia

Hemos estado hablando extensamente de "coherencia" e "incoherencia" sin definirlas, apoyándonos precisamente en las nociones tradicionales de uso diario. Pero ahora vamos a expresar con exactitud qué significa *coherencia* (de un sistema formal, vinculada a una interpretación): significa que todo teorema, al ser interpretado, deviene una proposición verdadera. Y diremos que la *incoherencia* tiene lugar cuando aparece por lo menos una proposición falsa entre los teoremas interpretados.

Estas precisiones parecen referirse a la incoherencia con respecto al mundo externo, ¿y qué diremos acerca de las incoherencias *internas*? Se presume que un sistema será internamente incoherente si contiene dos o más teoremas cuyas interpretaciones son incompatibles entre sí. Veamos, por ejemplo, un sistema formal que tenga únicamente los tres siguientes teoremas: TbZ, ZbE y EbT. Si la interpretación de T es "la Tortuga"; la de Z, "Zenón"; la de E, "Egberto"; y la de *x* b *y*, "*x* siempre vence a *y* al ajedrez", tendremos entonces estos teoremas interpretados:

La Tortuga siempre vence a Zenón al ajedrez.
Zenón siempre vence a Egberto al ajedrez.
Egberto siempre vence a la Tortuga al ajedrez.

No son proposiciones incompatibles, aunque describan un círculo de ajedrecistas más bien extraño. De ahí que, bajo esta interpretación, el sistema formal del cual estas tres cadenas son teoremas tiene coherencia interna; así es, a pesar de que, desde el punto de vista de la realidad de los hechos, ninguna de las tres proposiciones es verdadera. La coherencia interna no requiere que todos los teoremas resulten verdaderos, sino solamente *compatibles* entre sí.

Supongamos ahora que *x* b *y* debe ser interpretado "*x* fue inventado por *y*". Tendríamos:

La Tortuga fue inventada por Zenón.

Zenón fue inventado por Egberto.
Egberto fue inventado por la Tortuga.

En este caso, no importa si las proposiciones singulares son verdaderas o falsas, y quizá no haya forma de determinar su verdad o falsedad. Pero sí es seguro que *las tres no pueden ser verdaderas al mismo tiempo*. De tal modo, la interpretación hace que el sistema se vuelva internamente incoherente. Esta incoherencia interna no depende de la interpretación de las tres letras mayúsculas, sino solamente de la de b, y del hecho de que las tres mayúsculas son cíclicamente permutadas en torno a las apariciones de b. Así, es posible advertir la incoherencia interna aun sin haber interpretado *todos* los símbolos del sistema formal (en este caso, basta con interpretar un solo símbolo). Cuando ya han sido asignadas interpretaciones a un número suficientemente amplio de símbolos, puede hacerse claro que no hay forma de interpretar al resto de modo que todos los teoremas resulten verdaderos. Pero no se trata de una cuestión de verdad, sino de posibilidad. Los tres teoremas resultarían falsos si las mayúsculas fuesen interpretadas como nombres de personas reales, pero no por eso llamaríamos internamente incoherente al sistema: para poder hacerlo, nos debemos fundar en la circularidad, combinada con la interpretación de la letra b. (A propósito del tema, el lector encontrará más comentarios sobre este "triángulo creativo" en el Capítulo XX.)

Mundos hipotéticos y coherencia

Hemos enunciado dos maneras de analizar la coherencia: según la primera, un sistema-más-interpretación es *coherente con el mundo externo* si todo teorema resulta *verdadero* al ser interpretado; según la segunda, un sistema-más-interpretación es *internamente coherente* si todos los teoremas resultan *recíprocamente compatibles* al ser interpretados. Ahora bien, existe una relación estrecha entre ambos tipos de coherencia. Para determinar si varias proposiciones son compatibles entre sí, se podría imaginar un mundo donde todas ellas sean verdaderas al mismo tiempo. Luego, la coherencia interna dependería de la coherencia con respecto al mundo externo . . . sólo que ahora el "mundo externo" es *cualquier mundo imaginario*, y no el que corresponde a nuestra existencia diaria. Pero ésta es una conclusión demasiado vaga e insatisfactoria. ¿En qué consiste un mundo "imaginario"? Después de todo, ¿es posible imaginar un mundo donde tres personajes se inventan cíclicamente entre sí? ¿Es posible imaginar un mundo donde haya círculos cuadrados? ¿Es un mundo imaginario el sostenido por las leyes de Newton y no por la relatividad? ¿Es posible imaginar un mundo donde existan cosas que sean simultáneamente verdes y no verdes? ¿O un mundo con animales que no estén hechos de células? ¿O donde Bach improvise una fuga a ocho voces sobre

un tema del Rey Federico el Grande? ¿O donde haya insectos más inteligentes que el hombre? ¿O donde las tortugas jueguen futbol . . . o hablen? Por supuesto, una tortuga hablando de futbol sería una anomalía.

Algunos de estos mundos parecen más imaginarios que otros, ya que incluyen contradicciones *lógicas* —como la de verde y no verde—, mientras que otros parecen, en función de los deseos de un mundo mejor, "plausibles": Bach improvisando una fuga a ocho voces, o animales que no estén hechos de células, por ejemplo. O, inclusive, llegar a pensar en un mundo regido por leyes físicas diferentes . . . Genéricamente, entonces, sería posible establecer diferentes grados de coherencia. Por ejemplo, el menos exigente sería el de "coherencia lógica", el cual no establecería restricciones de ninguna índole, salvo las de la lógica. Más específicamente, un sistema-más-interpretación sería *lógicamente coherente* en tanto ningún par de sus teoremas, al ser interpretados como proposiciones, encierre una contradicción; y *matemáticamente coherente* en tanto los teoremas interpretados no violen la matemática; y *físicamente coherentes* en tanto los teoremas interpretados sean compatibles con las leyes de la física; luego seguiría la *coherencia biológica*, y así por el estilo. Dentro de un sistema biológicamente coherente, podría haber un teorema cuya interpretación fuese la proposición "Shakespeare escribió una ópera", pero no un teorema cuya interpretación fuese la proposición "Existen animales carentes de células". Hablando en términos amplios, estas clases más imaginativas de incoherencia no están estudiadas, a causa de que son muy difíciles de desenmarañar. ¿Qué clase de incoherencia, por ejemplo, es la que atañe al problema de los tres personajes que se inventan entre sí cíclicamente? ¿Lógica? ¿Física? ¿Biológica? ¿Literaria?

Por lo común, la frontera entre lo que no interesa y lo que sí interesa es trazada entre la coherencia física y la coherencia matemática. (Por supuesto, son los matemáticos y los lógicos quienes se encargan del trazado: difícilmente alguien imparcial.) Esto significa que las clases de incoherencia que "cuentan", dentro de los sistemas formales, son únicamente la lógica y la matemática. Ajustándonos a esta convención, todavía no hemos podido encontrar una interpretación que torne incoherente al trío de teoremas TbZ, ZbE, EbT. Lo podremos conseguir si interpretamos b como "es mayor que". ¿Qué se hace con T, Z y E? Pueden ser interpretados como números naturales: por ejemplo, Z como 0, T como 2 y E como 11. Obsérvese que de esta forma dos teoremas resultan verdaderos, y uno falso. Si, en cambio, interpretamos Z como 3, tendríamos dos falsedades y una verdad. Pero en cualquiera de los casos, ha surgido la incoherencia. En realidad, los valores asignados a T, Z y E no vienen al caso, en la medida en que se da por entendido que están dentro del marco de los números naturales. Otra vez, entonces, vemos un caso donde sólo es necesario interpretar *algo*, para reconocer la incoherencia interna.

Introducción de un sistema formal en otro

El ejemplo anterior, donde algunos símbolos contaban con interpretaciones mientras que otros no, nos recuerda la construcción de la geometría mediante el lenguaje natural, que apela al empleo de determinadas palabras en función de términos indefinidos. En este caso, las palabras son divididas en dos clases: las que conservan un significado fijo e inmutable, y aquellas cuyo significado debe ser reajustado hasta que el sistema adquiera coherencia (éstas son los términos indefinidos). Construir una geometría de esta manera exige que los significados de las palabras correspondientes a la primera clase se encuentren ya establecidos, en algún ámbito exterior a la geometría. Estas palabras forman un esqueleto rígido, que otorga una estructura subyacente al sistema; otro material es el encargado de rellenar el esqueleto, y puede ser de uno u otro tipo (de orientación euclidiana o no euclidiana).

Frecuentemente, los sistemas formales son construidos con arreglo a esta misma ordenación secuencial o jerárquica. Por ejemplo, se puede crear un Sistema Formal I, dotado de reglas y axiomas que den a sus símbolos los significados pasivos que se desean. Luego, el Sistema Formal I es incorporado en su totalidad a un sistema más amplio, dotado de mayor cantidad de símbolos: el Sistema Formal II. Como los axiomas y reglas del Sistema Formal I son parte del Sistema Formal II, los significados pasivos de sus símbolos siguen siendo válidos; forman un esqueleto inmutable que, a su vez, cumple una función muy importante en la determinación de los significados pasivos de los símbolos correspondientes al Sistema Formal II. El segundo sistema puede, llegado su turno, llenar la función de esqueleto con respecto a un tercer sistema, y así siguiendo. También es posible —y la geometría es una excelente muestra— contar con un sistema (por ejemplo, la geometría absoluta) que acote *parcialmente* los significados pasivos de sus términos indefinidos, y que pueda ser complementado con reglas y axiomas adicionales, los cuales harán una *nueva* acotación de los significados pasivos de los términos indefinidos. Esto es lo que ocurre en el enfrentamiento entre geometría euclidiana y no euclidiana.

Capas diferentes en la percepción visual

En una forma igualmente jerárquica es que adquirimos nuevos conocimientos, nuevo vocabulario, o percibimos objetos desacostumbrados. Esto se actualiza de modo interesante en el caso de la comprensión de obras de Escher, tales como *Relatividad* (figura 22), en la cual aparecen imágenes francamente imposibles. Uno piensa que habría que profundizar la interpretación del cuadro una y otra vez antes de arribar a una síntesis despojada de contradicciones . . . pero no procede así, en absoluto. Uno se instala allí, divertido e intrigado por las escalinatas orientadas cada

cual en su caprichosa dirección, y por las personas que marchan en contradictorias caminatas sobre una misma escalera. Aquellas escalinatas son "islas de certidumbre", en las cuales basamos nuestra interpretación de toda la imagen. Una vez identificadas, tratamos de extender nuestra comprensión, buscando saber qué relación sustentan entre sí. Pero esta indagación tropieza con dificultades que limitan su avance; y si intentamos retroceder hacia las "islas de certidumbre" también tropezamos con dificultades, de otro género ahora. No hay manera de volver atrás y "desdecir" que aquéllas son escalinatas. No son peces, ni bicicletas, ni manos: son precisamente escalinatas. (En verdad, existe otra salida, consistente en dejar todas las líneas de la imagen sin interpretar en absoluto, como si fuesen "símbolos no significativos" de un sistema formal. Esta alternativa es un ejemplo de "vía U", de actitud zen hacia lo simbólico.)

En consecuencia, la naturaleza jerárquica de nuestros procesos perceptivos nos obliga a ver allí o bien un mundo alocado, o nada más que un grupo de líneas sin propósito. Una gran cantidad de obras de Escher puede suscitar análoga reflexión, obras que se fundan en la reconocibilidad de determinadas formas básicas, las cuales son vinculadas entre sí de maneras inhabituales: cuando el espectador capta la paradoja en su alto nivel, ya es demasiado tarde, pues no puede regresar y modificar la noción que ya adquirió acerca de cómo interpretar los objetos en el nivel inferior. La diferencia entre una imagen de Escher y la geometría no euclidiana reside en que, dentro de esta última, los términos indefinidos permiten obtener interpretaciones inteligibles, de las que emerge todo un sistema inteligible; dentro de la primera, en cambio, la conclusión final no es reconciliable con la concepción del mundo del espectador, por muy atenta y largamente que éste escudriñe el cuadro. Por supuesto, uno puede elaborar mundos hipotéticos, donde los sucesos escherianos sean factibles . . . pero en estos mundos, las leyes biológicas, físicas, matemáticas e inclusive las lógicas, son violadas en un nivel, y al mismo tiempo respetadas en otro, lo cual los convierte en mundos sumamente fantásticos. (Como lo muestra *Cascada* (figura 5), donde la fuerza de gravedad impulsa normalmente el agua, pero la naturaleza del espacio circundante infringe las leyes de la física.)

¿La matemática sigue siendo la misma en cualquier mundo concebible?

Hemos subrayado el hecho, líneas atrás, de que la coherencia *interna* de un sistema formal (acompañado por una interpretación) requiere que haya algún mundo *imaginable* —es decir, un mundo cuya única restricción consista en que la matemática y la lógica sean las mismas de nuestro mundo—, donde todos los teoremas interpretados resulten verdaderos. La coherencia *externa* —la coherencia con el mundo externo— requiere,

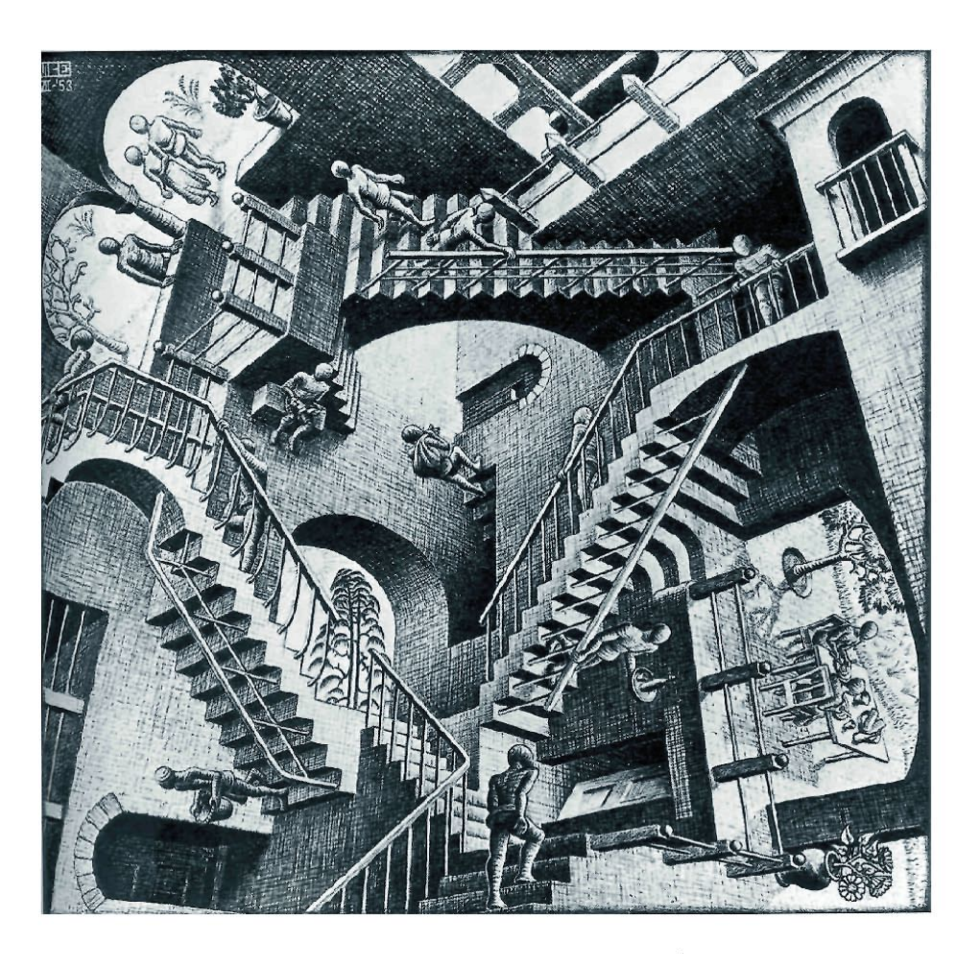


Figura 22. Relatividad *(litografía, 1953).*

en cambio, que todos los teoremas resulten verdaderos en el mundo *real*. Ahora bien, en el caso especial de que se desee crear un sistema formal coherente cuyos teoremas tengan que ser interpretados como proposiciones matemáticas, pareciera que la diferencia entre ambos tipos de coherencia tiende a disiparse ya que, de acuerdo a lo dicho anteriormente, *todos los mundos imaginables tienen la misma matemática que el mundo real*. Así, en cualquier mundo que queramos concebir, 1 más 1 deberá ser 2; también tendrá que haber infinitos números primos, y todos los ángulos rectos serán congruentes. Del mismo modo, por supuesto, a través de un punto exterior a una recta podrá pasar exclusivamente una paralela . . .

Pero, ¡un momento! Este es el postulado de las paralelas, y afirmar su universalidad sería un error, a la luz de lo que precisamente acabamos de decir. Si sustentamos el postulado de las paralelas en todos los mundos concebibles, estamos afirmando así que la geometría no euclidiana es in-

concebible, con lo cual nos retrotraemos a la misma actitud conceptual de Saccheri y de Lambert: un paso nada sabio, por cierto. *¿Pero entonces qué es lo que deben compartir todos los mundos concebibles, si no es toda la matemática?* ¿Sería algo tan reducido como la lógica? ¿o también hay que desconfiar de la lógica? ¿Podrá haber mundos donde las contradicciones sean una parte normal de la existencia: mundos donde las contradicciones no sean contradicciones?

Bien, en cierto sentido y por el solo hecho de haber inventado el concepto, hemos mostrado que tales mundos son perfectamente concebibles; no obstante, en un sentido más profundo, son a la vez por entero inconcebibles (lo cual configura una pequeña contradicción). Pero hablando con seriedad, pareciera que si queremos ser capaces de comunicarnos, debemos adoptar una base común, y aquí tiene que ser incluida la lógica. (Hay sistemas de creencias que rechazan este punto de vista, por excesivamente lógico. En particular, el zen acoge las contradicciones y las no contradicciones con la misma estimación. Esto puede parecer incoherente, pero en ese caso la incoherencia es parte del zen, y entonces . . . ¿qué puede uno decir?)

¿La teoría de los números sigue siendo la misma en cualquier mundo concebible?

Si suponemos que la *lógica* es parte de cualquier mundo concebible (no hemos dado aún una definición de "lógica", pero lo haremos en los próximos capítulos), ¿bastará con eso? ¿Es verdaderamente concebible que, en algunos mundos, no haya un número infinito de primos? ¿No sería necesario que los números respondieran a las mismas leyes en todos los mundos imaginables? ¿O . . . no será mejor considerar al concepto de "número natural" como un término indefinido, análogo a "PUNTO" o a "LINEA"? De ser así, la teoría de los números debería escindirse, como la geometría, de modo que haya teorías corrientes de los números y teorías no corrientes. Pero debería existir, para ello, un correlato de la geometría absoluta: una "esencia" teórica, un ingrediente invariante de todas las teorías de los números, que las identifique como teorías de los números y no como, digamos, teorías acerca del cacao, el caucho o los plátanos. Parece haber consenso dentro de la mayoría de los matemáticos y filósofos contemporáneos en el sentido de que *hay* tal esencialidad en teoría de los números, la cual debería ser incluida, junto con la lógica, dentro de lo que calificamos como "mundos concebibles". Esta esencia de la teoría de los números, este correlato de la geometría absoluta, es la llamada *aritmética de Peano*, y nosotros la formalizaremos en el Capítulo VIII. Además, ya se encuentra bien establecido —como cuestión de hecho, y como consecuencia directa del Teorema de Gödel— que la teoría de los números *es* una teoría escindida en versiones corrientes y no corrientes. A dife-

rencia de lo que ocurre en la geometría, sin embargo, la cantidad de variantes de teorías de los números es infinita, de lo que se deriva una situación notablemente más compleja.

Para fines *prácticos*, todas las teorías de los números son la misma. Es decir que si la construcción de un puente depende de la teoría de los números (lo cual, en cierto sentido, es así), el hecho de que haya diferentes teorías de los números no viene al caso pues, en los aspectos que atañen al mundo real, todas aquellas coinciden. No se puede decir lo mismo de las distintas geometrías; por ejemplo, la suma de los ángulos de un triángulo da como resultado 180 grados solamente dentro de la geometría euclidiana; la suma es mayor dentro de la geometría elíptica, y menor dentro de la hiperbólica. Se cuenta que Gauss, en una oportunidad, intentó obtener la suma de los ángulos de un gran triángulo descrito por los picos de tres montañas, con la finalidad de determinar, de una vez y para siempre qué clase de geometría rige verdaderamente nuestro universo. Cien años más tarde, Einstein formuló una teoría (la de la relatividad generalizada), según la cual la geometría del universo es determinada por la materia que éste contiene; en consecuencia, ninguna geometría es intrínseca al espacio mismo. De tal modo, la pregunta "*¿Cuál geometría es verdadera?*" recibe de la naturaleza una respuesta ambigua no sólo en el ámbito de la matemática, sino también en el de la física. En cuanto a la pregunta correlativa, "*¿Cuál teoría de los números es verdadera?*", tendremos más para decir luego de recorrer en detalle el Teorema de Gödel.

Completitud

Si la coherencia es la condición mínima bajo la cual los símbolos adquieren significados pasivos, su noción complementaria, la de *completitud*, actúa como ratificación máxima de esos significados. La coherencia es el atributo consistente en que "Todo lo producido por el sistema es verdadero", en tanto la completitud da un giro: "Toda proposición verdadera es producida por el sistema". Vamos a desarrollar un poco estos conceptos. No estamos hablando de todas las proposiciones verdaderas del mundo, sino exclusivamente de las pertenecientes al dominio que queremos representar a través del sistema. Luego, la completitud establece: "Toda proposición verdadera que puede ser expresada en la notación del sistema es un teorema".

Coherencia: cuando los teoremas, al ser interpretados, resultan verdaderos (en algún mundo imaginable).

Completitud: cuando todas las proposiciones que son verdaderas (en algún mundo imaginable), y que pueden ser expresadas como cadenas bien formadas del sistema son teoremas.

Un ejemplo de sistema formal completo, en su modesto nivel, lo constituye el sistema pq original, con su interpretación inicial. Todas las sumas verdaderas de dos enteros positivos son representadas por teoremas del sistema. Podemos formularlo de este otro modo: "Todas las sumas verdaderas de dos enteros positivos son *demostrables* dentro del sistema". (Atención: cuando comenzamos a emplear la expresión "proposiciones demostrables" en lugar de "teoremas", ello muestra que hemos dejado de distinguir nítidamente entre sistemas formales y sus interpretaciones. Esto es correcto, siempre que seamos conscientes de la ambigüedad que se está insinuando, y que recordemos que a veces es posible la existencia de interpretaciones múltiples.) El sistema pq con su interpretación original es *completo*; es, también, *coherente*, puesto que ninguna proposición falsa —para usar nuestra nueva expresión— es demostrable dentro del sistema.

Alguien podría sostener que el sistema es incompleto, sobre la base de que la suma de *tres* enteros positivos (tales como 2 + 3 + 4 = 9) no es representada por los teoremas del sistema pq, aun siendo traducible a la notación del sistema (por ejemplo, --p---p----q---------). Empero, esta cadena no está bien formada, y tiene que ser considerada tan carente de significado como p q p---q p q. La suma triple, sencillamente, no es *formulable* en la notación del sistema, por lo que la completitud del mismo se mantiene inalterada.

A pesar de ello, el sistema pq carece ciertamente de alcances como para capturar la noción íntegra de verdad correspondiente a la teoría de los números. Por ejemplo, no hay manera de que el sistema pq nos diga cuántos números primos hay. El Teorema de la Incompletitud, de Gödel, dice que cualquier sistema que sea "suficientemente poderoso" es, en virtud de su mismo poder, incompleto, pues hay cadenas bien formadas que enuncian proposiciones verdaderas de teoría de los números, pero no son teoremas. (Hay verdades pertenecientes a la teoría de los números que no son demostrables dentro del sistema.) Sistemas como el pq, completos pero no muy poderosos, se asemejan a los fonógrafos de baja fidelidad. Son, sobre todo, tan limitados, que obviamente no pueden cumplir con lo que nosotros desearíamos, a saber, que nos digan todo a propósito de la teoría de los números.

Cómo la incompletitud puede ser hecha o deshecha por una interpretación

¿Qué queremos decir con aquello de que "la completitud es la ratificación máxima de los significados pasivos"? Lo siguiente: que si un sistema es coherente, pero incompleto, hay un desajuste entre los símbolos y su interpretación. El sistema carece del poder suficiente para dar validez a esa interpretación. En ocasiones, si las interpretaciones son "acicaladas" un

poco, el sistema puede devenir completo. Esto puede ser ilustrado por el sistema pq modificado (incluyendo el esquema de axioma II) y la interpretación que le aplicamos.

Después de modificar el sistema pq, modificamos la interpretación de q: sustituimos "igual a" por "es mayor que o igual a". Vimos que el sistema pq modificado adquiría coherencia bajo esta interpretación, pero hay algo en esta última que no es enteramente satisfactorio. El problema es simple: existen ahora muchas verdades expresables que no son teoremas; por ejemplo, "2 más 3 es mayor que o igual a 1" es expresado por el no teorema --p---q-. ¡Es una interpretación demasiado desmañada! No refleja con exactitud las posibilidades de los teoremas del sistema. Bajo esta desmañada interpretación, el sistema pq no es completo. Podríamos hacer un reajuste, a través de (1) *el agregado de nuevas reglas* al sistema, que lo hagan más poderoso, o bien de (2) *la restricción interpretativa*. En nuestro caso, la alternativa más sensata es esta última, aparentemente, de manera que en lugar de interpretar q como "es mayor que o igual a", diríamos "es igual a o supera por 1". Ahora sí el sistema pq modificado adquiere coherencia y completitud, y esta última ratifica el carácter adecuado de la interpretación.

La incompletitud en la teoría de los números formalizada

Dentro de la teoría de los números, volvemos a tropezar con la incompletitud; y aquí, para remediar la situación, hay que tomar otro camino: el del agregado de nuevas reglas, que hagan más poderoso al sistema. Pero aparece la ironía de que, cada vez que incorporamos una nueva regla, nos sentimos seguros de que *ahora sí* el sistema es completo. La naturaleza del dilema puede ser manifestada por la siguiente alegoría . . .

Tenemos un fonógrafo, y un disco experimentalmente rotulado "Canon en B-A-C-H". Sin embargo, cuando queremos escuchar el disco mediante el fonógrafo, las vibraciones producidas por retroalimentación (similares a las causadas por los discos de la Tortuga) interfieren tanto que ni siquiera conseguimos distinguir la melodía. Concluimos entonces que *algo* falla: o el *disco* o el *fonógrafo*. Para probar el primero, tendríamos que pasarlo en el fonógrafo de un amigo y verificar su calidad; para probar el segundo, tendríamos que pasar en él otros discos y verificar si la música que escuchamos concuerda con los rótulos. Si nuestro fonógrafo aprueba su examen, diremos que la falla está en el disco y, en caso contrario, diremos que la falla está en el fonógrafo. Pero, ¿qué diremos si *ambos* aprueban sus respectivos exámenes? ¡Será el momento de recordar el encadenamiento de dos isomorfismos (figura 20), y meditar cuidadosamente!

Pequeño laberinto armónico

La Tortuga y Aquiles han ido a pasar el día a Coney Island. Luego de comprarse un par de copos de azúcar, deciden subir a la rueda de la fortuna.

Tortuga: Este es mi paseo predilecto. Parece que uno fuera tan lejos, y en realidad no va a ninguna parte.

Aquiles: Tengo una idea de por qué le gusta tanto. ¿Se sujetó?

Tortuga: Sí, creo que ya me abroché bien esto. ¡Bueno! ¡Ahí vamos! ¡Yupiii!

Aquiles: Ciertamente está usted eufórica hoy.

Tortuga: Tengo excelentes motivos: mi tía, que es adivina, me dijo que hoy tendré un gran golpe de suerte; así que ya estoy sintiendo el cosquilleo . . .

Aquiles: ¡No me diga que cree en la adivinación de las suertes!

Tortuga: No . . . pero lo que le dicen las adivinas se cumple lo mismo, aunque usted no crea en ellas.

Aquiles: Bueno, ésa es una gran cosa, seguramente.

Tortuga: Ah, qué vista de la playa, la gente, el océano, la ciudad . . .

Aquiles: Sí, espléndida, ciertamente. Y mire ese helicóptero allí; parece que volara en nuestra misma dirección. Ahora está casi exactamente encima de nosotros.

Tortuga: Qué extraño . . . cuelga un cable desde él y se extiende hasta muy cerca de nosotros, tan cerca que podríamos tomarlo.

Aquiles: ¡Mire! El cable tiene un gancho gigantesco en la punta, y hay una nota.

(Se estira y consigue atrapar el papel. Dejan atrás el gancho y siguen su recorrido.)

Tortuga: ¿Puede entender lo que dice la nota?

Aquiles: Sí, dice: "Hola, amigos. Agárrense del gancho la próxima vuelta, tendrán una Gran Sorpresa".

Tortuga: Esta nota es un poco cursi, pero quién sabe lo que nos puede deparar. Quizá tiene algo que ver con la buena fortuna que me anunció mi tía. ¡Vamos, pase lo que pase!

Aquiles: ¡Vamos!

(Apresuradamente, desabrochan sus cinturones de seguridad, y llegados a la parte más alta se aferran al enorme gancho. De inmediato el cable los iza, y en un instante llegan hasta el helicóptero; unas manos muy vigorosas los ayudan a subir.)

Voz: Bienvenidos a bordo . . . Bobitos.

Aquiles: ¿Qui . . . quién es usted?

Voz: Permítanme que me presente. Soy Hexaclorofeno J. Buenasuerte, Raptor en Grande, y Devorador de Tortugas por Excelencia, para servirles.

Tortuga: ¡Gulp!

Aquiles (a su amiga, en susurros): Mmmm . . . Creo que no es ésta la clase de "buena suerte" que esperábamos. (*A Buenasuerte*): Oh, si es que puedo ser curioso, ¿adónde tiene pensado conducirnos?

Buenasuerte: ¡Jo jo! ¡A mi cocina-completamente-eléctrica-de-los-cielos, donde prepararé *este* delicado manjar (*mira de soslayo a la Tortuga mientras habla*) en un delicioso pastel-de-los-cielos! Y que no haya confusiones: se trata sólo de mi placer gastronómico. ¡Jo jo jo!

Aquiles: Todo lo que puedo decir es que tiene usted una risa bastante perversa.

Buenasuerte (riendo perversamente): ¡Jo jo jo! Mi amigo, le costará cara esa observación. ¡Jo jo!

Aquiles: Oh, qué querrá decir con eso . . .

Buenasuerte: Muy sencillo: tengo en depósito una Siniestra Suerte destinada a ustedes. ¡Esperándolos! ¡Jo jo jo! ¡Jo jo jo!

Aquiles: ¡Ggggg!

Buenasuerte: Bueno, hemos llegado. Desembarquen, amigos míos, vean mi fabulosa cocina-completamente-eléctrica-de-los-cielos.

(*Los tres abandonan la nave.*)

Permítanme mostrarles, antes de encargarme de su futuro. Este es mi dormitorio . . . éste es mi estudio. Por favor, aguárdenme un momento, tengo que ir a afilar mis cuchillos. Mientras esperan, sírvanse unas palomitas de maíz. ¡Jo jo jo! ¡Pastel de Tortuga! ¡Pastel de Tortuga! ¡Mi pastel predilecto! (*Sale.*)

Aquiles: ¡Grgrgg!, ¡palomitas de maíz! ¡No voy a dejar una!

Tortuga: ¡Aquiles! ¡Pero si se hartó usted de copo de azúcar! Además, ¿cómo puede pensar en comida en estos momentos?

Aquiles: En qué salsa hemos caído . . . oh, perdón, no debería haber usado tal frase; quiero decir que en estas infortunadas circunstancias . . .

Tortuga: Creo que nuestra suerte está echada.

Aquiles: Venga, por favor, eche un vistazo a estos libros que el viejo Buenasuerte tiene en su estudio; una colección completamente esotérica: *Cabezas de chorlo que he conocido; Ajedrez y manejo de sombrilla sin esfuerzo; Concierto para zapateador y orquesta* . . . Hmmm.

Tortuga: ¿Qué es ese pequeño volumen abierto, ahí sobre la mesa, junto al dodecaedro y al cuaderno de dibujo?

Aquiles: ¿Este? Su título es *Excitantes aventuras de Aquiles y la Tortuga en distintas partes del mundo.*

Tortuga: Un título módicamente excitante.

Aquiles: Por cierto, y el episodio donde está abierto el libro parece excitante; se titula "Dyin y Tónico".

Tortuga: Hmmm . . . Quién sabe por qué. ¿Y si lo leemos? Yo podría hacer el papel de la Tortuga y usted el de Aquiles.

Aquiles: De acuerdo. No se pierde nada . . .

(*Comienzan a leer "Dyin y Tónico".*)

(Aquiles ha invitado a la Tortuga a ver su colección de reproducciones de obras de M. C. Escher, su pintor preferido.)

Tortuga: Son magníficas, Aquiles.

Aquiles: Sabía que le gustarían. ¿Hay alguna que le llame más la atención?

Tortuga: Una de mis predilectas es *Convexo y cóncavo*, donde dos mundos internamente coherentes, al ser yuxtapuestos, dan lugar a un mundo por completo incoherente. Los mundos incoherentes son lugares muy atractivos para visitar, pero no me gustaría vivir allí.

Aquiles: ¿Qué quiere usted decir con eso de "atractivos para visitar"? Los mundos incoherentes no EXISTEN, ¿cómo hará entonces para visitar alguno?

Tortuga: Usted perdone, pero ¿justamente no estábamos de acuerdo en que esta pintura de Escher nos presenta un mundo incoherente?

Aquiles: Sí, pero sólo se trata de un mundo bidimensional, un mundo ficticio, una imagen pintada. No se puede visitar ese mundo.

Tortuga: Tengo mis recursos . . .

Aquiles: ¿Cómo piensa introducirse en el universo plano de un cuadro?

Tortuga: Tomando una copita de JARABE DESPLAZADOR. Ese es el secreto.

Aquiles: ¿Qué cuernos es el jarabe desplazador?

Tortuga: Es un líquido que viene en frasquitos de cerámica; si se lo bebe cuando se está observando una pintura, se es "desplazado" dentro del mundo que el cuadro representa. Algunas personas que ignoraban los poderes del jarabe desplazador se han visto llevadas a situaciones muy sorprendentes.

Aquiles: ¿No hay antídoto? ¿No hay retorno, luego de desplazarse?

Tortuga: En algunos casos, eso no es tan malo. Pero sí hay otro jarabe . . . bueno, no es un jarabe, sino un elixir . . . no, no es un elixir, sino un . . . un . . .

Tortuga: Probablemente quiera decir "tónico".

Aquiles: ¿Tónico?

Tortuga: ¡Esa es la palabra que estaba buscando! "TONICO RECUPERADOR" es el nombre. Si usted retiene en su mano derecha una botella de este tónico cuando bebe el jarabe desplazador irá con usted dentro de la pintura; entonces, en el instante en que usted desee hacer "plop", irrumpiendo de regreso en la vida real, únicamente necesita un sorbo de tónico recuperador. Prestamente estará de nuevo en el mundo real, exactamente en el mismo sitio que ocupaba al desplazarse.

Aquiles: Pues parece muy interesante. ¿Y qué ocurre si uno toma un poco de tónico recuperador sin estar dentro de un cuadro?

Tortuga: No lo sé a ciencia cierta, Aquiles, pero yo preferiría ser cautelosa con estos extraños líquidos de desplazar y recuperar. Alguien de mi amistad, una Comadreja, hizo una vez lo que usted mencionaba, y no se supo más de ella desde entonces.

Aquiles: Qué desdicha. ¿Y uno puede llevar también consigo el frasco de jarabe desplazador?

Tortuga: Claro que sí. Hay que sostenerlo en la mano izquierda, y será desplazado junto con usted hacia el interior del cuadro que está observando.

Aquiles: ¿Qué pasa si uno encuentra una pintura dentro de la pintura a la que ya entró, y se toma otro trago de jarabe desplazador?

Tortuga: Precisamente lo que usted esperaría: va a dar dentro de la pintura que está en la pintura.

Aquiles: Supongo que habrá que hacer plop dos veces, entonces, para salir de la segunda pintura y reaparecer en la vida real.

Tortuga: Así es. Necesita "recuperarse" una vez por cada desplazamiento, puesto que con uno de éstos ingresa usted a una pintura, y con un plop sale.

Aquiles: Verá usted, todo esto se me hace difícil de creer . . . En verdad, ¿no está usted sondeando los límites de mi credulidad?

Tortuga: ¡Le juro que no! Fíjese, justamente aquí tengo dos frascos. (*Busca en su bolsillo superior, y extrae dos frascos nada pequeños, carentes de rótulo, en uno de los cuales chapotea un líquido rojo, mientras que en el otro chapotea un líquido azul.*) Si usted está dispuesto, podemos probar, ¿qué le parece?

Aquiles: Bueno, creo que, hem, quizá, hemm . . .

Tortuga: ¡Perfecto! Sabía que querría intentarlo. ¿Nos despla-

zamos dentro del mundo de *Convexo y cóncavo*, de Escher?

Aquiles: Bueno, eh, . . .

Tortuga: Entonces, es cosa resuelta. No debemos olvidarnos de llevar esta botella de tónico, para que nos podamos "recuperar" de regreso, ¿asume tan grave responsabilidad, Aquiles?

Aquiles: Es lo mismo . . . es lo mismo. Estoy algo nervioso; preferiría que usted, con su experiencia, se encargue de la operación.

Tortuga: Estoy de acuerdo. Todo listo, entonces.

(Así diciendo, la tortuga escancia dos pequeñas porciones de jarabe desplazador. Luego recoge el frasco de tónico y lo asegura firmemente en su mano derecha; ambos aproximan los vasos a sus labios.)

Tortuga: ¡Hasta el fondo!

(Beben.)

Aquiles: Tiene un sabor extraordinariamente raro.

Tortuga: Uno se acostumbra.

Aquiles: ¿El tónico sabe igual?

Tortuga: Oh, es una sensación completamente distinta. Cada vez que beba el tónico, experimentará una sensación profundamente satisfactoria, como si toda su vida hubiera estado deseando saborearlo.

Aquiles: Oh, no veo el momento de probarlo.

Tortuga: Bien, Aquiles, ¿dónde estamos?

Aquiles (observando a su alrededor): ¡Estamos en una pequeña góndola, deslizándonos por un canal! Tenemos que descender. Señor Gondolero: déjenos aquí, por favor.

(El gondolero no le presta la menor atención.)

Tortuga: Es que no entiende nuestro idioma. Si queremos salir de aquí, tendremos que brincar de inmediato, antes de que la barca entre al siniestro "Túnel del Amor", al cual casi estamos llegando.

(Aquiles, un tanto empalidecido, se encarama al borde en menos de un segundo, y luego ayuda a salir a su no tan ágil amiga.)

Aquiles: Por alguna razón, no me gustaba ese canal.



Figura 23. Convexo y cóncavo, *de M. C. Escher (litografía, 1955).*

Estoy contento de estar aquí fuera. Dígame, ¿cómo conoce usted tan bien este lugar?, ¿ha estado aquí antes?

Tortuga: Muchas veces, pero siempre que he venido lo he hecho desde otros cuadros de Escher, los cuales están conectados por detrás de los marcos, ¿lo sabía? Si usted se introduce en uno, desde allí puede llegar a cualquier otro.

Aquiles: ¡Pasmoso! Si no estuviera aquí, viendo todas estas cosas con mis propios ojos, estoy seguro de que no le hubiera creído a usted. (*Pasan a través de una pequeña bóveda.*) Oh, mire esos dos bonitos lagartos.

Tortuga: ¿Bonitos? No son bonitos . . . sólo pensar en

ellos me hace estremecer. Son los implacables guardianes de esa lámpara mágica de cobre que cuelga del techo, ahí delante. Basta un toque de sus lenguas para que cualquier mortal se convierta en escabeche.

Aquiles: ¿Escabeche ácido o dulce?

Tortuga: Acido.

Aquiles: Oh, qué amargo destino. Pero si la lámpara tiene poderes mágicos, me gustaría probar de conseguirla.

Tortuga: Es un intento muy atrevido, amigo mío. Yo no me arriesgaría.

Aquiles: Voy a tratar nada más que una vez.

(Se aproxima sigilosamente a la lámpara, asegurándose de no despertar a un jovencito, dormido en las cercanías. Pero de pronto, resbala en una extraña depresión del piso, con forma de concha marina, y va a parar al vacío. Balanceándose alocadamente, busca inútilmente algo de qué asirse, hasta que se las arregla para aferrarse de la lámpara con una mano. Braceando salvajemente, ve cómo los silbantes lagartos estiran sus lenguas hacia él, que cuelga desamparado.)

Aquiles: ¡So . . . Soc . . . Socorro!

(Su grito atrae la atención de una mujer, quien se precipita escaleras abajo, y despierta al dormido. Este, sonriendo afectuosamente, indica a Aquiles, mediante gestos, que no se preocupe y se dirige a gritos, en una lengua gutural, a dos trompeteros asomados a ventanas ubicadas en lo alto. Inmediatamente, fantásticos sonidos comienzan a oírse, acompasadamente. El joven que dormía señala los lagartos, y Aquiles ve que la música ejerce poderosos efectos soporíferos sobre ellos. Poco demoran en quedar inconscientes. Entonces, el servicial muchacho da voces a dos compañeros que están trepando por sendas escaleras, quienes tiran de éstas hacia arriba y luego las extienden atravesando el espacio por debajo del desesperado Aquiles. Forman así una especie de puente y sus gestos le señalan claramente a aquel que debe apresurarse a utilizarlo. Pero Aquiles, antes de

hacerlo, desengancha cuidadosamente el eslabón del que pende la lámpara y, ya con ésta en la mano, se descuelga sobre las escaleras-puente; los tres jóvenes lo ayudan a terminar de ponerse a salvo. Aquiles extiende hacia ellos los brazos y les agradece efusivamente.)

Aquiles: Oh, señora Tortuga, ¿cómo podré compensarlos?

Tortuga: Pude saber que a estos valientes jóvenes les encanta el café, y en la población, más abajo, hay un lugar donde hacen un expreso incomparable. ¡Invítelos a una taza!

Aquiles: Eso daría en el clavo.

(Así, empleando una sucesión más bien cómica de gesticulaciones, sonrisas y palabras, Aquiles consigue transmitir su invitación a los jóvenes. Salen los cinco y bajan hacia la ciudad, descendiendo escarpadas escaleras. Llegan a un pequeño y grato café, toman asiento en la parte exterior y ordenan cinco expresos. Cuando los están bebiendo, Aquiles recuerda que tiene la lámpara consigo.)

Aquiles: Lo había olvidado, señora Tortuga: tengo aquí la lámpara mágica. Pero, ¿qué es lo que tiene de mágico?

Tortuga: Oh, usted sabe, sólo lo habitual: un genio.

Aquiles: ¿Qué? ¡Quiere usted decir un genio que aparece al frotar la lámpara y concede los deseos que se le formulan?

Tortuga: Eso es. ¿Qué esperaba usted? ¿Una lluvia de dinero?

Aquiles: ¡Caray, esto es fantástico! Y puedo pedir lo que se me ocurra, ¿verdad? Siempre he deseado que me sucediera algo así . . .

(Aquiles frota suavemente la gran letra "L" que aparece grabada sobre la superficie de cobre de la lámpara . . . Súbitamente, se produce una enorme bocanada de humo, que a los ojos de los cinco amigos toma la forma de una figura espectral, la cual queda elevada sobre ellos.)

Genio: Hola, amigos; les agradezco mucho que hayan rescatado mi Lámpara de manos del malvado Dúo de Lagartos.

(Mientras habla, el Genio recoge la Lámpara y la introduce en el fondo de un bolsillo oculto entre los pliegues de su gran túnica espectral, que se arremolinan en torno a la Lámpara.)

Como muestra de gratitud por vuestro heroico acto, querría ofrecerles, de parte de mi Lámpara, la oportunidad de convertir en realidad tres de vuestros deseos.

Aquiles: ¡Maravilloso! ¿Qué dice usted, señora Tortuga?

Tortuga: Yo, encantada. Adelante, Aquiles, diga su primer deseo.

Aquiles: ¡Uuyy! ¿Pero qué puedo pedir? ¡Oh, ya sé! Es algo que se me ocurrió cuando leí por primera vez *Las mil y una noches* (esa ingenua colección de cuentos, metidos unos dentro de otros): deseo que se me cumplan CIEN deseos, en lugar de tres. ¡Sumamente sagaz! ¿Verdad, señora Tortuga? Estoy seguro de que USTED jamás hubiera pensado en este ardid. Siempre me pregunté por qué todos esos aletargados personajes de los relatos nunca habían tenido esa idea.

Tortuga: Quizá encuentre ahora la respuesta.

Genio: Lo lamento, Aquiles, pero no concedo metadeseos.

Aquiles: ¡Deseo que me explique usted qué es un "metadeseo"!

Genio: Pero ESO es un meta-metadeseo, Aquiles, y tampoco los concedo.

Aquiles: ¿Queeeé? No lo entiendo, en absoluto.

Tortuga: ¿Por qué no repite usted su último pedido, Aquiles?

Aquiles: ¿Qué quiere decir? ¿Por qué debo hacer eso?

Tortuga: Bueno, usted comenzó diciendo "Deseo". Puesto que está requiriendo información, ¿por qué no se limita a hacer una pregunta?

Aquiles: Está bien, aunque no veo la razón. Dígame, señor Genio, ¿qué es un metadeseo?

Genio: Es simplemente un deseo que trata de deseos. A mí no me está permitido satisfacer metadeseos. Mis

facultades no van más allá de dar cumplimiento a deseos comunes y corrientes, como por ejemplo hacerse de diez botellas de cerveza, tener a Elena de Troya sobre una colcha, pasar un fin de semana en Copacabana con todos los gastos pagados para dos: usted sabe, cosas simples de esta clase. Pero metadeseos no. DIOS no me lo permitiría.

Aquiles: ¿DIOS? ¿Quién es DIOS? ¿Y por qué no le permite a usted conceder metadeseos? Estos parecen cosas sin mayor importancia en comparación con los deseos que usted menciona.

Genio: Bueno, es un asunto complicado, créame. ¿Por qué no se limita a formular simplemente sus tres deseos? O uno, al menos. Usted verá, no tengo todo el tiempo del mundo. . .

Aquiles: Oh, qué mala pata. Estaba TAN ILUSIONADO con pedir que se me concedieran cien deseos . . .

Genio: Caramba, no me gusta ver a alguien tan decepcionado. Y, además, los metadeseos son mi clase preferida de deseos. Déjeme ver si puedo hacer algo al respecto; sólo me llevará un momento . . .

(Busca entre los abultados pliegues de su túnica y saca un objeto casi idéntico a la Lámpara de cobre, sólo que ésta es de plata, y donde la otra tenía grabada una 'L', ésta presenta dos letras más pequeñas, situadas en la misma área: 'ML'.)

Aquiles: ¿Y eso qué es?

Genio: Es mi Meta-Lámpara . . .

(Frota la Meta-Lámpara y aparece una enorme bocanada de humo, que ondula hasta adoptar la forma de una figura espectral, elevada sobre la lámpara.)

Meta-Genio: Soy el Meta-Genio. ¿Me llamaste, Oh Genio? ¿Cuál es tu deseo?

Genio: Tengo un deseo especial para plantearles, a ti y a DIOS, Oh Dyin. Deseo que en forma temporaria, por el tiempo de duración de un Deseo Atípico, se suspenda todo género de restricciones en materia de deseos. ¿Podrías concederme este deseo, por favor?

Meta-Genio: Tendré que asesorarme, a través

de los Canales correspondientes; sólo me llevará medio momento . . .

(Y, doblemente más rápido que el Genio, el Meta-Genio busca entre los abultados pliegues de su túnica y saca un objeto casi idéntico a la Meta-Lámpara de plata, sólo que ésta es de oro, y donde la otra tenía grabado 'ML', ésta presenta tres letras más pequeñas, situadas en la misma área: 'MML'.)

Aquiles (su voz ha subido una octava): ¿Y eso qué es?

Meta-Genio: Es mi Meta-Meta-Lámpara . . .

(Frota la Meta-Meta-Lámpara y aparece una enorme bocanada de humo, que ondula hasta adoptar la forma de una figura espectral, elevada sobre la lámpara.)

Meta-Meta-Genio: Soy el Meta-Meta-Genio. ¿Me llamaste, Oh Meta-Genio? ¿Cuál es tu deseo?

Meta-Genio: Tengo un deseo especial para plantearles, a ti y a DIOS, Oh Dyin. Deseo que en forma temporaria, por el tiempo de duración de un Deseo Atípico, se suspenda todo género de restricciones en materia de deseos. ¿Podrías concederme este deseo, por favor?

Meta-Meta-Genio: Tendré que asesorarme, a través de los Canales correspondientes; sólo me llevará un cuarto de momento . . .

(Y, doblemente más rápido que el Meta-Genio, el Meta-Meta-Genio busca entre los abultados pliegues de su túnica y saca un objeto casi idéntico a

la Meta-Meta-Lámpara de oro,
sólo que ésta es de . . . .)

.
.
.
.
.
: : :{DIOS}
.
.
.
.
.

(. . . forma un torbellino que se introduce en la Meta-Meta-Meta-Lámpara, a la que entonces el Meta-Meta-Genio guarda entre los pliegues de su túnica, con la mitad de la rapidez con que el Meta-Meta-Meta-Genio guardara la suya.)

Tu deseo es concedido, Oh Meta-Genio.

Meta-Genio: Gracias, Oh Dyin y DIOS.

(Y el Meta-Meta-Genio, igual que los genios superiores antes que él, forma un torbellino que se introduce en la Meta-Meta-Lámpara, a la que entonces el Meta-Genio guarda entre los pliegues de su túnica, con la mitad de la rapidez con que el Meta-Meta Genio guardara la suya.)

Tu deseo es concedido, Oh Genio.

Genio: Gracias, Oh Dyin y DIOS.

(Y el Meta-Genio, igual que los genios superiores antes que él, forma un torbellino que se introduce en la Meta-Lámpara, a la que entonces el Genio guarda entre los pliegues de su túnica, con la mitad de la rapidez con que el Meta-Genio guardara la suya.)

Su deseo es concedido, Aquiles.

(Exactamente un momento ha transcurrido desde que él dijera "sólo me llevará un momento".)

Aquiles: Gracias, Oh Dyin y DIOS.

Genio: Me complace informarle, Aquiles, que puede usted formular exclusivamente un (1) Deseo Atípico, es decir, un deseo, o un metadeseo, o un meta-metadeseo, o cuantos "meta" usted desee, inclusive una cantidad infinita (si usted lo desea).

Aquiles: Oh, muchísimas gracias, Genio. Pero me siento lleno de curiosidad. Antes de satisfacer mi deseo, ¿tendría inconveniente en decirme quién, o qué, es DIOS?

Genio: Ninguno. "DIOS" es la sigla de la expresión "DIOS que Imparte Ordenes al Subsiguiente". El subsiguiente dyin, es claro. La palabra "dyin" designa Genios, Meta-Genios, Meta-Meta-Genios, etc. Es una palabra Atípica.

Aquiles: Pero . . . pero . . . ¿cómo la palabra "DIOS" puede ser la sigla de una expresión donde también aparece?

Genio: Oh, ¿es que no conoce usted siglas recursivas? Pensaba que le eran familiares a todo el mundo. Fíjese, "DIOS" representa a "DIOS que Imparte Ordenes al Subsiguiente", que puede ampliarse así: "DIOS" que Imparte Ordenes al Subsiguiente, que Imparte Ordenes al Subsiguiente", que a su vez puede ampliarse de nuevo: "DIOS que Imparte Ordenes al Subsiguiente, que Imparte Ordenes al Subsiguiente, que Imparte Ordenes al Subsiguiente; y esto, por su parte, puede también ampliarse . . . Se puede seguir a voluntad.

Aquiles: ¡Pero no se terminaría nunca!

Genio: Por supuesto que no. DIOS no puede ser ampliado totalmente nunca.

Aquiles: Mmmm . . . Esto es intrigante. ¿Qué quería significar usted cuando le dijo al Meta-Genio, "Tengo un deseo especial para plantearles, a ti y a DIOS, Oh Dyin"?

Genio: Yo necesitaba presentar mi solicitud no sólo al Meta-Genio, sino también a todos los dyin que imparten órdenes por encima de él. El método de la sigla recursiva permite cumplir con ello de modo enteramente natural. Vea usted, al recibir mi solici-

tud, el Meta-Genio tenía que transmitirla más arriba, a su DIOS: elevó entonces el mensaje al Meta-Meta-Genio, quien hizo después lo propio ante el Meta-Meta-Meta-Genio . . . Subiendo por la cadena de esta manera se transmite el mensaje a DIOS.

Aquiles: Me doy cuenta. DIOS está en la cumbre de la escala de dyins.

Genio: ¡No, no, no! No hay nada "en la cumbre", pues no hay cumbre. Por eso DIOS es una sigla recursiva. DIOS no es un dyin último: DIOS es la torre de dyins ubicada por encima de un dyin dado.

Tortuga: Me parece que todos y cada uno de los dyin han de tener un concepto diferente de lo que es DIOS, entonces, puesto que para un dyin DIOS es el conjunto de dyins que tiene por encima de sí, y no hay dos dyins que compartan el mismo conjunto.

Genio: Está usted completamente en lo cierto, y como yo soy el dyin que está más abajo en la escala, mi noción de DIOS es la más entusiasta. Compadezco a los dyins más altos, que creen estar algo más cerca de DIOS. ¡Qué blasfemia!

Aquiles: ¡Por D . . .! Han de haber hecho falta genios para inventar a DIOS.

Tortuga: ¿Cree realmente en todos esos chismes acerca de DIOS, Aquiles?

Aquiles: Es claro que sí. ¿Es usted atea, señora T? ¿O agnóstica?

Tortuga: Creo que soy agnóstica. O quizá meta-agnóstica.

Aquiles: ¿Queeeeé? No le entiendo.

Tortuga: Vamos a ver . . . Si yo fuera meta-agnóstica, no estaría segura de si soy agnóstica o no: pero no sé bien si ESA es la forma en que considero esto; en consecuencia, debo ser meta-meta-agnóstica (presumo). En fin. Dígame, Genio, ¿nunca cometen errores los dyin, como por ejemplo distorsionar los mensajes que suben o bajan por la escala?

Genio: Suele ocurrir: es la causa más frecuente de que no sean concedidos los Deseos Atípicos. Mire usted, las posibilidades de que se produzca una distorsión en un eslabón PARTICULAR de la cadena son infinitesimales; pero si usted acumula un número infinito de eslabones en una misma serie, pasa a ser virtualmente seguro que, EN ALGUNA PARTE, ocurrirá un error. En realidad, aunque parezca raro, es usual que se produzca un número infinito de erro-

res, si bien se distribuyen diseminadamente a lo largo de la cadena.

Aquiles: Entonces, es todo un milagro que un Deseo Atípico consiga concretarse.

Genio: Fíjese que no es así. Muchas distorsiones son intrascendentes, y muchas otras tienden a neutralizarse entre sí. Pero alguna vez —por excepción, en verdad— la falta de cumplimiento de un Deseo Atípico tiene su origen en la desafortunada distorsión provocada por un solo dyin. Cuando esto ocurre, el dyin responsable recibe un castigo de duración infinita, que consiste en recibir palmadas en sus nalgas, propinadas por DIOS. Es muy divertido para los que dan las palmadas, y enteramente inofensivo para el condenado. Pasaría usted un rato agradable viendo este espectáculo.

Aquiles: ¡Me encantaría! ¿Pero esto únicamente sucede cuando deja de ser cumplido un Deseo Atípico?

Genio: Así es.

Aquiles: Mmmm . . . Esto me da una idea para mi deseo.

Tortuga: Oh, ¿de veras? ¿Cuál?

Aquiles: ¡Deseo que no se quiera conceder mi deseo!

(En este instante, tiene lugar un hecho —si es que "hecho" es la palabra adecuada— imposible de describir, razón por la cual no se hará el menor intento de describirlo.)

Aquiles: ¿Qué cuernos significa esa misteriosa frase?

Tortuga: Se refiere al Deseo Atípico que formuló Aquiles.

Aquiles: Pero él todavía no había formulado su deseo.

Tortuga: Sí, lo había hecho. Dijo, "deseo que no se quiera conceder mi deseo", y el Genio entendió que ESE era su deseo.

(En ese momento, se oyen pasos que vienen hacia ellos por el pasillo.)

Aquiles: ¡Ay, ay, ay! Esos sonidos ominosos.

(Los pasos se detienen; luego parecen girar y por fin desaparecen.)

Tortuga: ¡Gulp!

Aquiles: ¿Pero la historia sigue o terminó? Demos vuelta a la página y veamos.

(Así lo hacen, y descubren que el relato continúa . . .)

Aquiles: ¡Eh! ¿Qué pasó? ¿Dónde está mi Genio? ¿Mi lámpara? ¿Mi taza de expreso? ¿Qué se hicieron nuestros amigos de los mundos Convexo y Cóncavo? ¿Qué hacen aquí todos estos pequeños lagartos?

Tortuga: Tengo la impresión de que nuestro contexto ha sido incorrectamente restablecido, Aquiles.

Aquiles: ¿Qué cuernos significa esa misteriosa frase?

Tortuga: Me refiero al Deseo Atípico que usted formuló.

Aquiles: Pero si yo no lo había formulado todavía.

Tortuga: Sí, usted lo había hecho. Dijo usted, "deseo que no se quiera conceder mi deseo", y el Genio entendió que ESE era su deseo.

Aquiles: ¡Ay, ay, ay! Eso suena ominoso.

Tortuga: Eso se llama PARADOJA. Para que el Deseo Atípico fuese concedido, tenía que ser denegado: sin embargo, no concederlo era concederlo.

Aquiles: ¿Y qué pasaba? ¿Se detenía la Tierra? ¿Se destruía el universo?

Tortuga: No. Se hacía añicos el Sistema.

Aquiles: ¿Qué quiere decir eso?

Tortuga: Significa que usted y yo, Aquiles, fuimos súbita e instantáneamente trasladados a Tumbolia.

Aquiles: ¿Adónde?

Tortuga: A Tumbolia: la tierra de los hipos muertos y de las bombillas eléctricas inservibles. Es una suerte de sala de espera, donde las programaciones inactivas esperan el procesamiento correspondiente, que las rescate. Imposible decir cuánto tiempo estuvo deshecho el Sistema, ni nosotros en Tumbolia: pueden haber transcurrido momentos, horas, días . . . años inclusive.

Aquiles: No sé lo que son las programaciones, ni tampoco los procesamientos. Lo que sí sé es que no consigo que se cumplan mis deseos. ¡Quiero que vuelva mi Genio!

Tortuga: Lo lamento, Aquiles, está usted confundido. Usted destruyó el Sistema, y debería estar agradecido de que, a pesar de eso, hayamos vuelto; las cosas podrían haber sido terriblemente peores. Pero no tengo la menor idea acerca de dónde estamos.

Aquiles: Ahora me ubico: estamos dentro de otra de las pinturas de Escher, *Reptiles*.

Tortuga: ¡Ajá! Antes de su colapso, el Sistema trató de preservar todo lo que pudiera de nuestro contexto, y consiguió registrar que éste consistía en un cuadro

de Escher donde había lagartos. Esto es digno de aplauso.

Aquiles: Mire, ¿no es ése nuestro frasco de tónico recuperador, allí sobre la mesa, junto al círculo de lagartos?

Tortuga: Ciertamente que sí, Aquiles. Debo decir que, sin ninguna duda, somos muy afortunados. El Sistema ha sido grandemente benévolo con nosotros, al permitirnos recuperar nuestro tónico recuperador . . . esa preciosa sustancia . . .

Aquiles: ¡Ya, señora T! Ahora nos "recuperamos" del mundo de Escher, y volvemos a mi casa.

Tortuga: Hay un par de libros sobre la mesa, junto al tónico. ¿Qué libros serán? (*Toma el más pequeño, que está abierto al azar.*) Este parece módicamente excitante.

Aquiles: Oh, ¿sí? ¿Cuál es su título?

Tortuga: *Excitantes aventuras de Aquiles y la Tortuga en distintas partes del mundo*. Parece interesante.

Aquiles: Bien, puede USTED leerlo si quiere, pero yo no pienso correr ningún riesgo con ese tónico recuperador; cualquiera de los lagartos puede hacerlo caer de la mesa, ¡así que voy a cogerlo ahora mismo!

(Se precipita sobre la mesa y toma el tónico recuperador, pero en su prisa el frasco se le escapa, cae y comienza a rodar.)

¡Oh, no! ¡Mire, señora T! ¡Sin querer he tirado el tónico al piso, y está rodando hacia . . . hacia . . . la escalera! ¡Rápido, antes de que caiga!

(La Tortuga, sin embargo, está completamente sumergida en el delgado volumen que sostiene entre sus manos.)

Tortuga (murmurando): ¿Eh? Esta narración parece fascinante.

Aquiles: ¡Señora T, señora T, auxilio! Ayúdeme a atrapar el frasco de tónico . . .

Tortuga: ¿Por qué tantos gritos?

Aquiles: El frasco de tónico . . . lo tiré de la mesa, y ahora se va rodando y . . .

(En ese instante el frasco llega al borde del hueco de la escalera y cae a plomo . . .)



Figura 24. Reptiles, *de M. C. Escher (litografía, 1943).*

¡Oh, no! ¿Qué haremos? Señora Tortuga, ¿no se angustia usted? ¡Hemos perdido nuestro tónico! ¡Acaba de caerse por el hueco de la escalera! ¡Hay solamente una cosa que podamos hacer! ¡Tenemos que ingresar en un relato!

Tortuga: ¿Ingresar en un relato? Mis plácemes. ¿Me acompaña?

(Comienza a leer en voz alta; Aquiles mira sin decidirse a la Tortuga y alternativamente a la escalera; finalmente se tranquiliza y asume el papel de la Tortuga.)

Aquiles: Está muy oscuro aquí, señora T. No puedo ver nada. ¡Uf! Me di contra una pared. ¡Cuidado!

Tortuga: Tengo acá un par de bastones. ¿Por qué no usa uno de ellos? Podría llevarlo apuntando hacia adelante, de modo que no sea usted quien choque con las cosas.

Aquiles: Excelente idea. (*Toma el bastón.*) ¿Tiene usted la sensación de que este camino se curva ligeramente hacia la izquierda, a medida que avanzamos?

Tortuga: Muy suavemente, sí.

Aquiles: Quién sabe adónde estamos. Y si volveremos a ver la luz del día. Desearía no haberla escuchado cuando me insinuó usted que tragara un poco de aquel "BEBEME".

Tortuga: Se lo aseguro, es completamente inofensivo. Yo lo he tomado la mar de veces y ni una sola tuve que lamentarlo. Cálmese y disfrute de su pequeñez.

Aquiles: ¿De mi pequeñez? ¿Qué ha hecho usted conmigo, señora T?

Tortuga: No me culpe a mí ahora. Usted actuó en forma voluntaria.

Aquiles: ¿Me ha hecho usted encoger? ¿Así que este laberinto donde estamos es en realidad una cosa pequeñita que alguien podría PISAR?

Tortuga: ¿Laberinto? ¿Laberinto? ¿Será posible? ¿Estamos en el célebre Pequeño Laberinto Armónico del pavoroso Mayotauro?

Aquiles: ¡Uuuh! ¿Qué es eso?

Tortuga: Dicen —por mi parte, jamás lo creí— que un Malvado Mayotauro creó un laberinto diminuto, y ubicó en su centro un foso, a la espera de las víctimas inocentes que se extraviasen en su horrenda complejidad. Cuando esto ocurre, y aquéllas vagan perdidas y desorientadas por el corazón del laberinto, el Mayotauro ríe y ríe, y ríe tan fuerte que las víctimas terminan muriendo.

Aquiles: ¡Oh, no!

Tortuga: No es más que un mito. Valor, Aquiles.

(Y la intrépida pareja sigue caminando.)

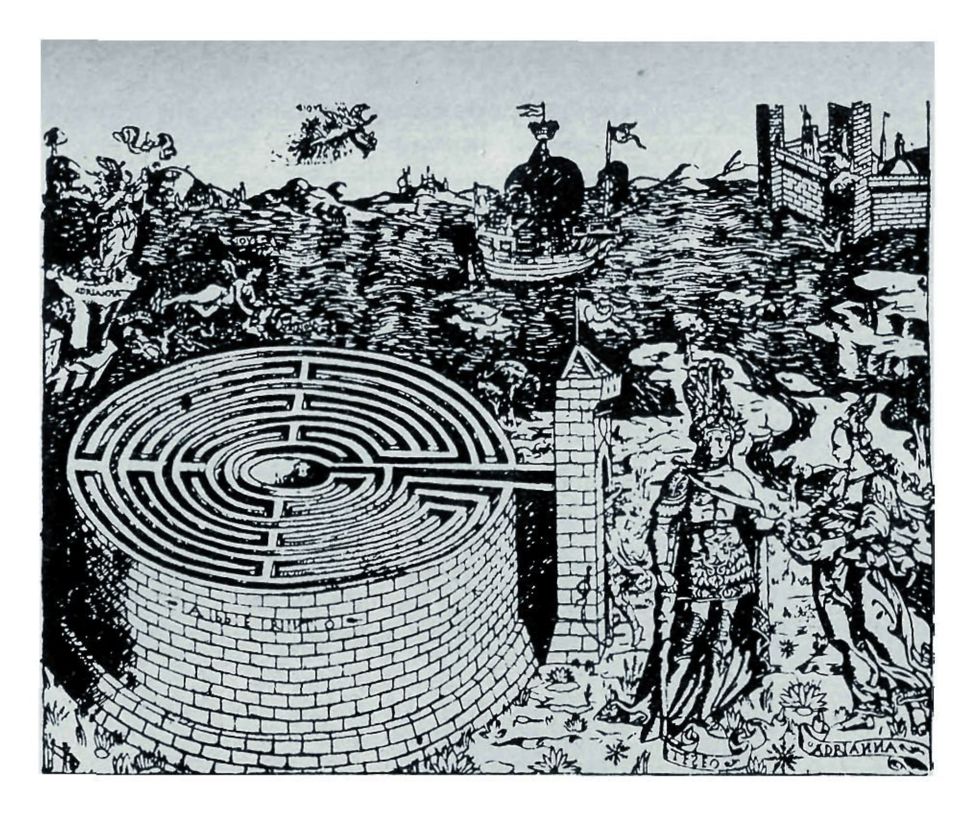


Figura 25. Laberinto de Creta (grabado italiano; escuela de Finiguerra*). [Tomado de: W. H. Matthews,* Mazes and Labyrinths: Their History and Development *(New York: Dover Publications, 1970).]*

Aquiles: Palpe estas paredes. Parecen de hojalata ondulada, o algo así. Pero las ondulaciones no son iguales entre sí.

(Para subrayar su afirmación, apoya su bastón contra la superficie de la pared, en tanto sigue caminando. El rebote del bastón sobre las ondulaciones despierta profundos ecos hacia todos lados, en el extenso corredor curvo por el que avanzan.)

Tortuga (alarmada): ¿Qué es ESO?

Aquiles: Oh, nada, nada; es que estoy frotando mi bastón contra la pared.

Tortuga: ¡Aaaah! Pensé que eran los bramidos del feroz Mayotauro.

Aquiles: Creía haberle escuchado que se trata sólo de un mito.

Tortuga: Por supuesto que lo es. Nada como para asustarse.

(Aquiles vuelve a apoyar su bastón contra la pared y continúa caminando. Se oyen entonces algunos sonidos musicales, surgiendo del punto donde el bászton raspa la pared.)

Tortuga: ¡Ay, ay! Tengo un mal presentimiento, Aquiles. Este Laberinto quizá no sea un mito, después de todo.

Aquiles: Un momento, ¿qué la ha hecho cambiar de idea tan de pronto?

Tortuga: ¿Oye esa música?

(Para escuchar más claramente, Aquiles retira el bastón: los jirones de melodía cesan.)

¡Eh! ¡Vuelva a apoyar eso! Quiero escuchar el final de esta pieza.

(Confundido, Aquiles obedece: la música vuelve a oírse.)

Gracias. Ahora bien, tal como le dije que iba a hacer, acabo de determinar dónde estamos.

Aquiles: ¿Sí? ¿Dónde?

Tortuga: Estamos caminando por el surco en espiral de un disco que está guardado en su envoltorio. Cuando su bastón presiona las extrañas formas de la pared, actúa como una aguja sobre el surco, permitiéndonos escuchar la música.

Aquiles: Oh, no, oh, no . . .

Tortuga: ¿Cómo? ¿No se siente usted felicísimo? ¿Acaso tuvo oportunidad, alguna vez, de estar en tan íntimo contacto con la música?

Aquiles: Nunca podré ganar carreras pedestres entre personas de tamaño normal, señora Tortuga, si soy más pequeño que una pulga.

Tortuga: Oh, ¿eso es todo? No es para preocuparse, Aquiles.

Aquiles: Por la forma en que habla, tengo la impresión de que usted nunca se preocupa por nada.

Tortuga: No sé. Pero sí es cierto que no me inquieta ser pequeña. Y mucho menos ahora, que tenemos por delante el terrible peligro del pavoroso Mayotauro . . .

Aquiles: ¡Horror! Me está usted diciendo . . .

Tortuga: Así lo creo, Aquiles. La música nos ha delatado.

Aquiles: ¿Cómo es posible?

Tortuga: Muy sencillo. Cuando escuché la melodía B-A-C-H en la voz alta, comprendí de inmediato que los surcos por los que estamos caminando no pueden corresponder sino al *Pequeño Laberinto Armónico*, una de las piezas para órgano menos conocidas de Bach. Se la llama así a causa de sus modulaciones vertiginosamente frecuentes.

Aquiles: ¿Qué es eso?

Tortuga: Bueno, usted sabe que la mayoría de las piezas musicales están compuestas en una tonalidad determinada, como por ejemplo C mayor, que es la de esta obra.

Aquiles: Algo recuerdo haber oído respecto a ese término. Significa que C es la nota que uno quiere oír al final, ¿verdad?

Tortuga: Sí, pesa como la idea del propio hogar, en cierto sentido. En realidad, lo más frecuente es que se le llame "tónica" a esa nota.

Aquiles: ¿Uno se aparta entonces de la tónica, con el propósito de terminar regresando a ella?

Tortuga: Exacto. Cuando la pieza avanza, aparecen otros acordes y melodías, que se alejan de la tónica. Poco a poco, sube la tensión y uno experimenta el anhelo creciente de retornar al hogar, de escuchar el elemento tónico.

Aquiles: ¿Será por eso que, al terminar una pieza, siempre me siento tan satisfecho, como si me hubiera pasado la vida esperando escuchar ese elemento?

Tortuga: Así es. El compositor ha empleado su conocimiento de las progresiones armónicas

para orientar nuestras emociones y para estimular nuestro deseo de escuchar la tónica.

Aquiles: Pero iba usted a hablarme de las modulaciones.

Tortuga: Oh, sí. Algo muy saliente que puede hacer un compositor es "modular" una parte del transcurso de una pieza, lo cual significa que establece un objetivo transitorio, distinto a la resolución guiada por la tónica.

Aquiles: Ya veo . . . supongo. ¿Quiere usted decir que ciertas secuencias de acordes desplazan la tensión armónica, a través de una manera que yo, entonces, quiero resolver en una nota distinta?

Tortuga: Correcto. Y eso complica la situación pues, a pesar de que usted anhela una resolución a breve plazo, en todo momento usted conserva, en el fondo de su mente, el deseo profundo de satisfacer la expectativa original: en este caso, C mayor. Y cuando es satisfecha la expectativa subsidiaria, hay . . .

Aquiles (gesticulando con súbito entusiasmo): ¡Oh, escuche los magníficos acordes que ascienden y se precipitan, señalando el final del *Pequeño Laberinto Armónico*!

Tortuga: No, Aquiles, no es el final. Es sólo . . .

Aquiles: ¡Pero sí! ¡Ah, oh! ¡Qué vigorosa, enérgica conclusión! ¡Qué placer! ¡Eso es resolver! ¡Aaaah!

(Como quiera que sea, en ese momento la música cesa, al tiempo que los dos amigos desembocan en una zona abierta, carente de muros.)

Ya lo ve, ha finalizado, ¿qué le decía yo?

Tortuga: Acá hay una terrible confusión. Este disco es una deshonra para el mundo de la música.

Aquiles: ¿Por qué?

Tortuga: Por lo que le estaba diciendo. Aquí Bach moduló de C a G, creando la expectativa secundaria de escuchar G. Esto significa que usted experimenta dos tensiones al mismo tiempo: la de aguardar una resolución

dentro de G, pero también, en lo recóndito de su mente, la espera primordial de una resolución esplendorosa dentro de C mayor.

Aquiles: ¿Y por qué la mente tiene que intervenir cuando se escucha música? ¿Acaso la música es exclusivamente un ejercicio intelectual?

Tortuga: No, por supuesto que no. Alguna música es altamente intelectual, pero la mayor parte de la música no lo es. Lo que sucede es que, en casi todo momento, su oído o su cerebro cumplen el trabajo de "computar", haciendo que sus emociones sepan qué van a querer escuchar. Usted no tiene que plantearse esto conscientemente. Pero en esta pieza, Bach ha desarrollado artimañas con el propósito de llevar fuera de foco al oyente. Y con usted, Aquiles, ha tenido pleno éxito.

Aquiles: ¿Me está diciendo usted que yo he respondido a la resolución de una tónica secundaria como si fuera la principal?

Tortuga: Sí.

Aquiles: Pues eso aún me suena como una conclusión.

Tortuga: Con toda intención, Bach hizo que sonara así. Usted acaba de caer en su trampa, deliberadamente urdida para simular un final: pero si usted analiza atentamente la progresión armónica, verá que gira en torno de una nota impropia. Evidentemente, no sólo usted sino también esta lamentable empresa discográfica mordió el mismo anzuelo, ¡y mutiló la pieza, terminándola antes de tiempo!

Aquiles: ¡Qué cochina trampa me ha hecho Bach!

Tortuga: Todo esto es una gran trampa, ¡para que nos extraviemos en este Laberinto! El Malvado Mayotauro tiene como cómplice a Bach, ya lo ve. Y en cuanto usted menos lo piense, le reirá a usted hasta que se muera . . . ¡Y quizá también a mí!

Aquiles: ¡Oh, démonos prisa y salgamos de aquí! ¡Rápido! Retrocedamos sobre el surco y huyamos del disco antes de que el Malvado Mayotauro nos encuentre.

Tortuga: ¡No, por favor! Mi sensibilidad es demasiado delicada, y no soporta la extraña progresión armónica que se produce cuando es invertido el tiempo.
Aquiles: Pero, señora T, ¿cómo salir de aquí si no es volviendo sobre nuestros pasos?
Tortuga: Sí que es una excelente pregunta la suya.

(Un tanto desesperado, Aquiles comienza a moverse sin rumbo en medio de la oscuridad. De pronto, se oye un apagado jadeo y luego un golpe sordo.)

Aquiles, ¿está usted bien?
Aquiles: Un poco agitado, pero en general muy bien. Acabo de caer en un gran agujero.
Tortuga: ¡Ha caído usted en el foso del Malvado Mayotauro! Voy de inmediato en su ayuda. ¡Debemos movernos rápidamente!
Aquiles: Tenga cuidado, señora T. No quisiera que también usted cayera aquí dentro . . .
Tortuga: No se inquiete, Aquiles. Haremos todo lo que . . .

(De pronto, se oye un apagado jadeo y luego un golpe sordo.)

Aquiles: ¡Usted aquí conmigo, señora T! ¿Está usted bien?
Tortuga: Unicamente herida en mi orgullo, pero en general muy bien.
Aquiles: Ya estamos escabechados, ¿no cree?

(Como una explosión, llega a sus oídos una risa estruendosa y colosal, alarmantemente cercana.)

Tortuga: ¡Mucha precaución, Aquiles! Esto no es cosa de risa.
Mayotauro: ¡Ji ji ji! ¡Jo jo jo! ¡Ja ja ja!
Aquiles: Empiezo a sentirme débil, señora T . . .
Tortuga: Trate de no prestar atención a esa risa, Aquiles. Es nuestra única posibilidad.
Aquiles: Me esforzaré, pero ojalá tuviera menos hambre . . .

Tortuga: Digo yo, ¿son ilusiones mías, o huelo a palomitas de maíz, fritas en mantequilla?

Aquiles: Yo también las huelo. ¿Dónde estarán?

Tortuga: Cerca, creo. ¡Oh! Me he metido de cabeza en una enorme olla de eso. ¡Sí, claro que sí, sólo pueden ser palomitas de maíz, y de la marca "Emersión", mis predilectas!

Aquiles: ¡Grgrgg! ¡Palomitas de maíz "Emersión"! ¡No voy a dejar una!

Tortuga: Basta que no sean de la marca "Inmersión". Suenan tan parecido . . .

Aquiles: ¿Quién habló de Mendelssohn?

Tortuga: Yo no he dicho nada. Usted se imagina que oye voces.

Aquiles: ¡Bah, bah! Me parece que no. Bueno, ¡a trabajar!

(Y los dos comienzan a engullir las palomitas "Emersión" (¿o "Inmersión"?); repentinamente, ¡PLOP! Presumo que eran "Emersión", al fin y al cabo.)

Tortuga: Qué relato tan entretenido, ¿le gustó?

Aquiles: Más o menos. Lo que me inquieta es saber si lograron salir del foso del Malvado Mayotauro. Pobre Aquiles, además estaba ansioso por recuperar su tamaño normal.

Tortuga: No se inquiete, consiguieron abandonar el foso y Aquiles volvió a sus dimensiones de siempre. Por eso se oyó el fuerte "PLOP".

Aquiles: Oh, yo no estaba seguro. Bueno, ahora FRANCAMENTE lo que deseo es encontrar ese frasco de tónico. Por algún motivo tengo la boca muy reseca y nada me haría mejor que un trago de tónico recuperador.

Tortuga: Es una sustancia muy renombrada por su propiedad de saciar la sed. Así es como en algunos lugares la gente llega por poco a la locura en su afán de obtenerla. A comienzos de este siglo, la fábrica de alimentos Schönberg, de Viena, dejó de producir tónico y comenzó a elaborar otras cosas en su lugar. Imagínese el revuelo que eso causó.

Aquiles: Me hago una idea. Pero vayamos a buscar el tónico. Eh . . . un momento: mire esos lagartos sobre la mesa, ¿no nota algo muy llamativo en ellos?

Tortuga: Mmmm . . . nada en especial, ¿y usted?

Aquiles: ¿No se da cuenta? ¡Están surgiendo de esa lámina dibujada sin tomar ningún tónico recuperador! ¿Cómo podrán hacerlo?

Tortuga: ¿Cómo, no se lo dije? Usted puede salir de una pintura, en caso de que no tenga tónico recuperador, desplazándose en forma perpendicular al plano de la misma. Esos pequeños lagartos han aprendido a ASCENDER de nivel, cuando quieren salir del mundo bidimensional del cuaderno de dibujo.

Aquiles: ¿Podríamos hacer lo mismo para dejar este cuadro de Escher donde estamos?

Tortuga: ¡Por supuesto! No tenemos más que ASCENDER un relato. ¿Tratamos?

Aquiles: ¡Lo que sea, con tal de volver a casa! Ya estoy cansado de tantas excitantes aventuras.

Tortuga: Sígame pues. Subamos.

(Y ascienden un relato.)

Aquiles: Qué bueno estar de regreso. Pero hay algo que está mal. ¡Esta no es mi casa! Es la SUYA, señora Tortuga.

Tortuga: Ajá, así es . . . ¡y me alegro mucho! Pensaba sin el menor placer en el largo camino desde su casa hasta la mía. Estoy empachada, y dudo de que hubiera podido recorrerlo.

Aquiles: Pero yo no tengo inconveniente en marchar hasta mi hogar, así que hemos sido afortunados al llegar aquí, después de todo.

Tortuga: ¡Eureka! ¡Este ha sido nuestro golpe de suerte!

CAPITULO V

Estructuras y procesos recursivos

¿Qué es la recursividad?

¿QUE ES LA RECURSIVIDAD? Es lo que ha sido ilustrado por el Diálogo anterior, el *Pequeño Laberinto Armónico*: incrustaciones y variaciones de incrustaciones. El concepto es muy amplio (relatos dentro de relatos, películas dentro de películas, muñecas rusas dentro de muñecas rusas (o comentarios entre paréntesis dentro de comentarios entre paréntesis), son solamente algunos de los encantos de la recursividad). Sin embargo, debe tenerse en cuenta que la significación de "recursivo" en este capítulo tiene únicamente una relación lejana con lo dicho al respecto en el Capítulo III. Aclararemos el tema al final de este capítulo.

A veces, la recursividad parece aproximarse mucho a la paradoja. Por ejemplo, las *definiciones recursivas*, las cuales pueden dar la impresión de que se está definiendo algo en función de ello mismo. Esto implicaría una circularidad, y conduciría a un eterno retorno, si no a la paradoja misma. En verdad, una definición recursiva (si es adecuadamente formulada) jamás conduce a un eterno retorno ni a una paradoja. Y es así porque una definición recursiva nunca define una cosa en función de esa cosa sino, siempre, en función de las *interpretaciones más simples* de la misma. Enseguida se aclarará qué quiero decir con esto, a través de algunos ejemplos.

Una de las formas más comunes bajo las cuales aparece la recursividad en la vida cotidiana es cuando se posterga la finalización de una tarea, con el objeto de ocuparse de otra más sencilla, a menudo del mismo género. Veamos: un ejecutivo cuenta con un aparato telefónico muy versátil, por el que recibe muchas llamadas. Está hablando con A, y es llamado por B; dice entonces a A, "¿tendría inconveniente en esperar un momento?" Por supuesto que en realidad no le preocupa si A tiene inconveniente o no; aprieta un botón, y se pone en comunicación con B. Ahora es C quien llama, y la conversación con B queda en suspenso. Esto podría extenderse indefinidamente, pero no nos vamos a dejar llevar por el entusiasmo. Digamos entonces que la comunicación con C finaliza; nuestro ejecutivo, pues, "recupera" a B, y continúa su conversación con él. En tanto, A sigue sentado al otro extremo de la línea, haciendo tamborilear

sus uñas sobre la superficie de algún escritorio, y probablemente escuchando espantosa música funcional que la línea telefónica le transmite para aplacarlo . . . La alternativa más sencilla sería que la comunicación con B termine y el ejecutivo reanude finalmente su conversación con A. Pero *podría* suceder que, luego de continuada la comunicación con B, haya un nuevo llamado, ahora de D. En tal caso, B sería otra vez puesto en la pila de los que esperan y sería atendido D. Este ejecutivo se comporta en forma irremediablemente mecánica, sin duda, pero nos permite ilustrar la recursividad de manera muy precisa.

Desplazamiento, recuperación y pilas

En el ejemplo anterior, hemos utilizado cierta terminología básica de la recursividad, por lo menos tal como la consideran los especialistas en computación. Se trata de las palabras *push*, *pop* y *stack* (o más precisamente *push-down stack*).* Pero vamos a extendernos algo más sobre estos conceptos. *Push* significa suspender las operaciones relativas a la tarea que se tiene entre manos, sin olvidar el punto en que se está, y emprender otra tarea. De esta última se dice, usualmente, que está ubicada "en un nivel más bajo" que la anterior. *Pop* significa lo opuesto: completar las operaciones correspondientes al primer nivel, reasumiéndolas en el punto exacto donde fueron suspendidas, y ascendiendo para ello un nivel.

Ahora bien, ¿cómo recordar con precisión en qué punto se estaba en cada diferente nivel? La respuesta es: mediante el almacenamiento de la información pertinente en un *stack*, o pila. En consecuencia, una pila es un tablero que nos indica cosas tales como, 1) dónde quedó suspendida cada tarea no terminada (*return address*, o dirección de retorno o reentrada, en la jerga técnica); 2) cuáles son los hechos que deben ser conocidos a propósito del punto de interrupción (*variable bindings*, o enlaces variables, en la misma jerga). Cuando uno recupera una tarea, con la finalidad de reanudarla, la pila se encarga de restablecer el contexto correspondiente, eliminando toda confusión u olvido posibles. En el ejemplo de las llamadas telefónicas, la pila nos dice *quién* está esperando en cada uno de los diferentes niveles, y *dónde* estábamos al interrumpirse la conversación.

Digamos al margen que los términos "push", "pop" y "stack" han sido sugeridos por la observación de la pila de bandejas de una cafetería: por

* En el mundo de habla hispana los expertos utilizan, en gran medida, directamente el léxico inglés. En este caso, a veces emplean las palabras españolas "poner" o "meter" para *push*, "sacar" para *pop* y "pila" (de apilar) para *stack*. *Push-down stack* puede traducirse como "pila de desplazamiento descendente", por razones que el presente capítulo aclara. Estos términos fueron introducidos, a fines de los años cincuenta, como parte del llamado IPL o PL/I (Lenguaje de programación I): uno de los primeros lenguajes elaborados para servir a las Inteligencias Artificiales; ya hemos tropezado con "push" y "pop" en el Diálogo; se las tradujo siguiendo las ideas españolas de "desplazar" y "recuperar". [T.]

lo general, se produce cierta clase de empuje desde abajo, que tiende a mantener la bandeja más alta a una altura relativamente constante; cuando se pone una bandeja sobre la pila, esta última se hunde un poco, y cuando se saca una bandeja, la pila se estira hacia arriba, también un poco.

Otro ejemplo extraído de la vida diaria: los programas radiales de noticias, a veces, desplazan la emisión de información hacia algún corresponsal extranjero; así, "ahora escucharemos a Manuel Rodríguez desde San Cayetano, provincia de Córdoba, España". Allá, Rodríguez obtiene la grabación de una entrevista mantenida por un periodista local con determinada persona y entonces, luego de reseñar brevemente la situación, hace escuchar la cinta magnetofónica: "Con ustedes, quien les habla, Héctor García, directamente desde el escenario de los hechos, en las afueras de San Cayetano, donde tuvo lugar el espectacular asalto. Voy a dialogar a continuación con el señor . . .". A esta altura, el oyente ya ha sido desplazado tres niveles. Podría ocurrir que el entrevistado, a su vez, haga escuchar la grabación de alguna conversación anterior. No es demasiado insólito que se produzcan tres niveles de desplazamiento en estos programas y, curiosamente, es muy raro que tomemos conciencia de las suspensiones. El recorrido trazado, en cambio, es seguido por nuestro pensamiento subconsciente con entera facilidad, a causa quizá de que los diversos niveles difieren mucho entre sí en cuanto a su cualidad; si ésta fuera similar, nos confundiríamos de inmediato.

Un ejemplo de recursividad más compleja lo da, por supuesto, nuestro diálogo. Allí, Aquiles y la Tortuga aparecen en todos los niveles; en ocasiones, leen un relato del que al mismo tiempo son personajes. Por ello, el lector puede sentirse algo inseguro con respecto a la ilación argumental, y le es necesaria una atenta concentración para mantener ordenados los elementos: "Veamos, los *verdaderos* Aquiles y la Tortuga permanecen allá arriba, en poder de Buenasuerte, pero los *secundarios* están dentro de un cuadro de Escher . . . y luego encontraron ese libro, y lo están leyendo, de manera que quienes vagan por los surcos del *Pequeño Laberinto Armónico* son la Tortuga y Aquiles *terciarios*. No, un momento, en alguna parte me pasé por alto un nivel . . . ". Para trazar el recorrido que sigue la recursividad en el Diálogo, es preciso contar con una pila mental, expresamente conformada, similar a la que presenta la figura 26.

Pilas y música

Cuando comentemos el *Pequeño Laberinto Armónico*, será preciso hablar expresamente de algo que fue sugerido en el Diálogo, sin enunciarlo explícitamente, a saber: que escuchamos música de modo recursivo; específicamente, que elaboramos una pila mental de tonalidades y que cada nueva modulación pone una nueva tonalidad en la pila. Como resultado, también ahora, deseamos escuchar esa secuencia de tonalida-

des en orden inverso al de su apilamiento, es decir, recuperar una a una las tonalidades desplazadas, hasta llegar al sonido tónico. Lo anterior es una exageración, pero encierra un grano de verdad.

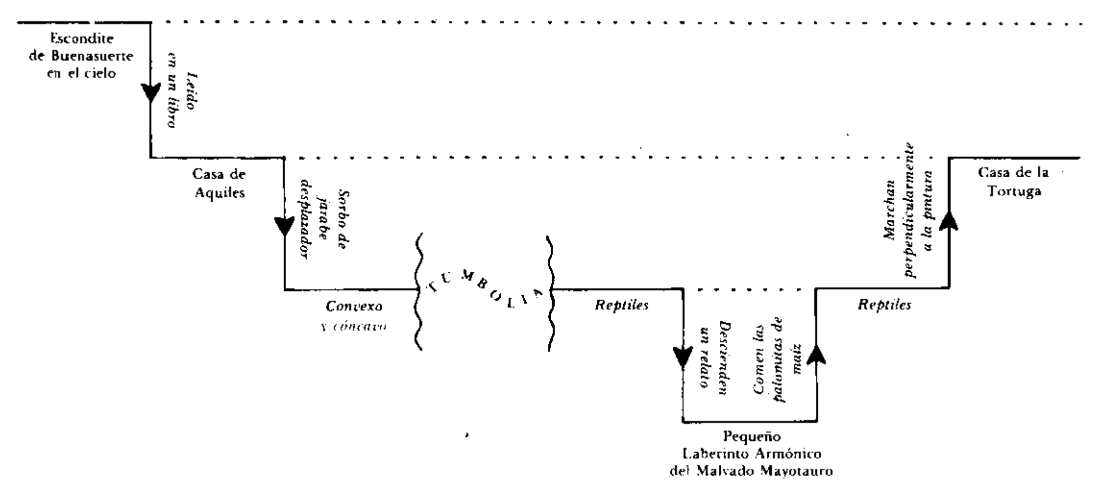


Figura 26. Diagrama de la estructura del Diálogo Pequeño Laberinto Armónico. *Los descensos verticales son desplazamientos ("pushes"); los ascensos son recuperaciones ("pops"). Adviértase la correspondencia de este diagrama con la disposición de los márgenes tipográficos en el Diálogo. El diagrama pone en claro que la tensión inicial —la amenaza de Buenasuerte— quedará sin resolver; Aquiles y la Tortuga permanecen suspendidos en el cielo. Algunos lectores se preocuparán enormemente ante este desplazamiento irrescatado, mientras que otros no se inquietarán en absoluto. En la narración, también el laberinto musical de Bach es interrumpido prematuramente. Aquiles, sin embargo, no se percata para nada de la existencia de algo extraño; únicamente la Tortuga percibe la tensión más global que sigue pendiente.*

Cualquier persona medianamente afecta a la música construye, en forma instintiva, una pila rudimentaria formada por dos tonalidades. En esta "pila reducida" son conservadas la auténtica tónica y la "seudotónica" más cercana (la que el compositor simula querer alcanzar); en otras palabras, la tonalidad más global y la más particular. De tal modo, ese oyente sabe cuándo ha sido recuperada la tónica verdadera y experimenta una profunda sensación de "aligeramiento". Ese oyente también puede distinguir (a diferencia de Aquiles) entre un alivio *localizado* de la tensión —una resolución dentro de la seudotónica, por ejemplo— y una resolución *global*. En rigor, una seudorresolución deberá incrementar la tensión global, en lugar de aligerarla, pues se trata de una acto irónico, idéntico al rescate de Aquiles cuando colgaba peligrosamente, aferrado a la oscilante lámpara, en tanto el lector sabía que él y la Tortuga, por cierto, aguardaban el cumplimiento de un funesto destino a manos del señor Buenasuerte y su cuchillo.

Los ejemplos de estas situaciones son muy frecuentes en el campo de la

música, puesto que el corazón y el alma de ésta son la tensión y la resolución. Pero nos limitaremos a observar un ensamblamiento de Bach, quien compuso numerosas piezas en la forma "*AABB*", esto es, integradas por dos mitades, cada una de ellas repetida. Tomaremos la jiga de la Suite Francesa número 5, en un todo representativa de la forma citada; su nota tónica es G, establecida vigorosamente por una alegre melodía de danza. Pronto, no obstante, una modulación en la sección *A* conduce al tono, estrechamente relacionado, de D (la dominante). Cuando acaba la sección *A*, estamos en la tonalidad de D. ¡En realidad, da la impresión de que la pieza ha terminado en esa tonalidad! (O, por lo menos, es la impresión que recogería Aquiles.) Pero entonces ocurre algo extraño: retornamos de un brinco al comienzo, con G por tónica, y volvemos a escuchar idéntica transición a D. Pero entonces ocurre algo extraño: retornamos de un brinco al comienzo, con G por tónica, y volvemos a escuchar idéntica transición a D.

A continuación viene la sección *B*. Con el desplazamiento temático producido, empezamos en D como si ésta hubiera sido siempre la tónica, pero modulamos retornando a G, después de todo, lo cual significa que recuperamos la tónica, y así termina la sección *B*, adecuadamente. Entonces, reaparece la curiosa repetición, arrojándonos sin aviso previo en D, y permitiéndonos luego retornar a G una vez más. Entonces, reaparece la curiosa repetición, arrojándonos sin aviso previo en D, y permitiéndonos luego retornar a G una vez más.

El efecto psicológico de todos estos cambios de tónica – bruscos unos, suaves otros— es muy difícil de describir. Es parte de la magia de la música el hecho de que podamos, instintivamente, encontrarle sentido a estos cambios. O quizá es la magia de Bach el haber podido componer obras con esta clase de estructura, dotándolas de tal graciosa naturalidad que no sabemos con exactitud qué es lo que está sucediendo.

El *Pequeño Laberinto Armónico* original es una pieza donde Bach trata de extraviar al oyente en un laberinto de súbitos cambios de tonalidad. Muy pronto, lo desorienta hasta enajenarle todo sentido de ubicación: ya no sabe cuál es la verdadera tónica, salvo que tenga *el don de una* captación perfecta o que, como Teseo, goce de la amistad de una Ariadna que lo provea de un hilo salvador.

En este caso, empero, en lugar de un hilo se requiere de una partitura escrita. Esta obra —otro ejemplo es el *Canon en Perpetuo Ascenso*— nos viene a mostrar que, en tanto oyentes de música, carecemos de pilas cuyo trazado se ahonde lo suficiente y que sean verdaderamente confiables.

La recursividad en el lenguaje

Posiblemente tengamos una capacidad de apilamiento mental mucho más grande con relación al lenguaje. La estructura gramatical de todos

los idiomas implica la elaboración perfectamente organizada de pilas de desplazamiento descendente (*push-down stacks*). Sin embargo, no hay duda de que la dificultad para comprender una oración determinada se incrementa notoriamente con la cantidad de desplazamientos hacia la pila que se produzcan. El mentado fenómeno del "verbo-al-final" en el idioma alemán, acerca del cual cómicas anécdotas sobre distraídos profesores que inician una frase, pasan a disquisiciones que los ocupan por el lapso de toda una conferencia, y luego finalizan acumulando a la carrera una retahíla de verbos que a su audiencia, cuya pila ya hacía tiempo había dejado de mantener coherencia, dejan perpleja, se narran, es una muestra excelente de desplazamiento y recuperación lingüísticos. La confusión que, en la audiencia que recupera desordenadamente, echando mano a la pila coronada por los verbos del profesor, puede engendrarse es fácil y divertida de imaginar. Pero en el alemán hablado de todos los días, tales pilas profundas casi nunca se producen; por cierto, los hablantes nativos de este idioma transgreden determinadas convenciones, que exigen la ubicación final del verbo, a fin de evitar el esfuerzo mental de retener el recorrido trazado por la pila. Todos los idiomas tienen construcciones que implican pilas, claro que, por lo general, de naturaleza menos espectacular que el alemán. Con todo, siempre hay modos de reformular las frases, de modo tal que la profundidad de apilamiento se reduzca al mínimo.

Redes de transición recursiva

La estructura sintáctica de la oración facilita el enunciado de un método para describir estructuras y procesos recursivos: el de la *Red de Transición Recursiva* (RTR). Una RTR es un diagrama que muestra diversos caminos que pueden ser seguidos para realizar una tarea determinada. Cada camino consiste en varios *nódulos*, o pequeños recuadros que encierran palabras, vinculados entre sí mediante *arcos*, o sea líneas que incluyen flechas direccionales. La denominación global de la RTR se escribe a la izquierda, separadamente, y el primero y último nódulos contienen, en forma respectiva, las palabras *comienzo* y *final*. Los demás nódulos contienen instrucciones muy breves y explícitas que cumplir, o bien denominaciones de otras RTR. Cada vez que aparece un nódulo, se deben obeceder sus instrucciones o, en su caso, brincar a la RTR nombrada en él, y desarrollarla.

Tomemos como muestra una RTR denominada NOMBRE MODIFICADO, que nos dice cómo construir una frase nominal (véase figura 27a). Si recorremos NOMBRE MODIFICADO paso a paso, en forma puntualmente horizontal, *comenzamos*, después producimos un ARTICULO, un NOMBRE, y los ADJETIVOS que sean convenientes, antes y/o después del NOMBRE, y luego *finalizamos*. Por ejemplo, "el ja-

bón tontuelo", o "un refrigerio desagradecido". Pero hay otras posibilidades, señaladas por los arcos, tales como dejar de lado el artículo, o sumar adjetivos; podemos construir así "leche", o bien "mayúsculos estornudos verdes, azules, rojos, etc."

Cuando uno llega al nódulo NOMBRE, le pide a la ignota caja negra llamada NOMBRE que le seleccione un nombre o sustantivo de entre los que tiene almacenados. En la terminología de la computación esto se conoce como "procedure call", es decir, solicitud de provisión de una conducta o procedimiento, e implica que en forma temporaria se le otorga el control de la tarea a *procedimiento* (NOMBRE, aquí), el cual, 1) realiza su tarea (produce un nombre), y luego, 2) devuelve el control. En la RTR anterior, se solicitan estos procedimientos: ARTICULO, NOMBRE y ADJETIVO. Ahora bien, la RTR NOMBRE MODIFICADO puede, al ser requerida, salir de otra RTR, por ejemplo de una RTR llamada ORACION. En este caso, NOMBRE MODIFICADO produciría una frase nominal como la de "el jabón tontuelo", y luego volvería a su lugar, dentro de ORACION, desde el cual había sido solicitada. Esto es enteramente análogo al modo en que se recupera el vínculo, a partir del punto donde se lo había suspendido, en el caso de las llamadas telefónicas encastradas unas en otras, o de las emisiones periodísticas radiales, también metidas unas dentro de otras.

Sin embargo, a pesar de que esto se llama "red de transición recursiva", no hemos exhibido hasta ahora ninguna verdadera recursividad.

Las cosas se hacen recursivas —y circulares, en apariencia— cuando se aborda una RTR como la de la figura 27b, correspondiente a NOMBRE ULTRAMODIFICADO. Está a la vista que todo camino posible en NOMBRE ULTRAMODIFICADO implica una apelación a NOMBRE MODIFICADO, de modo que es imposible evitar la presencia de nombres de una u otra clase. También es posible llegar a este grado de modificación sólo con enunciar "leche" o "mayúsculos estornudos verdes, azules, rojos", pero tres de los recorridos incluyen llamados *recursivos* a NOMBRE ULTRAMODIFICADO mismo. Sin duda, pareciera que se estuviese definiendo algo en función de sí mismo. ¿Está sucediendo eso, o no?

La respuesta es "sí, pero benignamente". Supongamos que en el procedimiento ORACION hay un nódulo que pide NOMBRE ULTRAMODIFICADO. Esto significa que, al afrontarlo, tenemos que encomendar a nuestra memoria (es decir, a la pila) la ubicación de este nódulo dentro de ORACION, para saber adónde debemos retornar, y luego dedicar nuestra atención al procedimiento NOMBRE ULTRAMODIFICADO. Por ende, tenemos que elegir un camino que nos permita generar un NOMBRE ULTRAMODIFICADO. Sigamos, por ejemplo, el camino más bajo de los dos superiores, cuya secuencia es:

NOMBRE MODIFICADO; PRONOMBRE RELATIVO; NOMBRE ULTRAMODIFICADO; VERBO.

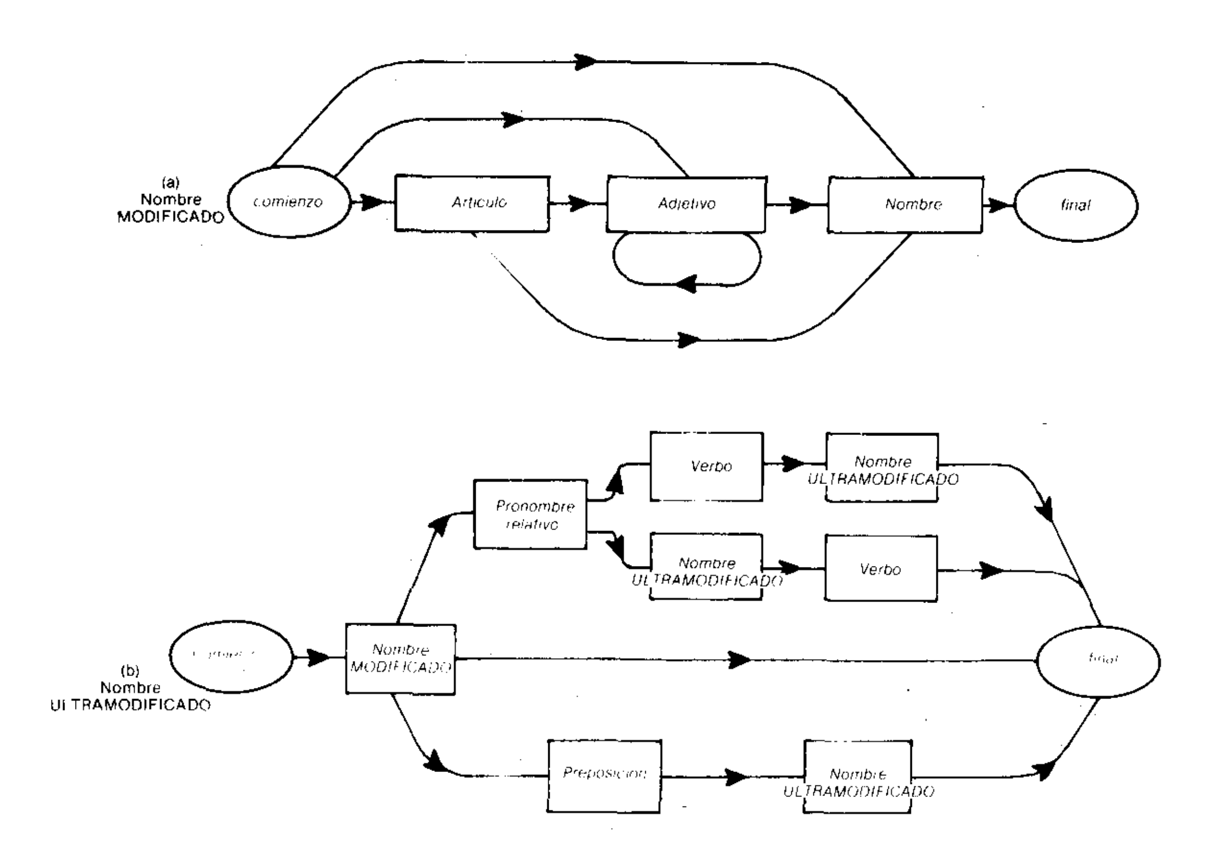


Figura 27. Red de Transición Recursiva de NOMBRE MODIFICADO *y* NOMBRE ULTRAMODIFICADO.

En consecuencia, lanzamos un NOMBRE MODIFICADO: "las aromáticas empanadas gallegas", un PRONOMBRE RELATIVO: "que"; y en el momento siguiente nos preguntamos por un NOMBRE ULTRAMODIFICADO, ¡pero estamos en medio de un NOMBRE ULTRAMODIFICADO! Sí, y sin embargo recordemos a nuestro ejecutivo, quien se encontraba en medio de una comunicación telefónica en el momento de ser requerido por otra comunicación telefónica, y resolvía la situación almacenando el estado vigente de la comunicación inicial en *una pila*, y comenzando la subsiguiente como si no ocurriese nada inusual. Actuaremos, pues, de forma similar.

Primero, anotamos en nuestra pila el nódulo en que nos encontramos al toparnos con NOMBRE ULTRAMODIFICADO, a fin de contar con una "dirección de retorno"; luego, brincamos sin más preámbulo al comienzo de NOMBRE ULTRAMODIFICADO, como si no sucediese nada inusual. Ahora también tenemos que elegir un camino. Para variar, optamos por el más bajo del diagrama:

NOMBRE MODIFICADO; PREPOSICION; NOMBRE ULTRAMODIFICADO.

Entonces, debemos producir un NOMBRE MODIFICADO (digamos, "la vaca violeta"), después una PREPOSICION (digamos, "sin"), y a continuación tropezamos otra vez con la recursividad. Así que nos sujetamos bien el sombrero y descendemos otro nivel. Para obviar complejidades, supongamos que el camino elegido ahora es el directo: únicamente NOMBRE MODIFICADO, y lo llenamos con, por ejemplo, "cuernos"; encontramos después el nódulo FINAL de este procedimiento, indicativo de que salimos del mismo: nos dirigimos pues a nuestra pila para encontrar la dirección de retorno. Esta nos dice que estábamos en la mitad de la ejecución de NOMBRE ULTRAMODIFICADO en un nivel más alto, así que debemos proseguir desde este punto. El NOMBRE ULTRAMODIFICADO producido aquí es "*la vaca violeta sin cuernos*", y en este nivel nos topamos otra vez con FINAL, por lo que también lo abandonamos, y luego somos remitidos a un punto donde se nos requiere un VERBO —optamos por "*engulló*"— y así completamos la solicitud de NOMBRE ULTRAMODIFICADO de más alto nivel, con el siguiente resultado:

"*las aromáticas empanadas gallegas que la vaca violeta sin cuernos engulló*".

Cuando emergemos por última vez de los trazados que muestra el diagrama, es para ascender hasta la paciente ORACION, a la cual incorporamos la frase obtenida.

Como se ve, no se ha caído en una situación de retorno infinito; la razón está en que por lo menos uno de los caminos de la RTR NOMBRE ULTRAMODIFICADO no incluye ningún llamado recursivo a NOMBRE ULTRAMODIFICADO mismo. Por supuesto, podríamos haber insistido perseverantemente en elegir siempre el camino inferior del diagrama, caso en el cual la tarea no habría tenido fin, tal como ocurre con la sigla "DIOS", cuya expansión nunca puede llegar a un nivel definitivo. Pero si los recorridos se eligen al azar, no ingresamos en situaciones de eterno retorno.

"Saneamiento" y heterarquía

El mencionado es el hecho fundamental que distingue las definiciones recursivas de las circulares. Siempre hay alguna parte de la definición que evita la autorreferencia, de modo que, en último término, la acción de construir un objeto que satisfaga la definición terminará por "sanearse".

Ahora bien, hay otros métodos, más indirectos que los de autoapela-

ción, para generar recursividad en RTR. Existe uno, análogo al utilizado por Escher en *Manos dibujando* (figura 135), donde cada uno de los dos procedimientos apela al otro, pero no a sí mismo. Por ejemplo, podemos tener una RTR llamada CLAUSULA, la cual pide NOMBRE ULTRAMODIFICADO siempre que un verbo transitivo necesita un objeto y, recíprocamente, el recorrido superior de NOMBRE ULTRAMODIFICADO pediría PRONOMBRE RELATIVO y luego CLAUSULA, cuando tenga necesidad de una cláusula relativa. Esto ejemplifica una recursividad *indirecta*, y es análogo también a la versión de la paradoja de Epiménides que moviliza dos recorridos enfrentados.

No hace falta señalar que puede haber un terceto de procedimientos que se requieran entre sí, cíclicamente y por siempre. Puede haber asimismo un grupo entero de distintas RTR que se imbriquen recíprocamente, apelando cada una de ellas a sí mismas y a todas las otras en forma intensa. Un programa dotado de semejante estructura, donde no exista un "nivel superior" único, o "monitor", es una *heterarquía* (por oposición a *jerarquía*). El término ha sido acuñado, según creo, por Warren McCulloch, uno de los primeros cibernetistas y un profundo estudioso de la inteligencia y del pensamiento.

Expansión de nódulos

Un método gráfico de concepción de la RTR es el que sigue. Cada vez que, al seguir un camino, se encuentra un nódulo que pide una RTR, uno "expande" ese nódulo, lo cual significa sustituirlo por una reproducción, en pequeña escala, de la RTR solicitada (véase figura 28). ¡A continuación, se trabaja en el interior de la RTR reducida!

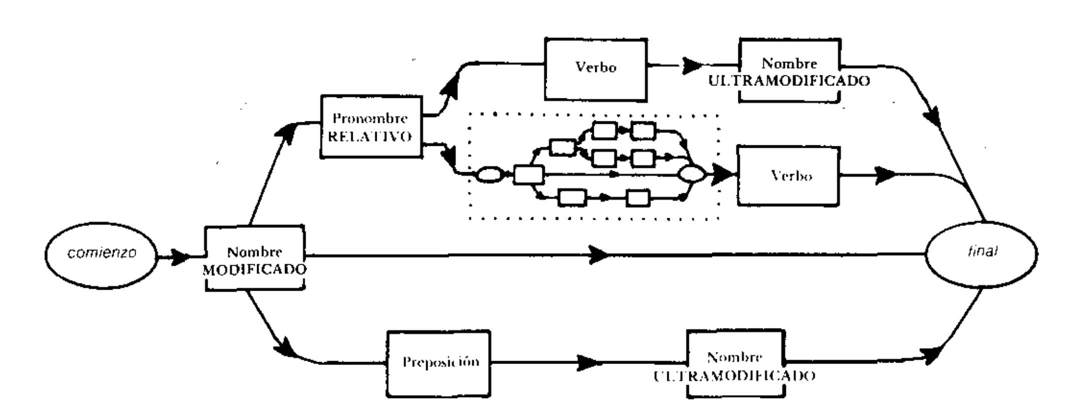


Figura 28. La RTR NOMBRE ULTRAMODIFICADO, *con un nódulo expandido recursivamente.*

Cuando se emerge de aquél, automáticamente se está en el lugar adecuado, dentro del diagrama mayor. A la vez, mientras se permanece en el reducido, es posible abocarse a la construcción de miniaturas aun más pequeñas de RTR. Pero basta con expandir los nódulos que se van encontrando para evitar la necesidad de diseñar un diagrama infinito, inclusive cuando una RTR apela a sí misma.

Expandir un nódulo se parece un tanto a la tarea de remplazar una letra, dentro de una sigla, por la palabra que esa letra representa. La sigla "DIOS" es recursiva, pero presenta el defecto —o la ventaja— de que la 'D' tiene que ser sucesivamente expandida: en consecuencia, nunca se sanea. Por ello, cuando se instrumenta una RTR como programa real de computación, siempre existe por lo menos un recorrido que elude la recursividad (directa o indirecta), a fin de no crear una situación de eterno retorno. Los programas más heterárquicos consiguen sanearse o no podrían funcionar, pues consistirían en la expansión sucesiva de un nódulo tras otro, sin completar jamás acción alguna.

Diagrama D y secuencias recursivas

Infinitas estructuras geométricas pueden ser definidas exactamente de ese modo, a través de la expansión de un nódulo tras otro. Por ejemplo, vamos a definir un diagrama infinito denominado "Diagrama D". Para ello, utilizaremos un método implícito de representación. Nos limitaremos a escribir en dos nódulos la letra 'D', la cual, sin embargo, estará representando una reproducción completa del Diagrama D. En la figura 29a, el Diagrama D es presentado implícitamente, pero si queremos observarlo más explícitamente, expandimos cada una de las dos D: es decir, *las sustituimos por el mismo diagrama*, sólo que en tamaño reducido (véase figura 29b). Esta "segunda" versión del Diagrama D nos permite sospechar cómo será el último, e imposible-de-completar, Diagrama D. La figura 30 exhibe una porción más amplia del Diagrama D, donde todos los nódulos han sido numerados desde la base, y de izquierda a derecha. Dos nódulos adicionales, numerados 1 y 2, han sido agregados en la base.

Este *árbol* infinito tiene ciertas curiosísimas propiedades matemáticas. Subiendo por su borde derecho, encontramos la célebre secuencia de los *números de Fibonacci*:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 . . .

Fue descubierta alrededor del año 1202 por Leonardo de Pisa, hijo de Bonaccio, llamado en consecuencia "Filius Bonacci" o, abreviadamente, "Fibonacci". Estos números son mejor definidos, recursivamente, por el siguiente par de fórmulas:

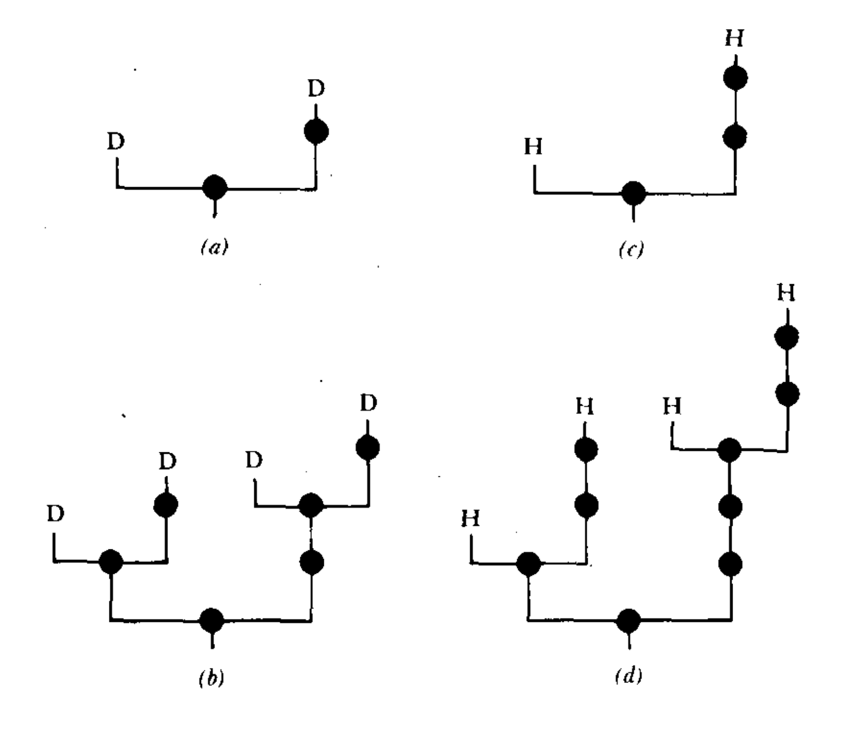


Figura 29. (a) Diagrama D, sin expandir. (c) Diagrama H, sin expandir.

(b) Diagrama D), expandido una vez. (d) Diagrama H, expandido una vez.

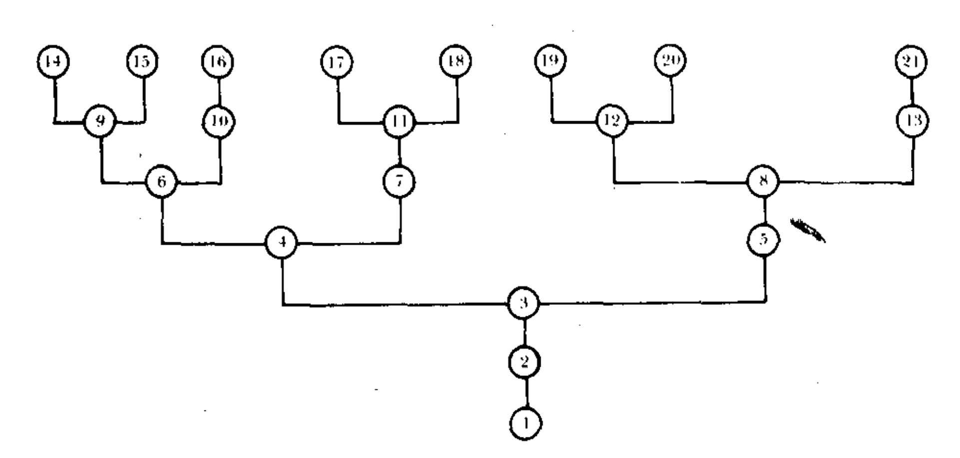


Figura 30. Diagrama D, con mayor expansión y nódulos numerados.

$$FIBO(n) = FIBO(n-1) + FIBO(n-2) \text{ para } n>2$$

$$FIBO(1) = FIBO(2) = 1$$

Adviértase cómo los sucesivos números de Fibonacci son definidos en función de los anteriores. Podemos representar este par de fórmulas a través de una RTR (figura 31).

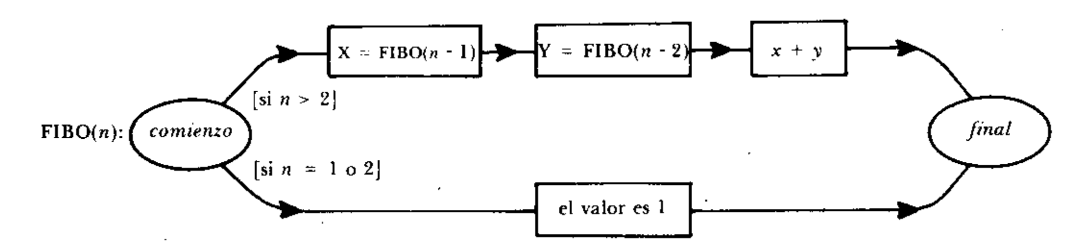


Figura 31. Una RTR de los números de Fibonacci

Así, se puede calcular FIBO(15) mediante una secuencia de apelaciones recursivas al procedimiento definido por la RTR de la figura. Esta definición recursiva se sanea cuando uno se encuentra con FIBO(1) o FIBO(2), que son dados explícitamente, luego de haber ido hacia atrás, recorriendo los valores descendentes de n. Es un poco fastidioso marchar hacia atrás, cuando bien se podría ir hacia adelante, comenzando con FIBO(1) y FIBO(2), y sumando cada vez los dos valores inmediatamente anteriores, hasta alcanzar FIBO(15). De esta forma, no se necesita retener el trazado de una pila.

Ahora bien, el Diagrama D presenta otras propiedades, más sorprendentes aun. Toda su estructura puede ser codificada por una sola definición recursiva, a saber:

$$D(n) = n - D(D(n-1)) \qquad \text{para } n>0 \qquad D(0) = 0$$

¿Cómo hace la función D(n) para codificar la estructura de árbol del Diagrama? Muy sencillamente: si uno construye un árbol, colocando D(n) debajo de n, para todos los valores de n, recreará el Diagrama D. En verdad, así fue como yo descubrí el Diagrama D. Me encontraba investigando la *función* D y, como quería calcular rápidamente sus valores, se me ocurrió distribuir gráficamente los que ya conocía, mediante el auxilio de un árbol. Para mi sorpresa, éste manifestó esa capacidad geométrica de descripción, tan ordenadamente recursiva.

Aun más asombroso es que, si se elabora un árbol similar para una función H(n), definida con una autoinclusión más que D,

$$H(n) = n - H(H(H(n-1))) \quad \text{para } n > 0$$
$$H(0) = 0,$$

su Diagrama asociado, el "Diagrama H", tiene que ser definido como lo muestra la figura 29c. Su brazo derecho contiene un nódulo más, es la única diferencia. La primera expansión recursiva del Diagrama H es la que exhibe la figura 29d. Y *a* sí se mantiene, para cualquier grado de autoinclusión. Hay una atractiva regularidad en las estructuras geométricas recursivas, que se corresponde en forma precisa con la que exhiben las definiciones algebraicas recursivas.

Un problema para lectores inquietos: supongamos que se hace girar el Diagrama D como si lo reflejase un espejo, y se numeran los nódulos del nuevo árbol de modo que los valores aumenten de izquierda a derecha. ¿Se podría encontrar una definición algebraica recursiva de este "árbol invertido"? ¿Y qué se podría decir acerca de una posible "inversión" del árbol H? ¿Etc.?

Otro ameno problema es el que plantean dos funciones enlazadas recursivamente, F(n) y M(n) —funciones "casadas" entre sí, podríamos decir— y así definidas:

$$\left.\begin{aligned} F(n) &= n - M(F(n-1)) \\ M(n) &= n - F(M(n-1)) \end{aligned}\right\} \quad \text{para } n > 0$$

$$F(0) = 1, \text{ y } M(0) = 0.$$

La RTR de cada una de estas funciones apela a la de la otra y también a sí misma. El problema consiste exclusivamente en descubrir las estructuras recursivas respectivas del Diagrama F y del Diagrama M: son muy simples y armoniosas.

Una secuencia caótica

Un último ejemplo de recursividad en teoría de los números nos lleva a un pequeño misterio. Consideremos la siguiente definición recursiva de una función:

$$Q(n) = Q(n - Q(n-1)) + Q(n - Q(n-2)) \quad \text{para } n > 2$$

$$Q(1) = Q(2) = 1.$$

Esto recuerda la definición de Fibonacci en cuanto a que cada nuevo valor, acá, es la suma de dos valores anteriores. Pero no de los dos *inmediatamente* anteriores, que ahora pasan a indicarnos *hasta dónde es necesario*

retroceder para obtener los números que, sumados, den lugar al valor siguiente . . . Los primeros 17 números Q son:

1, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 8, 8, 8, 10, 9, 10, . . .

$5 + 6 = 11$ — *nuevo término*

cuánto hay que desplazarse hacia la izquierda

Para establecer el siguiente, es preciso correrse hacia la izquierda (desde los tres puntos suspensivos) 10 y 9 lugares, respectivamente; nos encontraremos así con un 5 y un 6, señalados por las flechas. Su suma —11— produce el nuevo valor: Q(18). Se trata de un raro proceso, mediante el cual la lista de números Q conocidos se utiliza a sí misma para extenderse. La secuencia que resulta es, para decirlo benévolamente, errática; cuanto más se la prolongue, menos sentido se le hallará. Este es uno de esos casos muy singulares, donde lo que parece ser una definición más bien normal conduce a un comportamiento sumamente enigmático: un caos producido de manera muy ordenada. Uno tiende naturalmente a preguntarse si el aparente caos no oculta alguna sutil regularidad. Por definición, hay regularidad, ciertamente, pero el interés reside en si existe otra forma de caracterizar esta secuencia y en que tengamos la suerte de que sea una forma no recursiva.

Dos sorprendentes gráficas recursivas

Los prodigios de la recursividad, dentro de la matemática, son incontables, y no tengo el propósito de presentarlos en su totalidad. Empero, hay una pareja de ejemplos particularmente llamativos, surgidos de mi experiencia, que creo merecen ser citados. Son gráficas: una apareció en el curso de ciertas investigaciones relativas a teoría de los números, la otra durante la elaboración de mi tesis doctoral sobre física de los estados sólidos. Lo fascinante, en realidad, es que las gráficas se relacionan entre sí en forma estrecha.

La primera (figura 32) es la gráfica de una función a la que llamo INT(x). Es representada aquí por x entre 0 y 1. Para x entre cualquier otro par de enteros n y $n + 1$, basta con encontrar INT($x - n$) y luego sumarle n. La estructura del diseño es completamente saltarina, como se ve. Consiste en un número infinito de porciones curvadas, que se van haciendo más pequeñas hacia las esquinas, y al mismo tiempo menos curvadas cada vez. Ahora bien, si se observan atentamente dichas porciones, se descubrirá que cada una de ellas es, por cierto, ¡una reproducción de toda la gráfica, sólo que curvada! Las implicaciones que surgen son extravagantes: por ejemplo, que la gráfica de INT consiste exclusivamente en

reproducciones de sí misma, autoincluidas hasta una profundidad infinita. Si uno selecciona cualquier *porción* de la gráfica, por pequeña que sea, tiene en ella una reproducción completa de la gráfica total, ¡en realidad, infinitas reproducciones!

El hecho de que INT consista nada más que en copias de sí misma puede llevar al lector a pensar que es demasiado efímera para existir. Su definición impresiona como excesivamente circular. ¿Cómo romper el círculo? Es un asunto sobremanera interesante. Lo más importante por tener en cuenta es que, para describir INT a alguien que no lo haya visto, no basta con decirle, "consiste en reproducciones de sí misma". La otra mitad de la historia —la mitad no recursiva— indica dónde se ubican esas reproducciones dentro del cuadro y cómo han sido deformadas con relación a la gráfica de tamaño natural. Unicamente la combinación de estos dos aspectos podrá especificar la estructura de INT. Es exactamente como en la definición de los números de Fibonacci, donde eran necesarias dos líneas: una para definir la *recursividad*, la otra para definir la *base*

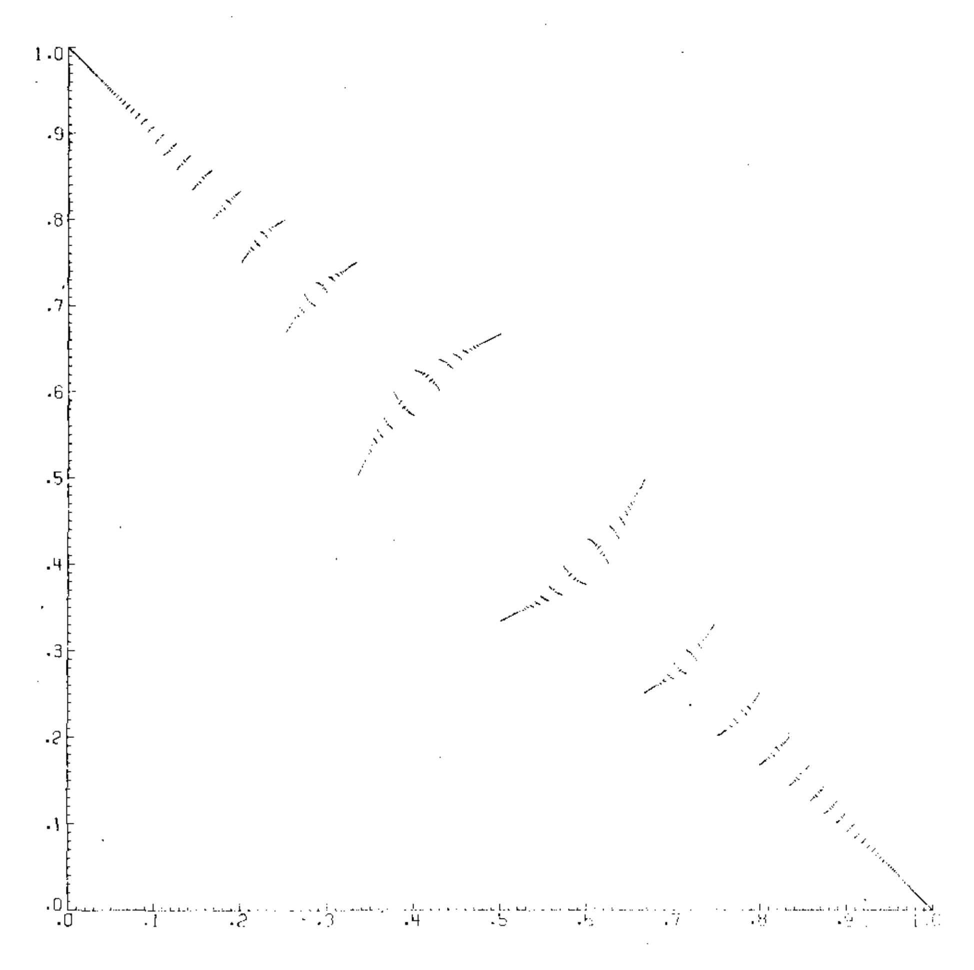


Figura 32. Gráfica de la función INT(x). Hay brincos discontinuos en cada valor racional de x.

(esto es, los valores iniciales). Para ser más concreto: si a uno de los valores de base se lo convierte en 3, en lugar de 1, el resultado es una secuencia enteramente distinta, conocida como la *secuencia de Lucas*:

$$\underbrace{1,\ 3}_{\text{“}base\text{”}},\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ \ldots$$

$29 + 47 = 76$

idéntica regla recursiva
que para los números de Fibonacci

En la definición de INT, lo que corresponde a la "base" es un diseño (figura 33a) compuesto por muchas casillas que muestran dónde se ubican las reproducciones y cómo se han distorsionado éstas. Lo llamo el "esqueleto" de INT. Para construir INT a partir de su esqueleto, debe procederse como sigue. Primero, para cada casilla, son necesarias dos operaciones: 1) colocar dentro suyo una pequeña reproducción curvada del esqueleto, guiándose por la línea curva situada en su interior; 2) borrar el rectángulo y la línea curva. Una vez hecho esto con todas las casillas del esqueleto original, se tendrán muchos "miniesqueletos" en lugar de uno solo mayor. Debe repetirse ahora el proceso, un nivel más abajo, con todos los "miniesqueletos". Y luego una vez más, y una vez más . . . De este modo se obtendrá una aproximación, en el límite, a una gráfica exacta de INT, pese a que no se pueda culminar nunca la tarea. Incluyendo el esqueleto dentro de sí mismo una y otra vez, gradualmente quedará construida una gráfica de INT "desde la nada". Pero en rigor la "nada" no es tal: es un diseño.

Para abordar esto de modo todavía más dramático, imaginemos que se conserva la parte recursiva de la definición de INT, pero modificando el diseño inicial, el esqueleto. Una variante de éste es mostrada en la figura 33b, y también presenta casillas que se van haciendo paulatinamente más pequeñas a medida que se acercan a las esquinas. Si se incluye este segundo esqueleto sucesivas veces dentro de sí mismo, se obtendrá la gráfica clave de mi tesis doctoral, a la que llamo *diseño G* (figura 34). (En realidad, también es necesario cierto grado de complicación distorsiva, pero la idea básica es la de autoinclusión.) El diseño G, así, ingresa a la familia INT. Es un pariente lejano, pues su esqueleto es completamente distinto —y notablemente más complejo— que el de INT. No obstante, la parte recursiva de la definición es idéntica, y eso es lo que funda los lazos familiares.

No quiero mantener por más tiempo el suspenso acerca del origen de estas bellas gráficas. INT significa "intercambio", y proviene de un problema que abarca "secuencias Eta", las cuales se relacionan con fracciones continuas. La idea fundamental que subyace a INT es que los signos más y menos son intercambiados dentro de cierta clase de fracción continua. Como consecuencia, $\text{INT}(\text{INT}(x)) = x$.

INT tiene la propiedad de que, si x es racional, también lo es INT(x); si x es cuadrático, también lo es INT(x). Ignoro si esta tendencia se mantiene en niveles algebraicos más elevados. Otro aspecto atrayente de INT es que, *en todos* los valores racionales de x presenta brincos discontinuos, mientras que en los valores irracionales de x hay *continuidad*.

El diseño G surgió de un tratamiento altamente especulativo de la pregunta: "¿Cuáles son las energías permitidas de electrones en un cristal, dentro de un campo magnético?" Este problema resulta curioso porque es un encuentro entre dos situaciones muy simples, y fundamentales, de orden físico: un electrón en un cristal perfecto, y un electrón en un campo magnético homogéneo. Estos dos problemas son bien conocidos, y sus soluciones clásicas parecen casi incompatibles entre sí. Por consiguiente, tiene un gran interés la observación de los pasos que da la naturaleza para reconciliarlas. Cuando ocurren, la situación cristal-sin-campo-magnético y la situación campo-magnético-sin-cristal presentan un aspecto en común: andando el tiempo, el electrón asume un comportamiento periódico. Resulta que, cuando ambas situaciones son combinadas, la razón correspondiente a sus dos períodos pasa a ser el parámetro clave. En realidad, dicha razón retiene toda la información relativa a la distribución de las energías permitidas de electrones, pero solamente revela el secreto si es desarrollada dentro de una fracción continua.
El diseño G muestra esa distribución. El eje horizontal representa la energía, y el vertical la razón mencionada, a la que podemos llamar "α". En la base, α es cero, y en la cima es la unidad. Cuando α es cero, no hay campo magnético. Cada uno de los segmentos de recta que integran el diseño G es una "cinta de energía", esto es, representa los valores de la energía permitida. Las franjas vacías de diferentes dimensiones que se escalonan a través del diseño G representan, en consecuencia, zonas de exclusión de energía. Uno de los atributos más pasmosos del diseño G consiste en que, cuando α es racional (digamos p/q, para mayor claridad), hay exactamente q de aquellas cintas (pese a que, cuando q es constante, dos de las cintas se "besan" en el centro). Y si α es irracional, las cintas se contraen, convirtiéndose en puntos; de éstos se presenta una cantidad infinita, muy diseminadamente distribuida en un llamado "conjunto de Cantor": otra entidad de definición recursiva, nacida en el ámbito de la topología.

El lector puede muy bien preguntarse si una estructura tan intrincada fue descubierta con motivo de un experimento. Francamente, yo sería la persona más sorprendida del mundo si el diseño G surgiera en el transcurso de una experimentación. La fisicalidad del diseño G reside en el hecho de que sigue el modo adecuadamente matemático que se aplica al tratamiento de problemas, si bien menos especulativos, de esta clase. En otras palabras, el diseño G es exclusivamente una contribución a la física teórica . . . y de ningún modo una sugerencia a los experimentadores en cuanto a observaciones previsibles . . . Un amigo agnóstico quedó tan

(a)

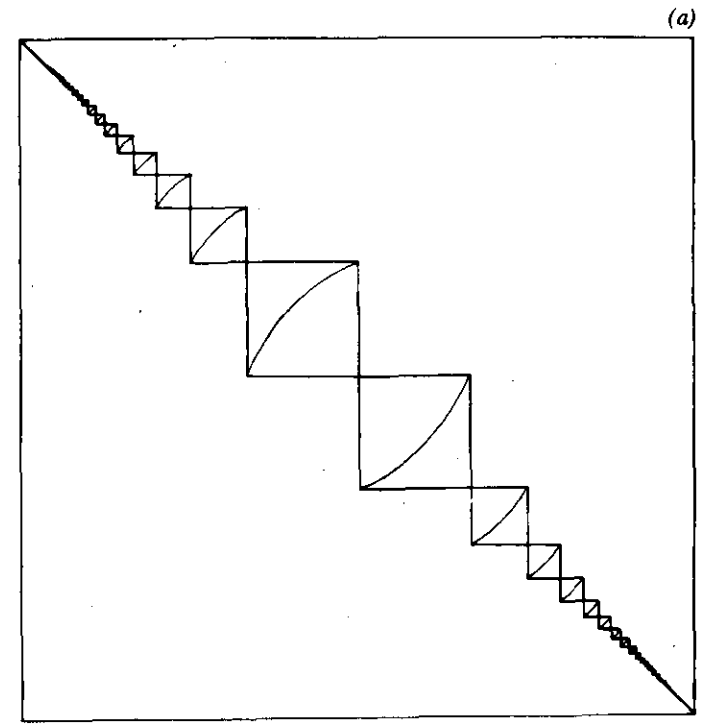
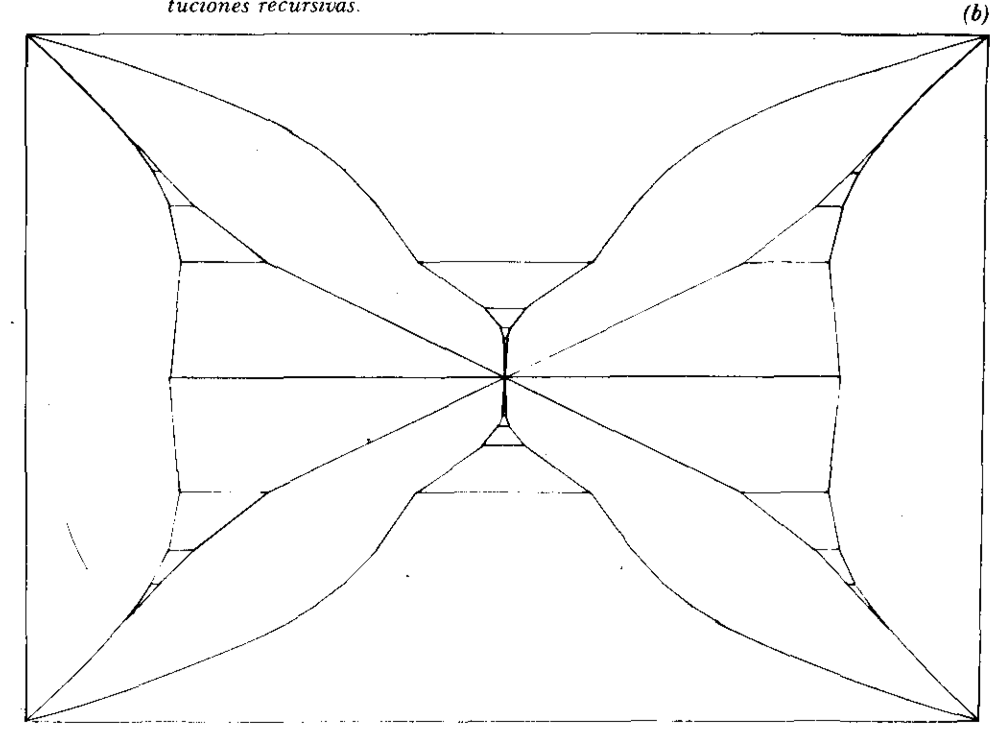


Figura 33. *(a)* *El esqueleto a partir del cual se puede construir INT mediante sustituciones recursivas.*
(b) *El esqueleto a partir del cual se puede construir el diseño G mediante sustituciones recursivas.*

(b)



impresionado con la infinita cantidad de infinitos del diseño G, que llamó a éste "una imagen de Dios": no creo, en absoluto, que ello constituya una blasfemia.

Recursividad en el nivel inferior de la materia

Hemos visto recursividad en la gramática de los idiomas, hemos visto árboles geométricos recursivos que crecen inacabablemente hacia arriba y hemos visto una forma de ingreso de la recursividad en la teoría física de los estados sólidos. Y ahora vamos a ver una forma bajo la cual el mundo entero aparece hecho de recursividad. Se relaciona con la estructura de las partículas elementales: electrones, protones, neutrones y los diminutos quanta de la radiación electromagnética llamados "fotones". Veremos que estas partículas están —en un sentido determinado que sólo puede ser rigurosamente definido por la mecánica cuántica relativista— incluidas unas dentro de otras de una manera que puede ser descripta recursivamente, quizá hasta por medio de algún género de "gramática".

Comenzamos con la observación de que, si las partículas no interactuasen entre sí, las cosas serían increíblemente simples. A los físicos les agradaría un mundo así, pues podrían prever fácilmente el comportamiento de todas las partículas (siempre que existieran físicos en tal mundo). Las partículas exentas de interacción son llamadas *desnudas* y se trata de creaciones puramente hipotéticas: no existen.

Ahora bien, cuando "ponemos en marcha" las interacciones, las partículas se entrelazan recíprocamente del mismo modo en que lo hacían las funciones F y M, o en que lo hace la gente que se une en matrimonio. Se dice de las partículas que son "renormalizadas": una palabra sin gracia, pero intrigante. Lo que sucede es que ninguna de estas partículas puede ser ni siquiera definida sin referencia a todas las demás partículas; y la definición de éstas, a su vez, depende de su relación con las anteriores, etc., y así, giro a giro, en un circuito sin final.

Seamos un poco más concretos. Nos limitaremos a sólo dos clases de partículas: *electrones* y *fotones*. También tenemos que poner en juego las antipartículas del electrón, los *positrones* (los fotones tienen su propia antipartícula). Imaginemos un mundo inerte, donde un electrón desnudo desea propagarse desde un punto A a un punto B, igual que Zenón en mi *Invención a tres voces*. Un físico trazaría este dibujo:



Existe una expresión matemática que corresponde a esta línea y a sus extremos y que es fácil de formular. Mediante ella, un físico puede entender el comportamiento del electrón en su trayectoria.

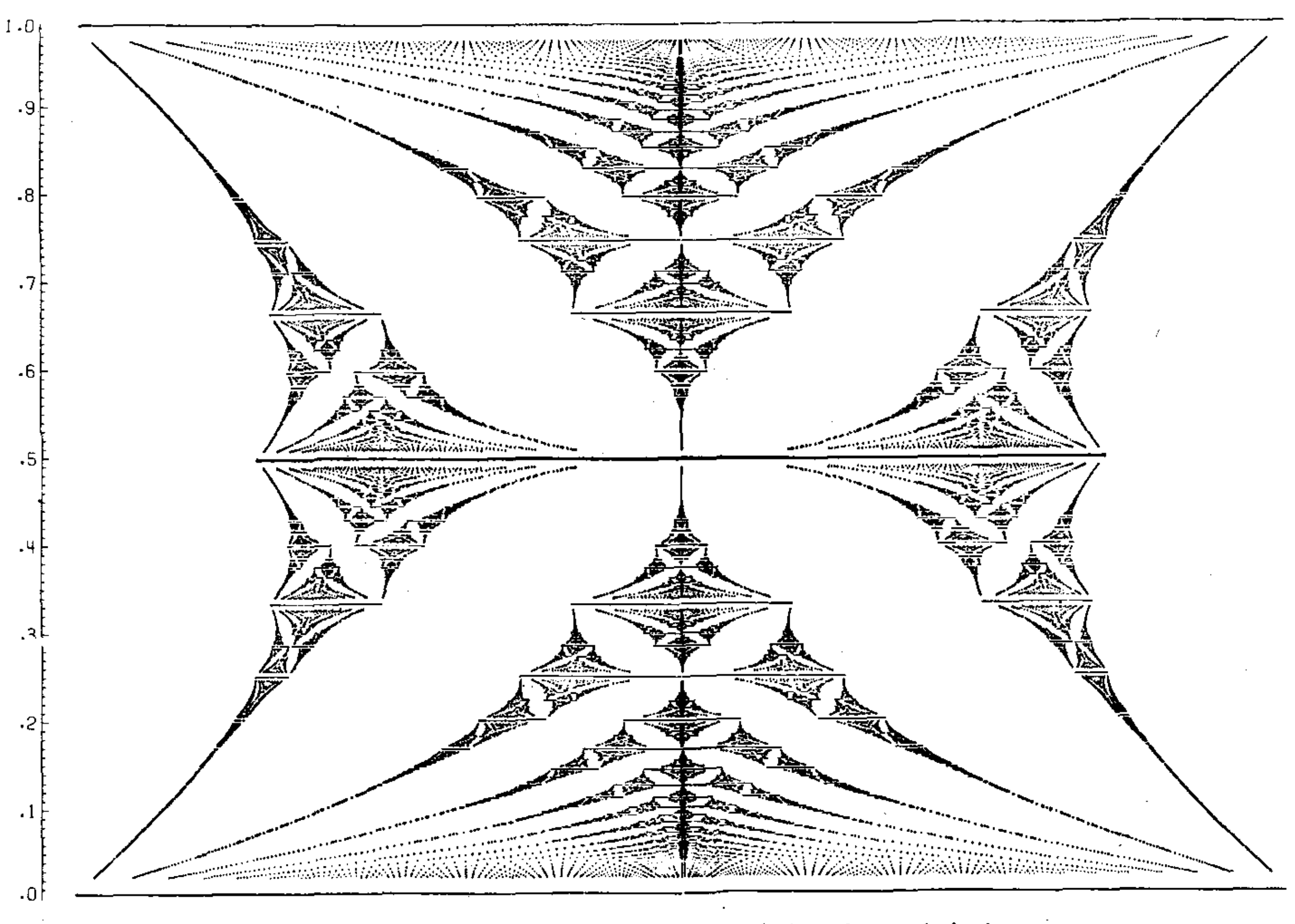
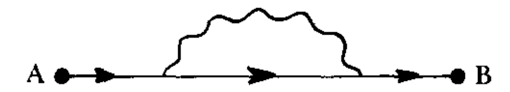


Figura 34. Diseño G: una gráfica recursiva que muestra cintas de energía de electrones, en un cristal idealizado, dentro de un campo magnético. α, que representa la fuerza del campo magnético, transita verticalmente entre 0 y 1. La energía transita horizontalmente. Los segmentos de línea horizontales son cintas de energías permitidas de electrones.

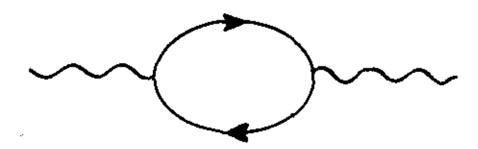
Ahora, "ponemos en marcha" la interacción electromagnética, por medio de la cual interactúan electrones y fotones. Aunque no haya fotones en la escena, se producirán consecuencias profundas, pese a tratarse de una trayectoria simple. En particular, nuestro electrón adquirirá ahora capacidad de emitir y luego reabsorber *fotones virtuales*: fotones que nacen y mueren antes de poder ser vistos. Podemos mostrar así tal proceso:



Cuando nuestro electrón se propaga, puede emitir y reabsorber un fotón tras otro, o bien incluirlo, como se muestra a continuación:



Las expresiones matemáticas correspondientes a estos diagramas —llamadas "diagramas de Feynman"— son fáciles de formular, si bien son más difíciles de calcular que para el electrón desnudo. Pero lo que verdaderamente complica el problema es que un fotón (real o virtual) puede, durante un breve intervalo, caer en el interior de un par electrón— positrón. En tal caso, éstos se anulan recíprocamente y, como por arte de magia, el fotón original reaparece. Esta clase de proceso es la que sigue:



El electrón está señalado por la flecha orientada hacia la derecha, y el positrón por la que apunta a la izquierda.

Tal como el lector lo habrá previsto, estos procesos virtuales pueden ser incluidos unos dentro de otros, y hasta la profundidad que se desee. Ello puede originar ciertos diseños muy complicados, similares al que muestra la figura 35. En este diagrama de Feynman, un electrón individual ingresa por la izquierda, en A, realiza algunas llamativas acrobacias y luego emerge —también un electrón individual— por la derecha, en B. Para un observador externo que no haya visto el embrollado intermedio, parecerá que un electrón ha navegado pacíficamente desde el punto A hasta el punto B. En el diagrama, es posible observar cómo pueden ser "em-

bellecidas" a voluntad las líneas del electrón, y cómo pueden serlo también las del fotón. Este diagrama sería endiabladamente difícil de calcular.

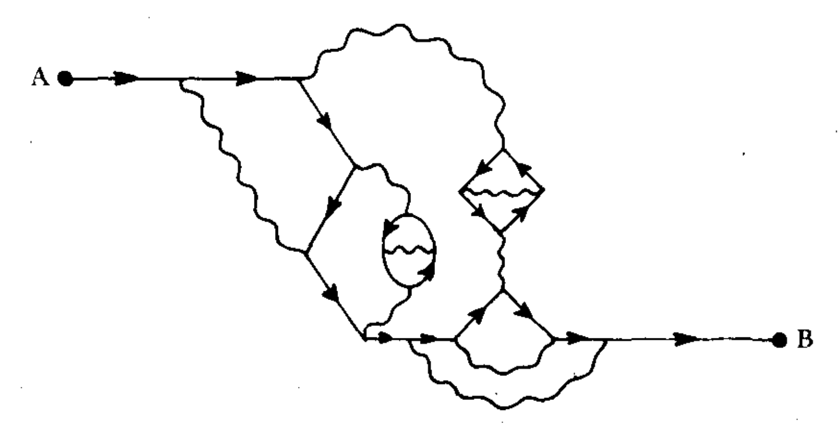


Figura 35. Un diagrama de Feynman que muestra la propagación de un electrón renormalizado en su trayecto desde A hasta B. En este diagrama, el tiempo avanza hacia la derecha; por ende, en los segmentos donde la flecha indica que el electrón se dirige hacia la izquierda, se está moviendo "hacia atrás en el tiempo". Dicho más intuitivamente: un antielectrón (positrón) se está desplazando hacia adelante en el tiempo. Los fotones son sus propias antipartículas; por eso, sus líneas no necesitan flechas.

Hay una especie de "gramática" en estos diagramas que permite la concreción de, únicamente, determinados trazados. Por ejemplo, el que sigue es imposible:



Se puede decir de él que no es un diagrama de Feynman "bien formado". La gramática es un resultado de las leyes básicas de la física, tales como la conservación de energía, la conservación de las cargas eléctricas, etc. Y, lo mismo que las gramáticas de las lenguas naturales, esta gramática tiene una estructura recursiva, consistente en la inclusión profunda de unas estructuras en el interior de las otras. Es posible diseñar un conjunto de redes de transición recursiva que defina la "gramática" de la interacción electromagnética.

Cuando se hace que interactúen electrones y fotones desnudos dentro de estos recorridos arbitrariamente enmarañados, lo que resulta son electrones y fotones *renormalizados*. Así, para comprender cómo se propaga un electrón real, material, desde A hasta B el físico debe contar con una suerte de término medio de los infinitos trazados de que son capaces las partículas virtuales. ¡Es lo de Zenón, mas en grado superlativo!

De tal modo, la cuestión central es que una partícula material —una partícula renormalizada— comprende (1) una partícula desnuda, y (2) un inmenso enmarañamiento de partículas virtuales, inextricablemente entrelazadas en el seno de un laberinto recursivo. La existencia de cada partícula real, entonces, involucra la existencia de una cantidad infinita de otras partículas, integrantes de un "enjambre" que va circundando a aquélla a medida que se propaga. Y cada una de las partículas virtuales del enjambre, por supuesto, arrastra su propio enjambre virtual, y así hasta el infinito.

Los físicos atómicos consideran que tal complejidad excede las posibilidades de manipulación: para entender el comportamiento de electrones y fotones, efectúan aproximaciones que omiten todo lo que vaya más allá de diagramas Feynman enteramente simples. Por fortuna, cuanto más complejo es un diagrama, menor es su aporte. No se conoce ningún método que permita resumir los infinitos diagramas posibles, destinados a manifestar el comportamiento de un electrón real, completamente renormalizado. En cambio, mediante la utilización somera del centenar de diagramas más sencillos, relativos a determinados procesos, los físicos han podido predecir, correctamente, ¡un valor de hasta nueve decimales (el llamado factor g del muón)!

No sólo hay renormalización entre electrones y fotones: dondequiera que exista interacción entre cualquier tipo de partículas, los físicos aplican la noción de renormalización para comprender los fenómenos. Así es como protones, neutrones, neutrinos, mesones pi, quarks —todos los ejemplares de la fauna subatómica— cuentan, dentro de la teoría física, con versiones desnudas y renormalizadas. Y todos los ejemplares y fruslerías de que está compuesto el mundo proceden de estos billones de burbujas alojadas dentro de otras burbujas.

Reproducciones y similitud

Volvamos a considerar el Diseño G. Recordará el lector que, en la *Introducción*, hablamos de diferentes variedades de cánones. Cada género de canon desarrolla determinada manera de encarar un tema original y de copiarlo mediante un isomorfismo, o transformación donde la información es conservada. Algunas veces, esas reproducciones se presentan ordenadas de abajo hacia arriba, o de adelante hacia atrás, o bien reducidas, o ampliadas, . . . En el Diseño G encontramos todos estos tipos de transformación, y algunos más. Las correspondencias entre el Diseño G en su conjunto y las "copias" de sí mismo que incluye en su propio interior abarcan modificaciones de tamaño, sesgamientos, simetrías, y otras variantes. Empero, se mantiene allí una forma de identidad entre diseños, que el ojo puede percibir con un pequeño esfuerzo, en especial después de haber practicado con INT.



Figura 36. Pez y escamas, *de M. C. Escher (xilografía, 1959).*

Escher adoptó la idea de hacer, de partes de un objeto, réplicas del objeto mismo, y la concretó en una obra: su grabado *Pez y escamas* (figura 36). Por supuesto, estos peces y escamas resultan similares sólo si son examinados en un plano lo suficientemente abstracto. Además, cualquiera sabe que las escamas de un pez no son en realidad pequeñas reproducciones del pez, y que las células de un pez no son, tampoco, pequeñas reproducciones del mismo; aun así, el ADN de un pez, presente en todas y cada una de las células del pez, *es* una "copia" muy plegada de todo el pez: luego, hay algo más que una pizca de verdad en el cuadro de Escher.

¿Qué es lo que puede ser "similar" en todas las mariposas? La proyección de una mariposa sobre otra no manifiesta una correspondencia célula por célula, sino entre partes funcionales, y esto puede registrarse con la mediación combinada de dimensiones macro y microscópicas. Es el tipo de isomorfismo que vincula entre sí a todas las mariposas del grabado

Mariposas (figura 37), de Escher. Lo mismo sucede con las mariposas, más abstractas, del Diseño G, todas vinculadas entre sí por correspondencias matemáticas que proyectan partes funcionales sobre partes funcionales, aunque ignoren por completo la exactitud en materia de proporciones lineales, de ángulos, etc.

Si llevamos esta indagación de la similitud hasta ubicarla en un plano aun más alto de abstracción, podemos muy bien preguntar, "¿qué es lo similar en todas las obras de Escher?" Sería absolutamente ridículo intentar la proyección de cada una sobre todas las demás. Lo asombroso es que inclusive un fragmento diminuto de una obra de Escher o de una composición de Bach revelan la respuesta. Exactamente como el ADN de un pez está contenido en el interior de cada minúsculo fragmento de ese pez, así la "rúbrica" de un creador está contenida dentro de cada minúsculo fragmento de sus creaciones. No conocemos otro modo de identificar esto que llamándolo "estilo": una palabra ambigua y elusiva.

Seguimos estrellándonos contra la "similitud en la diversidad" y contra la pregunta:

¿Cuándo son similares dos cosas?

Volveremos muchas veces sobre esto en el presente libro. Lo abordaremos desde todas las perspectivas indirectas posibles, y vamos a ver, al final, cómo esta simple pregunta se relaciona profundamente con la naturaleza de la inteligencia.

No es casual que este tema surja dentro del capítulo dedicado a la recursividad, ya que ésta es un fenómeno donde la "similitud en la diversidad" cumple un papel central. La recursividad se basa en que la "misma" cosa aparece en diferentes niveles al mismo tiempo. Pero los hechos ubicados en los diferentes niveles *no son* exactamente los mismos: antes bien, lo que hallamos son algunos rasgos constantes en medio de muchos aspectos diferenciales. En el *Pequeño Laberinto Armónico*, por ejemplo, las narraciones de los distintos niveles no tienen ninguna relación entre sí: su "similitud" reposa exclusivamente en las dos circunstancias siguientes: (1) se trata siempre de narraciones; (2) en todas ellas aparecen la Tortuga y Aquiles. Fuera de esto, difieren radicalmente una de otra.

Programación y recursividad: modularidad, bucles, procedimientos

Una virtud esencial, en programación computacional, es la de saber percibir cuándo dos procesos son similares en aquel amplio sentido, pues ello conduce a la *modularización*, o fraccionamiento adecuado de una tarea en subtareas. Por ejemplo, uno puede tener una secuencia de operaciones



Figura 37. Mariposas, *de M. C. Escher (grabado en madera, 1950).*

similares por efectuar; entonces, en lugar de enunciarlas todas, puede formularse un *bucle*, el cual indicará a la computadora que realice un conjunto fijo de operaciones, y que luego se mueva en bucle hacia atrás y las realice de nuevo, una y otra vez, hasta que sea satisfecha determinada condición. Ahora bien, el *cuerpo* del bucle —el conjunto fijo de operaciones que deben repetirse— no necesita, en realidad, estar rigurosamente establecido: puede variar de alguna manera previsible.

Un ejemplo lo brinda la muy sencilla prueba que aplicamos para verificar la primidad de un número natural N, donde comenzamos tratando de dividir N por 2, luego por 3, por 4, por 5, etc., hasta $N-1$. Si N pasa por estas pruebas sin resultar divisible, es primo. Tómese nota de que cada paso del bucle es similar, pero no igual, al resto de los pasos. Adviérta-

se también que el número de pasos varía de acuerdo a N, por lo que un bucle dotado de una extensión fija no podría servir nunca como prueba uniforme de la primidad. Hay dos criterios de interrupción del bucle: (1) si un número divide exactamente a N, la respuesta deja de ser "NO"; (2) si se llega a $N-1$, y N se mantiene indivisible, la respuesta deja de ser "SI".

La noción general que anima a los bucles, así, es la siguiente: realizar repetidas veces determinada serie de pasos interrelacionados, e interrumpir el proceso cuando se cumplen ciertas condiciones específicas. Algunas veces, el número máximo de pasos que componen un bucle será conocido de antemano; otras, hay que limitarse a comenzar y a aguardar hasta que se interrumpa. Este segundo tipo de bucle —al que llamo bucle *libre*— es riesgoso, porque puede que el criterio de interrupción no sobrevenga nunca, dejando a la computadora en una situación conocida como "de bucle infinito". La distinción entre *bucles delimitados* y *bucles infinitos* es uno de los conceptos más importantes dentro de la ciencia de la computación, y habremos de dedicarle todo un capítulo, el XIII.

Ahora bien, los bucles pueden incluirse uno dentro de otro. Por ejemplo, supongamos que se quiere verificar la primidad de todos los números comprendidos entre 1 y 5000. Podemos formular un segundo bucle que aplique repetidas veces la prueba descripta más arriba, comenzando con $N = 1$ y terminando con $N = 5000$. De este modo, nuestro programa tendrá una estructura de "bucle hecho de bucles". Tales estructuras son clásicas y, en realidad, se las considera una ventajosa modalidad de programación. Esta clase de bucle autoincluido también aparece en las instrucciones para el montaje de productos corrientes y en actividades como el tejido de punto o de ganchillo, donde bucles muy pequeños son repetidos varias veces dentro de bucles mayores, los cuales son realizados, a su vez, reiteradamente . . . El resultado de un bucle de nivel inferior puede ser sólo un par de puntadas, mientras que el de un bucle de nivel superior puede ser una parte sustancial de una prenda de vestir.

También en música aparecen bucles a menudo, como por ejemplo cuando una escala (un bucle pequeño) es ejecutada varias veces consecutivas, quizá con un desplazamiento de tono en cada oportunidad. Pongamos por caso el quinto concierto para piano de Prokofiev, y la segunda sinfonía de Rachmaninoff; ambos, en su último movimiento, contienen extensos pasajes en los cuales son ejecutados bucles-escalas rápidos, lentos o intermedios, en forma simultánea por distintos grupos de instrumentos: el efecto que provocan es notable. Las escalas de Prokofiev suben, las de Rachmaninoff bajan; hay para elegir.

Una noción más amplia que la de bucle es la de *subrutina*, o *procedimiento*, ya comentada en alguna medida. La idea básica, aquí, es la reunión de diversas operaciones en un solo grupo, considerado así como unidad individual, bajo una determinada denominación: el procedimiento NOMBRE MODIFICADO, por ejemplo. Ya vimos, a propósito de las

RTR, que los procedimientos pueden apelar uno al otro, convocándose entre sí por su nombre, con lo cual quedan expresadas, de modo muy conciso, las secuencias de operaciones que deben efectuarse. Esta es la esencia de la modularidad en programación; existe modularidad, por supuesto, en los sistemas de sonido de alta fidelidad, en el mobiliario, en la célula viva, en la sociedad humana: dondequiera se encuentre una organización jerárquica.

Lo más frecuente es que se tenga necesidad de un procedimiento que actúe en forma variable, de acuerdo a un contexto. Tal procedimiento puede consistir en un sistema de escudriñamiento de todo lo almacenado en la memoria, para determinar sus acciones con arreglo a ello, o bien en una lista de *parámetros* explícitos que orienten la adopción de determinaciones. A veces se utilizan ambos métodos. En la terminología RTR, establecer la secuencia de acciones por cumplir equivale a *elegir qué recorrido se seguirá*. Una RTR a la que se haya perfeccionado con parámetros, y condiciones que guíen la elección de recorridos, es llamada *Red de Transición Aumentada* (RTA). Una tarea donde se haría preferible una RTA a una RTR es la de producción de oraciones con sentido —por oposición a sin sentido—, ya no compuestas por palabras sueltas, y regidas por una gramática representada por un conjunto de distintas RTA. Los parámetros y condiciones harían posible la incorporación de diversas restricciones semánticas, de modo tal que no serían permitidas yuxtaposiciones al azar, del tipo "un refrigerio desagradecido". Hablaremos más sobre esto en el Capítulo XVIII.

Recursividad en programas de ajedrez

Un ejemplo clásico de procedimiento recursivo dotado de parámetros es el de elección de la "mejor" movida en ajedrez. La mejor movida sería la que deja a nuestro oponente en la situación más desventajosa; en consecuencia, una verificación de la bondad de una jugada es simplemente como sigue: suponer que se la ha efectuado, y a continuación evaluar la partida desde el punto de vista del contrincante. ¿Y cómo es la evaluación que éste hace? Claro, él también persigue *su* mejor movida; es decir, recuenta mentalmente todas las jugadas posibles y las evalúa desde *su* propio punto de vista, a la espera de que resulten desventajosas para nosotros. Ahora bien, hago notar que estamos definiendo recursivamente la "mejor movida", gracias a la simple aplicación de la máxima según la cual lo mejor para un lado es lo peor para el otro. El procedimiento recursivo que persigue la mejor movida opera mediante la suposición conjetural de una jugada, ¡seguida por *la apelación a uno mismo, puesto en el lugar del oponente*! Desde aquí uno conjeturará otra movida y se pondrá de inmediato en el papel del oponente de su oponente, o sea en el de uno mismo.

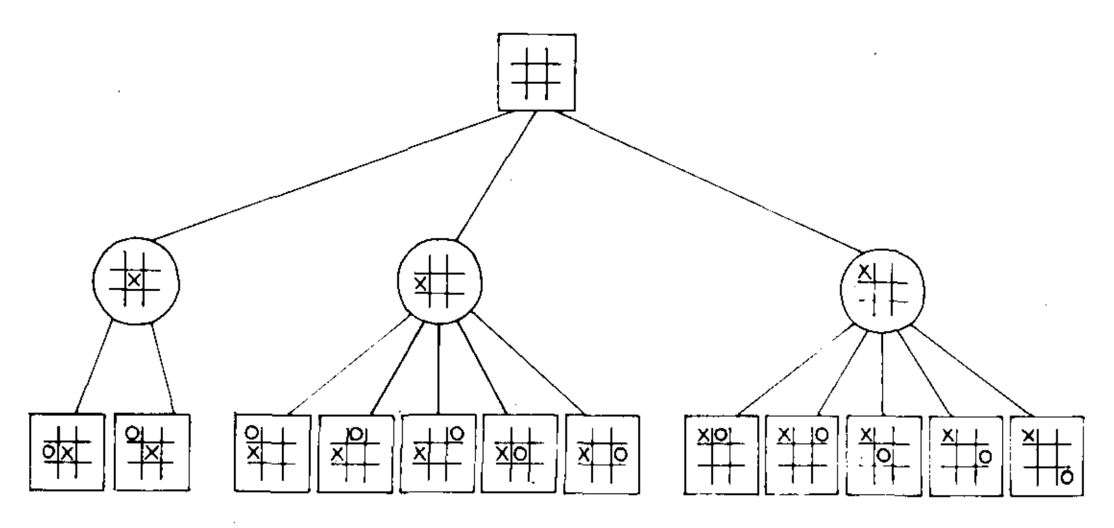


Figura 38. La ramificación de un árbol de jugadas y respuestas, correspondiente al comienzo de una partida de "tres en raya".

Este proceder recursivo puede avanzar varios niveles en profundidad, ¡pero hay que actuar con el respaldo de alguna referencia! ¿Cómo evaluar las posiciones de un tablero sin efectuar anticipaciones? Existen diversos criterios adecuados para satisfacer tal propósito, como por ejemplo el análisis de la cantidad de piezas con que cuenta cada jugador; cuántas y de qué rango están bajo amenaza; en qué situación se encuentra el dominio del centro, etc. Con el apoyo de estos criterios, el generador recursivo de jugadas puede volver a desplazarse hacia adelante, a fin de aportar la evaluación que corresponda al nivel extremo de cada una de las diferentes movidas. Uno de los parámetros de la autoapelación, así, tendrá que establecer la cantidad de jugadas que se deben anticipar. La parte externa de la apelación al procedimiento, por su parte, aplicará a este parámetro cierto valor ubicado fuera. Entonces, cada vez que el procedimiento apela recursivamente a sí mismo, el parámetro de anticipación disminuye en 1, de modo que, si se reduce a cero, el procedimiento optará por seguir el camino alternativo: la evaluación no recursiva.

En esta clase de programa destinado a la práctica de un juego, el análisis de cada movida genera la elaboración de un llamado "árbol de anticipación", donde la propia movida es el tronco, las respuestas son las ramas principales, las contrarrespuestas las ramas secundarias, y así siguiendo. En la figura 38 muestro un árbol de anticipación sencillo, que refleja el comienzo de un juego de "tres en línea".* Obviar la necesidad de explorar

* Conocido también, en los países de habla hispana, como juego del "tres en raya", o más familiarmente "trique", "gato", etc., y en los países de habla inglesa como "tic-tac-toe" (o "tick-tack-toe"). Lo juegan dos personas, una de las cuales dibuja cruces y la otra círculos, en turnos alternados, dentro de los nueve espacios formados por la intersección en ángulo recto de dos paralelas verticales con dos paralelas horizontales. Gana el jugador que ubica primero sus tres signos en fila. [T.]

hasta sus más lejanas extremidades un árbol de anticipación es todo un arte. Con relación a los árboles ajedrecísticos, los seres humanos aventajan a las computadoras en este arte; es sabido que los ajedrecistas de mayor nivel, si los comparamos con la mayoría de los programas de juego, anticipan relativamente poco, pero juegan mucho mejor . . . En las primeras épocas del ajedrez computado, se solía decir que al cabo de diez años aparecería una computadora (o un programa) que iba a convertirse en campeón mundial. Pero cuando transcurrió ese plazo, se tuvo la impresión de que todavía faltaba algo más de diez años para que una computadora ganase el campeonato mundial . . . lo cual, precisamente, es un fundamento adicional de la un tanto recursiva

Ley de Hofstadter: Siempre pasa más tiempo del que se preveía, aun cuando se tome en consideración la Ley de Hofstadter.

Recursividad e impredictibilidad

Ahora bien, ¿qué vinculación existe entre los procesos recursivos de este capítulo, y los conjuntos recursivos de los precedentes? La respuesta involucra la noción de *conjunto recursivamente enumerable*. Que un conjunto sea r.e. significa que puede ser generado a partir de un grupo de puntos de arranque (axiomas), mediante la aplicación reiterada de reglas de inferencia. Así, el conjunto crece y crece, y sus nuevos elementos se van componiendo, de algún modo, con los elementos anteriores, en una especie de "bola de nieve matemática". Pero ésta es la esencia de la recursividad: la definición de algo en función de versiones más simples de ello mismo, en lugar de hacerlo explícitamente. Los números de Fibonacci y los números de Lucas son ejemplos perfectos de conjuntos r.e.: a partir de dos elementos, y gracias a la aplicación de una regla recursiva, echan a rodar una bola de nieve formada por infinitos conjuntos. Es sólo por convención que llamamos r.e. a un conjunto cuyo complemento es, también, "recursivo" y r.e.

La enumeración recursiva es un proceso donde surgen elementos nuevos a partir de elementos anteriores, por la acción de reglas establecidas. Parecen darse muchas sorpresas en estos procesos, como por ejemplo la impredictibilidad de la secuencia Q. Es posible suponer que las secuencias recursivamente definidas de tal tipo poseen la cualidad intrínseca de asumir un comportamiento cada vez más complejo, de suerte que cuanto más se avanza, menor es la predictibilidad.

Esta clase de suposición, si se la profundiza un poco, sugiere que los sistemas recursivos, adecuadamente complicados, son lo bastante poderosos como para evadirse de cualquier molde prefijado. ¿Y esto no constituye uno de los atributos que definen la inteligencia? En vez de considerar úni-

camente programas integrados por procedimientos que *apelan* recursivamente a sí mismos, ¿por qué no trabajar con procedimientos realmente refinados, mediante la creación de programas que puedan modificarse a sí mismos? Es decir, programas que ejerzan su acción sobre programas, extendiéndolos, mejorándolos, generalizándolos, reordenándolos, etc. Es probable que esta forma de "recursividad entrelazada" sea uno de los elementos sustanciales de la inteligencia.

Canon por aumentación interválica

Aquiles y la Tortuga acaban de dar cuenta de una deliciosa comida típica, en el mejor restaurante chino de la ciudad.

Aquiles: Se las arregla usted con los palillos, señora T.

Tortuga: Es natural; soy afecta a la cocina oriental desde mi juventud. Y usted, ¿ha disfrutado de la comida, Aquiles?

Aquiles: Enormemente. Nunca había probado platos chinos. Este banquete ha sido una iniciación espléndida. ¿Tiene usted prisa por irse, o seguimos sentados aquí y conversamos un poco?

Tortuga: Me encanta la conversación con una tetera de por medio. ¡Mesero!

(Aparece un mesero.)

¿Podría traernos la cuenta, por favor, y un poco más de té?

(El mesero se retira.)

Aquiles: Usted conoce más que yo de cocina china, señora T., pero estoy seguro de que yo conozco más que usted de poesía japonesa. ¿Leyó alguna vez un haiku?

Tortuga: Debo confesar que no. ¿Qué es un haiku?

Aquiles: Es un tipo de poema japonés —o minipoema, más bien— de diecisiete pies silábicos, con la misma capacidad de sugerencia, quizá, que el pétalo de una rosa fragante, o de un lirio acuático brillante de rocío. Generalmente, está compuesto por un grupo de cinco sílabas, seguido por otro de siete, y por último otro de cinco.

Tortuga: Estos poemas comprimidos en diecisiete sílabas no pueden encerrar muchas significación . . .

Aquiles: La significación reposa tanto en el pensamiento del lector como en el haiku.

Tortuga: Mmmm . . . Es una afirmación sugerente.

(Llega el mesero con la cuenta, otra tetera y dos bizcochos de los que contienen papelitos con predicciones de la suerte.)

Gracias, mesero. ¿Más té, Aquiles?

Aquiles: Sí, por favor. Estos bizcochitos parecen deliciosos. (*Toma uno, lo muerde y comienza a masticar.*) ¡Eh! ¿Qué hay acá adentro? ¿Un pedazo de papel?

Tortuga: Ahí está escrito su destino, Aquiles. Muchos restaurantes chi-

nos traen bizcochitos de la suerte junto con la cuenta, para suavizar el impacto. Si uno frecuenta estos restaurantes, llega a ver estos bizcochos menos como bizcochos que como portadores de mensajes. Creo que, lamentablemente, se ha comido usted parte del suyo. ¿Qué dice el resto?

Aquiles: Es un poco extraño, pues todas las letras aparecen juntas, sin espacios intermedios, ¿será necesario aplicar alguna forma de decodificación? Ah, ahora veo. Si se colocan los espacios donde corresponde, dice "ES ARTERA ROPA CIENCIA". No le encuentro pies ni cabeza, para nada. Quizá se trate de un poema del género haiku, del cual me he tragado la mayoría de las sílabas.

Tortuga: En ese caso, su suerte se ha reducido a 8/17 avos de haiku. Y es curiosa la imagen que presenta. Si 8/17 avos de haiku constituyen una nueva y rara forma de arte, yo diría ay de nosotros, paciencia, sí, paciencia . . . ¿Puedo verlo?

Aquiles (extendiendo la tirilla de papel a la Tortuga): Claro que sí.

Tortuga: ¡Caramba, Aquiles, si yo lo "decodifico" resulta completamente diferente! Escuche: "ES ARTE RARO PACIENCIA". Suena como un comentario muy agudo acerca de la nueva y rara forma de arte representada por los 8/17 avos de haiku.

Aquiles: ¡Tiene razón! ¿No es asombroso que el poema contenga su propio comentario?

Tortuga: Todo lo que hice fue espaciar de otro modo.

Aquiles: Veamos qué predicción le tocó a usted, señora Tortuga.

Tortuga (parte diestramente su bizcocho, extrae el papel, y lo lee): "La suerte surge / del cliente tanto como / del bizcochito".

Aquiles: Su predicción también es un haiku, señora Tortuga; por lo menos presenta la forma 5-7-5.

Tortuga: ¡Felicitaciones, Aquiles! Yo no lo habría advertido nunca. Es la clase de cosa en la que únicamente usted puede reparar. Lo que más me llama la atención es el texto, el cual, ciertamente, está abierto a la interpretación.

Aquiles: Supongo que ello sólo muestra que cada uno de nosotros tiene su manera propia de interpretar los mensajes con que tropieza.

(Examina el fondo de su taza vacía.)

Tortuga: ¿Más té, Aquiles?

Aquiles: Sí, gracias. Entre paréntesis, ¿cómo está su amigo el Cangrejo? He pensado mucho en él desde que me contó usted aquella singular batalla fonográfica.

Tortuga: Le he hablado a él de usted, también, y está ansioso por conocerlo. Se encuentra muy bien; fíjese que acaba de hacer una nueva adquisición en la línea pasadiscos: un curioso tipo de rockola.

Aquiles: Oh, explíqueme, por favor. Me estoy imaginando rockolas, con

sus coloreadas luces centelleantes y sus tontas canciones, tan gratamente representativas de épocas pasadas.

Tortuga: Esta rockola es demasiado grande para ser ubicada en su casa, así que el Cangrejo ha debido construirle un cobertizo especial, en los fondos.

Aquiles: No puedo explicarme por qué tiene que ser de tal tamaño, salvo que contenga una colección insólitamente grande de discos. ¿Es por eso?

Tortuga: En realidad, contiene nada más que un disco.

Aquiles: ¿Cómo? ¿Una rockola con un solo disco? Esto constituye una contradicción en los términos. ¿Y por qué es tan inmensa, entonces? ¿Ese disco es gigantesco, de seis metros de diámetro, quizá?

Tortuga: No, es simplemente un disco normal de rockola.

Aquiles: Bien, señora Tortuga, usted me debe estar tomando el pelo. ¿Qué es esto de una rockola que tiene exclusivamente una canción?

Tortuga: ¿Quién dijo que se trata de una sola canción?

Aquiles: Todas las rockolas que he visto obedecen al axioma —rockola básico: "Un disco, una canción".

Tortuga: Esta es diferente, Aquiles. El disco único se encuentra suspendido verticalmente y detrás de él hay una pequeña pero compleja red de rieles aéreos, de los cuales cuelgan varios fonógrafos. Si usted oprime el par B-1, pongamos por caso, un disparador acciona un mecanismo automático que hace desplazar al fonógrafo, entre chirridos, por las herrumbradas guías, hasta que enfrenta al disco; luego, realiza un movimiento que lo coloca en posición de pasar a aquél.

Aquiles: Y entonces el disco comienza a girar, y se oye la música, ¿es así?

Tortuga: No del todo. El disco permanece inmóvil: lo que rota es el fonógrafo.

Aquiles: Tendría que haberlo previsto. ¿Pero cómo, no teniendo más que un disco, es posible escuchar más de una canción con ese alocado artefacto?

Tortuga: Le he hecho esa misma pregunta al Cangrejo. Se limitó a sugerirme que hiciera la prueba, así que saqué una moneda de cinco pesos del bolsillo (se obtienen tres piezas por ese precio), la metí en la ranura y apreté los botones B-1, C-3 y B-10, un par luego del otro, elegidos completamente al azar.

Aquiles: Entonces el fonógrafo se deslizó por el riel, se conectó con el disco y comenzó a girar, ¿supongo bien?

Tortuga: Correcto. La música que surgió era por demás agradable, basada en la antigua y famosa tonada B-A-C-H, que usted seguramente recuerda . . .



Aquiles: Imposible olvidarla.

Tortuga: Al terminar la pieza, que correspondía al fonógrafo B-1, éste se retiró lentamente hasta volver a quedar suspendido en su posición inicial.

Aquiles: Y ahora no me dirá usted que el C-3 hizo escuchar una música diferente.

Tortuga: Es precisamente lo que iba a decirle.

Aquiles: Ah, entiendo. Pasó la otra cara del disco, u otra banda de la misma cara.

Tortuga: No, el disco tiene surcos únicamente en uno de sus lados, y cuenta con una sola banda.

Aquiles: ¡No lo puedo comprender! ¡En un disco así no puede haber más que una pieza!

Tortuga: Es lo que yo creía hasta que vi la rockola del señor Cangrejo.

Aquiles: ¿Cómo fue la segunda canción?

Tortuga: Esto es lo interesante . . . Era una canción basada en la melodía C-A-G-E.



Aquiles: ¡Es una melodía completamente diferente!

Tortuga: Es verdad.

Aquiles: ¿John Cage no es un compositor de música moderna? Me parece haber leído acerca de él en uno de mis libros sobre el haiku.

Tortuga: Así es. Ha compuesto obras muy celebradas, como *4'33"*, en tres movimientos, que consiste en silencios de distintas extensiones. Es extraordinariamente expresiva . . . para quien guste de este tipo de cosas.

Aquiles: Si llego a encontrarme en un café ruidoso y desordenado, estaría encantado de gastar unas monedas para escuchar el *4'33"* de Cage en una rockola. ¡Sería un alivio!

Tortuga: De acuerdo. A nadie le gusta oír la barahúnda de platos y vajillas que se entrechocan. Dicho sea de paso, otros lugares donde vendría bien *4'33"* son ciertos comedores de estudiantes.

Aquiles: Pero usted no dice eso pensando en que Cage significa "jaula" en inglés, ¿verdad? Aunque esta asociación zoológica tiene algún sentido. Pero volviendo a la rockola del Cangrejo . . . Estoy desconcertado. ¿Cómo pueden estar codificados "BACH" y "CAGE", al mismo tiempo, en un mismo disco?

Tortuga: Si los examina cuidadosamente, Aquiles, podrá observar que existe cierta relación entre ambos. Permítame explicarle, ¿qué registra usted al escuchar los intervalos sucesivos de la melodía B-A-C-H?

Aquiles: Déjeme pensar. Primero se desciende un semitono, de B a A (B en su acepción alemana, equivalente a Si bemol); luego hay un ascenso

de tres semitonos, para llegar a C; finalmente, otro descenso de un semitono, hasta H. Todo lo cual configura el modelo:

$$-1, \ +3, \ -1.$$

Tortuga: Exacto. ¿Y qué ocurre con C-A-G-E?

Aquiles: Bueno, en C-A-G-E hay, primero, un descenso de tres semitonos, luego un ascenso de diez semitonos (casi una octava) y por último otro descenso de tres semitonos. Así, el modelo es acá:

$$-3, \ +10, \ -3.$$

Parecidísimo al anterior, ¿no?

Tortuga: Sí que lo es. Ambos modelos tienen exactamente el mismo "esqueleto", en cierto sentido. Usted puede obtener C-A-G-E a partir de B-A-C-H, mediante la multiplicación de todos los intervalos por $3\frac{1}{3}$ y transformando los resultados en el número entero más próximo.

Aquiles: ¡Oh, esto sí que es bueno! Entonces, pareciera que en los surcos sólo hay una especie de código mínimo, un esqueleto básico, y que cada fonógrafo elabora su propia interpretación de ese código.

Tortuga: No lo sé, en absoluto. El astuto Cangrejo, que enjaula celosamente sus conocimientos, no me ha proporcionado todos los detalles. Pero pude oír una tercera canción, cuando le tocó girar al fonógrafo B-10.

Aquiles: ¿Cómo fue eso?

Tortuga: La melodía contaba con intervalos enormemente amplios y su ordenamiento era B-C-A-H.



El modelo interválico, en semitonos, fue:

$$-10, \ +33, \ -10.$$

O sea que puede ser obtenido a partir del modelo CAGE, gracias a una nueva multiplicación por $3^1/_3$, redondeando en enteros.

Aquiles: ¿Tiene algún nombre esta multiplicación interválica?

Tortuga: Se la podría llamar "aumentación interválica". Es similar al recurso de la aumentación temporal, usado en el canon, consistente en que la duración de las notas surge de una multiplicación por un valor constante. En este caso, el único efecto que se persigue es hacer más lenta la melodía. En el nuestro, lo que se obtiene es, a través de un curioso sistema, extender la duración de la melodía.

Aquiles: Sorprendente. En conclusión, ¿las tres melodías fueron aumentaciones interválicas de un único modelo básico grabado en el disco?

Tortuga: Eso creo.

Aquiles: Encuentro llamativo esto de que, si aumento BACH obtengo CAGE, y cuando aumento CAGE obtengo otra vez BACH, con la sola alteración de un desorden interior, como si BACH hubiese sufrido un trastorno estomacal al pasar por la mediación de CAGE.

Tortuga: Suena como un comentario muy agudo acerca de la nueva y rara forma de arte representada por Cage.

CAPITULO VI

La localización de la significación

¿Cuándo una cosa no es siempre la misma?

EN EL CAPITULO ANTERIOR, formulamos la pregunta: "¿Cuándo dos cosas son similares?" En éste, abordaremos la otra cara del asunto: "¿Cuándo una cosa no es siempre la misma?" El problema que se plantea es el de si puede afirmarse que la significación es inherente al mensaje, o si, en cambio, la significación siempre es elaborada por la interacción entre un pensamiento, o un mecanismo, y un mensaje, como en el Diálogo precedente. En este último caso, no es posible decir que la significación está localizada en un lugar determinado, ni tampoco que un mensaje esté dotado de determinada significación universal y objetiva, pues cada observador puede aportar su propia significación al mensaje. En el primer caso, por el contrario, la significación estaría localizada y además sería universal. En este capítulo, es mi intención abogar por la universalidad de, al menos, ciertos mensajes, sin extender el reclamo, por cierto, a la totalidad de los mensajes. Resultará que la idea de "significación objetiva" de un mensaje deberá ser vinculada, de manera muy interesante, con la simplicidad necesaria para describir la inteligencia.

Portadores de información y reveladores de información

Comenzaré con mi ejemplo predilecto: la relación entre discos, música y fonógrafos. Nos sentimos enteramente cómodos ante la idea de que un disco contiene la misma información que una pieza musical, a causa de la existencia de fonógrafos, los cuales pueden "leer" discos y convertir el modelo grabado en sonidos. En otras palabras, hay un isomorfismo entre modelo grabado y sonidos, y el fonógrafo es un mecanismo que concreta materialmente tal isomorfismo. Es natural, entonces, que veamos al disco como un *portador de información*, y al fonógrafo como un *revelador de información*. Otra ilustración de estas nociones la brinda el sistema pq. En éste, los "portadores de información" son los teoremas, y el "revelador de información" es la interpretación, la cual es tan transparente que no

hace falta ningún dispositivo electrónico para ayudarnos a extraer información de los teoremas pq.

Estos ejemplos provocan la impresión de que los isomorfismos, y los mecanismos de decodificación (esto es, los reveladores de información), no pasan de revelar una información intrínsecamente interna a las estructuras, ubicada allí a la espera de ser "extraída". Ello conduce a la noción de que, en cada estructura, existen ciertas piezas de información que pueden ser extraídas, y otras que *no pueden* serlo. ¿Pero qué significa realmente la expresión "extraer"? ¿Hasta dónde se puede extraer? Hay casos en que, mediante la aplicación del esfuerzo adecuado, es posible extraer, de determinadas estructuras, piezas de información verdaderamente recónditas. En realidad, la extracción implica operaciones tan complicadas que uno llega a pensar si no está poniendo más información de la que saca.

Genotipo y fenotipo

Tomemos el caso de la información que, según se afirma con frecuencia, reside en la doble hélice del ácido desoxirribonucleico (ADN). Una molécula de ADN —un *genotipo*— se transforma en un organismo —un *fenotipo*— gracias a un proceso sobremanera complejo, que comprende la producción de proteínas, la replicación del ADN, la replicación de células, la diferenciación gradual entre tipos celulares, etc. Dicho al margen, este desarrollo del fenotipo a partir del genotipo —*epigénesis*— es la más enmarañada de las recursividades enmarañadas, a la que dedicaremos toda nuestra atención en el Capítulo XVI. La epigénesis es guiada por un conjunto enormemente complejo de ciclos de reacciones químicas y bucles de retroalimentación.

Cuando termina la construcción del organismo, las características físicas de éste no guardan la más remota similitud con su genotipo. Sin embargo, es de rutina atribuir la estructura material del organismo a la estructura de su ADN, y exclusivamente a ésta. Las primeras evidencias en favor de tal punto de vista surgieron de las experiencias dirigidas por Oswald Avery en 1946, a las que siguió una acumulación aplastante de nuevas corroboraciones. Los ensayos de Avery mostraron que, de entre todas las moléculas biológicas, únicamente el ADN transmite propiedades hereditarias. Es posible modificar otras moléculas en un organismo, tales como las proteínas, pero estas modificaciones no se transmiten a las generaciones posteriores. En cambio, si se modifica el ADN, todas las generaciones sucesivas heredan el ADN modificado. Estas experiencias indican que el único modo de transformar las instrucciones que rigen la construcción de un nuevo organismo es transformar el ADN, lo cual implica, a su vez, que esas instrucciones deben ser codificadas, de alguna manera, en la estructura del ADN.

Isomorfismos misteriosos e isomorfismos prosaicos

Como resultado, se diría que uno está obligado a aceptar la noción de que la estructura del ADN contiene la información de la estructura del fenotipo, lo cual equivale a decir que ambas estructuras son *isomórficas* entre sí. Pero se trata de un isomorfismo *misterioso*: quiero decir con esto que la fragmentación interna del genotipo y del fenotipo, para que sus "porciones" puedan corresponderse entre sí, es una tarea totalmente despojada de sencillez. Los isomorfismos *prosaicos*, en contraste, son aquellos donde las porciones de una estructura pueden proyectarse fácilmente sobre las porciones de la otra. Por ejemplo, el isomorfismo entre un disco y una pieza musical, donde uno sabe que cada sonido de la pieza es correspondido en la grabación por su "imagen" exacta, la cual puede ser aislada con precisión acotándola en los surcos, si se necesita hacerlo. Otro isomorfismo prosaico es el que existe entre el Diseño G y cualquiera de sus mariposas internas.

El isomorfismo entre la estructura del ADN y la del fenotipo es lo que se quiera menos prosaico, y los mecanismos a través de los cuales se manifiesta materialmente son de una complicación vertiginosa. Por ejemplo, si uno deseara descubrir alguna pieza del propio ADN que explique la forma de su nariz o de sus huellas digitales, se enfrentaría a una tarea verdaderamente difícil. Sería algo parecido a tratar de circunscribir *cuál* nota, dentro de una composición musical, es portadora de los efectos emotivos de la obra. Por supuesto que tal nota no existe, pues los efectos emotivos circulan en un nivel superior, movidos por grandes "masas" de la pieza y no por notas aisladas. Aclaremos que tales "masas" no son necesariamente grupos de notas contiguas; puede haber pasajes alejados entre sí que, considerados en conjunto, se muestren como portadores de una determinada significación emotiva.

Del mismo modo, la "significación genética" —es decir, la información relativa a la estructura del fenotipo— está diseminada en toda la extensión de las pequeñas porciones que componen una molécula de ADN; no obstante, nadie comprende todavía el lenguaje vinculado a dicha significación. (Atención: comprender tal "lenguaje" no es en absoluto lo mismo que abrir una brecha en el código genético, objetivo ya logrado a comienzos de los años sesenta. El código genético es lo que rige la transformación de pequeñas porciones de ADN en diversos aminoácidos. La fisura abierta en el código genético equivale a la determinación del valor fonético correspondiente a las letras de un alfabeto desconocido, sin haber establecido aún la gramática ni el significado de las palabras del idioma al que pertenece ese alfabeto. Ello importa un vital paso adelante hacia el objetivo de extraer la significación de las cadenas de ADN, pero es sólo el primero en un largo camino por recorrer.)

Rockolas y disparadores

La significación genética contenida en el ADN es uno de los mejores ejemplos de significación implícita. Para convertir el genotipo en fenotipo, un conjunto de mecanismos mucho más complejos que el genotipo debe actuar sobre éste. Las diversas porciones del genotipo actúan como *disparadores* de aquellos mecanismos. Una rockola —de las comunes y corrientes, ¡no del tipo Cangrejo!— brinda una analogía útil: un par de botones especifica la muy compleja acción que ha de seguir el mecanismo; luego, podría decirse que el par de botones ha "disparado" la canción que es pasada por el aparato. En el proceso que transforma al genotipo en fenotipo, las rockolas celulares —mis disculpas por el concepto— admiten que se "aprieten los botones" ligados ya a concentraciones pequeñas, ya a extensas cadenas de ADN: las "canciones" que surgen constituyen frecuentemente el ingrediente principal para la creación de nuevas "rockolas". Es como si las rockolas verdaderas, en lugar de producir baladas sentimentales, produjeran letras que indiquen cómo construir rockolas más complejas . . . Porciones de ADN disparan la elaboración de proteínas; estas proteínas disparan cientos de nuevas reacciones, las cuales, a su turno, disparan la operación de replicación que, luego de diversos pasos, copia al ADN, y así siguiendo una y otra vez . . .

Esto da una idea de hasta qué punto es recursivo el proceso. El resultado final de esta gran cantidad de entrelazamientos entrelazados es el fenotipo: el individuo. Y uno dice que el fenotipo es la revelación —la "extracción"— de la información presente en el ADN, en latencia, al comenzar. (El término "revelación", en este contexto, sigue el uso que hace de él Jacques Monod, uno de los más profundos y originales biólogos moleculares del siglo veinte.)

Ahora bien, nadie sostendría que una canción salida del parlante de una rockola constituye una "revelación" de información inherente al par de botones presionados, pues el par de botones no es más que el *disparador*, cuya función es poner en actividad las porciones portadoras de información del mecanismo de la rockola. Por otra parte, parece perfectamente razonable denominar "revelación", de información inherente al disco, a la extracción de música a partir de una grabación discográfica; hay varias razones para ello:

(1) la música no parece estar oculta en los mecanismos del fonógrafo;
(2) es posible equiparar los elementos de entrada (el disco) con los de salida (la música), dentro de un grado convencional de precisión;
(3) es posible pasar otros discos en el mismo fonógrafo, de los cuales resultan sonidos distintos;
(4) el disco y el fonógrafo se distinguen fácilmente uno de otro.

Plantear si los fragmentos de un disco *roto* contienen información intrínseca es una cuestión diferente. Los bordes de cada pedazo se unen entre sí y de tal modo la información queda reconstituida, pero se trata de algo mucho más complicado. Y tenemos el problema que plantea cuál es el significado intrínseco de un llamado telefónico confuso . . . Hay un vasto espectro de grados de inherencia de la significación. Es interesante hacer el intento de ubicar la epigénesis dentro de este espectro. Cuando se produce el desarrollo de un organismo, *¿puede decirse que está teniendo lugar* la "extracción" de la información depositada en su ADN? ¿Es allí donde reside toda la información relacionada con la estructura del organismo?

Ei ADN y la necesidad del contexto químico

En un sentido, la respuesta a las preguntas anteriores tendría que ser afirmativa, en función de experiencias como la de Avery. En otro sentido, no obstante, la respuesta debería ser negativa, porque son muchos los procesos de extracción que dependen de procesos químicos celulares extraordinariamente complicados, los cuales no están codificados por el ADN. Este actúa bajo la certidumbre de que aquéllos sucederán, pero por lo visto no contiene ningún código que los genere. Así, nos enfrentamos con dos perspectivas, en colisión entre sí, acerca de la naturaleza de la información contenida en un genotipo. Un punto de vista sostiene que es tanta la información situada *fuera del ADN*, que no es razonable ir más allá de considerar a éste como, solamente, un conjunto muy intrincado de disparadores: una serie de botones de rockola que deben ser oprimidos; el otro punto de vista dice que *toda la información está allí*, pero de una manera muy implícita.

Se podría pensar que ambas son simplemente dos formas de expresar la misma cosa, pero no es del todo así. Una de las perspectivas sostiene que el ADN carece por completo de significación, fuera de su contexto; la otra sostiene que, aun considerada fuera de contexto, una molécula de ADN perteneciente a un ser vivo tiene en su estructura tal *lógica interior compulsiva*, que su mensaje debe poderse deducir, de una manera u otra. Para formularlo del modo más sucinto posible: un punto de vista afirma que es necesario el *contexto químico* para que el ADN adquiera significación; el otro afirma que únicamente se necesita *inteligencia* para revelar la "significación intrínseca" de una cadena de ADN.

Un OVNI improbable

Podemos adquirir una visión nueva sobre este tema, si consideramos un caso hipotético muy curioso. Un disco con la ejecución de la sonata de

Bach en Fa menor para violín y teclado, por David Oistraj y Lev Oborin, es lanzado al espacio en el interior de un satélite. Desde éste, luego, es puesto en una trayectoria exterior al sistema solar y, posiblemente, a la galaxia misma: no es más que un objeto circular con un orificio en el centro, vagando por la inmensidad intergaláctica. Ciertamente, se ha desprendido de su contexto. ¿Cuánta significación transporta?

Si una remota civilización lo encontrase, es casi seguro que la forma del objeto atraería su atención, y despertará su interés por saber qué es. La forma, así, actuando de inmediato como disparador, aportaría a esos seres alguna información: es un artefacto, quizá un artefacto portador de información. Esta idea —comunicada o disparada, por el disco mismo— *crea ahora un nuevo contexto*, dentro del cual será percibido el disco a partir de ese momento. Los pasos siguientes hacia la decodificación puede que tomen mucho más tiempo, nos es difícil asegurarlo.

Podemos imaginar que si un disco análogo hubiese llegado a la Tierra en la época de Bach, nadie habría sabido qué hacer con él, y muy probablemente no hubiese sido descifrado. Pero ello no debilita nuestra convicción de que la información estaba *allí* desde el principio; únicamente sabemos que; en esos tiempos, el conocimiento humano no era tan refinado en materia de recopilación, transformación y revelación de la información.

Niveles de comprensión de un mensaje

En la actualidad, la noción de decodificación está sumamente extendida; llena una parte significativa de la actividad de astrónomos, lingüistas, arqueólogos, especialistas en asuntos militares y otros. Se dice a menudo que quizá estamos flotando en un mar de mensajes radiales procedentes de otras civilizaciones, pero que todavía no sabemos cómo descifrar. Y han aparecido serias reflexiones, que ocupan el pensamiento de los técnicos en desciframiento. Una de las principales —posiblemente la más profunda— es la vinculada con preguntas del tipo: "¿Cómo reconocer siquiera la existencia de un mensaje?" "¿Cómo identificar un sistema comunicativo?" El envío de un disco, aparentemente, es una solución sencilla: su estructura material es muy llamativa, y al menos para nosotros es presumible que dispararía, en una inteligencia lo suficientemente alta, la iniciativa de buscar la información allí encerrada. Sin embargo, parece que la remisión de objetos sólidos a otros sistemas solares debe descartarse por el momento, a causa de razones técnicas; pero ello no es óbice para que abandonemos la hipótesis.

Supongamos que una civilización extraña descubra la idea de que el mecanismo adecuado para interpretar el disco es un aparato que convierte las formas grabadas en sonidos. Esto sería algo aún muy distante de un verdadero desciframiento. ¿Y en qué consistiría un desciframiento *logra-*

do del disco? Evidentemente, esta civilización tiene que conseguir que los sonidos adquieran sentido para ella. La simple producción de sonidos carece de valor propio, a menos que éstos cumplan la finalidad deseada de actuar como disparadores en el interior del cerebro (si cabe la palabra) de los seres no terrestres. ¿Y cuál es esa finalidad deseada? Poner en actividad, en tales cerebros, las estructuras generadoras de efectos emocionales que sean análogos a los efectos emocionales que nosotros experimentamos al escuchar la pieza. En rigor, la producción de sonidos podría llegar a obviarse, siempre que estos seres cuenten con otras formas de utilizar el disco como medio para movilizar las estructuras pertinentes en sus cerebros. (Si los humanos contáramos con una forma de movilizar las estructuras de nuestros cerebros en el orden secuencial con que lo hace la música, podríamos resignarnos perfectamente a prescindir de los sonidos; pero es demasiado improbable que se consiga evitar la mediación del oído en este terreno. La existencia de compositores sordos —Beethoven, Dvořák, Fauré—, o de músicos que "oyen" la obra cuando leen una partitura, no modifica la situación, pues tal capacidad se funda en una experiencia anterior de décadas de audición directa.)

Aquí es donde las cosas se ponen bastante complicadas. ¿Tendrán emociones los seres de aquella civilización? Suponiendo que sí, ¿se podrá proyectar alguna clase de correspondencia entre las nuestras y las de ellos? Si sus emociones son semejantes a las nuestras, ¿se combinarán entre sí de manera parecida a como lo hacen las nuestras?, ¿esos seres conocerán amalgamas del tipo "belleza trágica" o "valeroso sufrimiento"? Si resulta que en todo el universo existen seres que comparten estructuras cognoscitivas con nosotros, en una medida tal que abarque inclusive la emotividad, entonces el disco, en cierto sentido, nunca podrá salir de su contexto natural; en la naturaleza, este contexto es parte del sistema de las cosas. En este caso, es probable que un disco vagabundo, si no sufre en el camino un accidente fatal, sea finalmente recogido por un ser o grupo de seres, quienes llegarán a descifrarlo de un modo tal que podremos considerar logrado.

"Paisaje espacial imaginario"

Líneas atrás, hablando de la significación de una molécula de ADN, utilicé la expresión "lógica interior compulsiva": creo que se trata de una noción clave. Para ilustrarla, modificaremos levemente nuestra hipotética anécdota del disco lanzado al espacio, sustituyendo la sonata de Bach por el "Imaginary Landscape number 4" (Paisaje imaginario número 4), de John Cage. Esta composición es una obra clásica de la llamada música *aleatoria* o *casual*: música cuya estructura es determinada en función de procesos regidos por el azar, y no por la intención de transmitir una emoción personal. Para realizar esta obra, veinticuatro ejecutantes se pegaron

a las veinticuatro perillas de doce aparatos de radio, y en el lapso de duración de la pieza se dedicaron a hacerlas girar caprichosamente, de modo que cada radio subía y bajaba de volumen al azar, mientras las estaciones variaban en forma permanente. El sonido total producido es la composición. El criterio de Cage al respecto es expresado en sus propias palabras: "dejemos que los sonidos sean ellos mismos, y no vehículos de teorías elaboradas por el hombre o expresión de sentimientos humanos".

Imaginemos ahora que ésta es la música grabada en el disco enviado al espacio. Es extraordinariamente improbable —por no decir imposible— que una civilización no terrestre comprenda la naturaleza del artefacto. Puede que despierte intriga la contradicción existente entre el mensaje marco ("Soy un mensaje, decodifíquenme"), y el caos de la estructura interna. Hay pocas "masas" discernibles en la composición de Cage, y pocas pautas que puedan orientar a un descifrador. En cambio, en una obra de Bach habría mucho para discernir: modelos, modelos de modelos, y así siguiendo. No tenemos manera de saber si tales modelos son universalmente apreciables. Lo que sabemos acerca de la inteligencia, de la emotividad o de la música, no basta para que podamos establecer si la lógica interna de una composición de Bach es tan universalmente compulsiva que su significación pueda extenderse hasta las galaxias.

Sin embargo, el tema que nos interesa ahora no es si Bach cuenta o no con la suficiente lógica interior; el tema es si existe *algún* mensaje que tenga, *per se*, la suficiente lógica interior compulsiva como para que su contexto sea automáticamente restaurado, dondequiera entre en contacto con él una inteligencia de nivel adecuadamente alto. Si hay algún mensaje que cuente con ese atributo de restauración contextual, parece razonable considerar la significación de tal mensaje como una propiedad inherente al mismo.

Los descifradores heroicos

Otro ejemplo esclarecedor de estos conceptos lo da el desciframiento de antiguos textos, escritos en idiomas y alfabetos desconocidos. La intuición siente que *hay* información intrínseca en esos textos, se logre o no revelarlos. Es un sentimiento tan vigoroso como el convencimiento de que hay significación intrínseca en un periódico escrito en chino, aun cuando ignoremos por completo ese idioma. Una vez que la escritura o el idioma de un texto han sido descifrados, nadie pregunta dónde reside la significación: con toda claridad, ésta reside *en el texto*, no en el método de desciframiento; igual ocurre con la música, la cual reside en un disco, no en el interior de un fonógrafo . . . Una de las formas en que identificamos los mecanismos decodificadores es teniendo en cuenta que éstos no *agregan* ninguna significación a los signos u objetos que reciben como entrada: sólo revelan la significación intrínseca de tales signos u objetos. Una

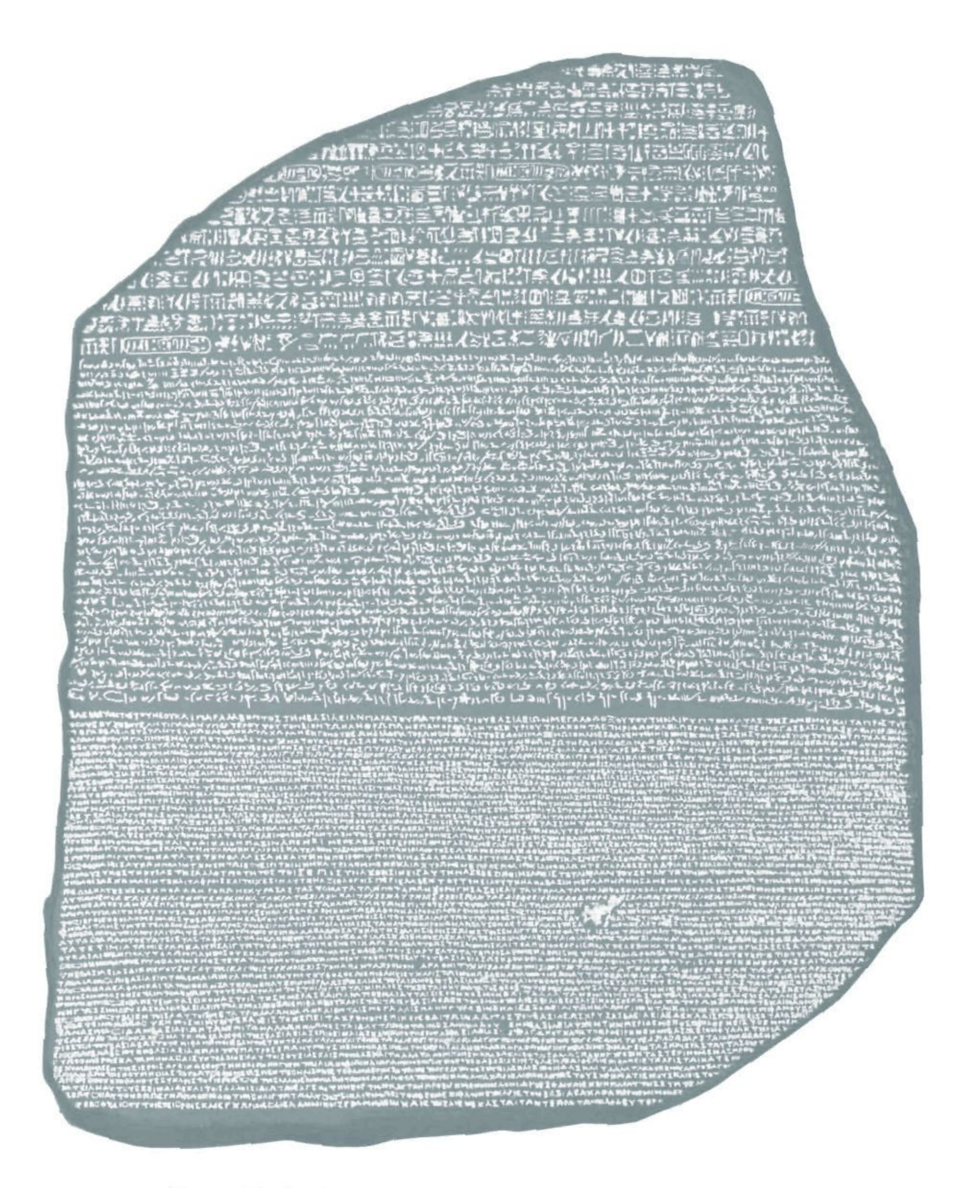


Figura 39. La piedra Rosetta. (Cortesía del Museo Británico.)

rockola no es un mecanismo decodificador, pues no revela la significación inherente a los símbolos de entrada; por el contrario, suministra la significación encerrada en su interior.

El desciframiento de un texto antiguo puede haber implicado décadas de trabajo por parte de distintos equipos de estudiosos, dedicados durante ese lapso a escudriñar conocimientos almacenados en bibliotecas de to-

do el mundo . . . ¿Este proceso no agrega también información? ¿Cuán intrínseca es la significación de un texto, si son necesarios tan gigantescos esfuerzos para establecer las reglas de decodificación? ¿Pone uno la significación en el texto, o la significación ya estaba allí? Mi intuición me dice que la significación siempre estuvo allí, y que a pesar de lo arduo del proceso de extracción, no es posible extraer ninguna significación que no estuviese en el texto desde el principio. Esta intuición se apoya principalmente en una circunstancia: sospecho que el resultado es inevitable, que si tal equipo no hubiese descifrado un texto determinado en cierto momento, otro equipo lo habría hecho en otro momento . . . y procediendo del mismo modo. Y ocurriría así porque la significación es algo propio del texto, y ejerce su efecto sobre la inteligencia de una manera que es previsible. Podemos decir, genéricamente: *la significación es parte de un objeto, en la medida en que actúa sobre la inteligencia de un modo previsible.*

La figura 39 muestra la piedra Rosetta, uno de los más valiosos descubrimientos en su género. Fue la clave para el desciframiento de los jeroglíficos egipcios, pues contiene textos paralelos en tres escrituras: jeroglífica, demótica y griega. Las inscripciones de esta estela basáltica fueron descifradas por vez primera en 1821, por Jean François Champollion, el "padre de la egiptología". Se trata de una resolución en apoyo de Ptolomeo V Epifanes, adoptada por una asamblea de sacerdotes reunida en Menfis.

Los tres estratos de todo mensaje

En estos ejemplos de desciframiento de mensajes fuera de contexto, podemos distinguir muy claramente tres niveles distintos de información: (1) el mensaje *marco*; (2) el mensaje *exterior*; (3) el mensaje *interior*. Estamos más familiarizados con el (3), el mensaje interior, del cual se supone que es lo que debe transmitirse: las experiencias emotivas, en música; el fenotipo, en genética; el sistema de gobierno y los rituales de las antiguas civilizaciones, en las inscripciones arqueológicas, etc.

Comprender el mensaje interior es haber *extraído* la significación pensada por el emisor.

El mensaje marco es el mensaje: "Soy un mensaje; ¡decodifíquenme, si pueden!"; es transmitido en forma implícita por las meras apariencias físicas de cualquier portador de información.

Comprender el mensaje marco es advertir la necesidad de un mecanismo decodificador.

Si el mensaje marco es reconocido como tal, la atención entonces se desplaza hacia el nivel (2), el mensaje exterior. Este consiste en la informa-

ción transportada implícitamente por los modelos simbólicos y las estructuras del mensaje, la cual señalará cómo decodificar el mensaje interior.

Comprender el mensaje exterior es construir, o saber cómo construir, el mecanismo decodificador adecuado que debe aplicarse al mensaje interior.

El nivel exterior es *forzosamente* un mensaje implícito, en el sentido de que el emisor no puede estar seguro de que será comprendido. Sería un esfuerzo inútil incluir instrucciones para orientar la decodificación del mensaje exterior, pues pasarían a formar parte del mensaje interior, el cual sólo puede ser comprendido cuando se ha descubierto el mecanismo decodificador. Por este motivo, *el mensaje exterior es, necesariamente, un conjunto de disparadores*, y no un mensaje que puede ser revelado por un decodificador.

La formulación de estos tres "estratos" es nada más que una iniciación, más bien imperfecta, del examen de cómo está contenida la significación en los mensajes. Quizá haya estratos y más estratos de mensajes externos e internos, en lugar de sólo uno de cada uno de ellos. Pensemos, por ejemplo, en lo intrincadamente enmarañados que son los mensajes interior y exterior de la piedra Rosetta. Para decodificar exhaustivamente un mensaje, se debería reconstruir por entero la estructura semántica que subyace a su producción, y de este modo comprender al emisor en toda su profundidad. En consecuencia, se podría dejar de lado el mensaje interior, pues si verdaderamente se ha comprendido en todos sus matices el mensaje exterior, el interior puede reconstruirse.

El libro *After Babel*, de George Steiner, es un extenso análisis de la interacción entre mensajes interiores y exteriores (aunque el autor no emplee en ningún momento esta terminología). El tono del libro es manifestado por el siguiente pasaje:

> Por lo común, utilizamos una taquigrafía debajo de la cual yace un caudal de asociaciones subconscientes, deliberadamente ocultas o declaradas, tan extensas e intrincadas que probablemente sean un equivalente de la índole y de la singularidad de nuestro carácter de personas individuales.[1]

Leonard B. Meyer, en su libro *Music, the Arts, and Ideas*, formula reflexiones análogas:

> El modo de escuchar una composición de Elliott Carter difiere radicalmente del modo adecuado para una composición de John Cage. Igualmente, una novela de Beckett debe ser expresamente leída de manera distinta que una novela de Bellow. Una pintura de Willem de Kooning, y otra de Andy Warhol, requieren diferentes actitudes de percepción cognoscitiva.[2]

[1] George Steiner, *After Babel*, pp. 172-3.

[2] Leonard B. Meyer, *Music, The Arts, and Ideas*, pp. 87-8.

Quizá las obras de arte traten de transmitir su estilo, antes que ninguna otra cosa. En tal caso, si uno pudiera escudriñar un estilo hasta su fondo mismo, podría luego prescindir de las creaciones generadas por ese estilo. "Estilo", "mensaje exterior", "técnica de decodificación", son formas de expresar la misma idea básica.

Los cristales aperiódicos de Schrödinger

¿Por qué vemos un mensaje marco en cierto objetos, y no en otros? ¿Por qué una civilización no terrestre, si intercepta el disco andariego, debe sospechar que éste encierra un mensaje? ¿Qué diferencia hay entre ese disco y un meteorito? Sin duda, su forma geométrica sería el primer indicio de que "está pasando algo extraño". El segundo indicio sería el hecho de que —observado en escala microscópica— consiste en una larga secuencia aperiódica de huellas, con un trayecto en espiral. Si desenrollásemos la espiral, tendríamos una descomunal (aproximadamente 600 metros de largo) secuencia lineal de minúsculos símbolos. Esto no se distingue mucho de una molécula de ADN, cuyos símbolos, derivados de un breve "alfabeto" compuesto por cuatro bases químicas diferentes, fuesen puestos en fila, a lo largo de una secuencia unidimensional, y luego enrollados helicoidalmente. Antes de que Avery estableciera la conexión existente entre los genes y el ADN, el físico Erwin Schrödinger predijo, sobre la base de fundamentos exclusivamente *teóricos* —en su importante obra *What Is Life?*—, que la información genética tendría que ser almacenada en "cristales aperiódicos". En realidad, los libros mismos son cristales aperiódicos contenidos en el interior de nítidas formas geométricas. Estos ejemplos sugieren que, allí donde un cristal aperiódico aparezca "empacado" dentro de una estructura geométrica perfectamente regular, puede estar encerrado un mensaje interior. (No sostengo que ésta sea una caracterización completa de los mensajes marco; así y todo, se da el hecho de que muchos mensajes usuales están asociados a mensajes marco que responden a nuestra descripción. La figura 40 brinda excelentes ejemplos al respecto.)

Lenguajes en los tres niveles

Los tres niveles se presentan con gran claridad en el caso de un mensaje que fuese hallado dentro de una botella depositada en la playa por el mar. El primer nivel, el mensaje marco, aparece cuando la botella es recogida, y se advierte que ha sido cerrada herméticamente y que contiene

un pedazo seco de papel. Aun antes de percibir la escritura, este tipo de artefacto es reconocible como un portador de información. Arrojar en este momento la botella, en lugar de seguirla examinando, sería un acto de extraordinaria —casi inhumana— falta de curiosidad.

A continuación, pues, seguramente la botella es abierta y se estudian los signos escritos en el papel. Quizá son japoneses, cosa que puede descubrirse sin necesidad de entender el mensaje interior: basta con reconocer los caracteres. El mensaje exterior puede ser expresado en forma de oración española: "Estoy escrito en japonés". Una vez establecido esto, se puede abordar el mensaje interior, el cual puede tratarse de un pedido de auxilio, un haiku, el lamento de un enamorado . . .

No serviría de nada que el mensaje interior incluyese una traducción de la oración: "Este mensaje está en japonés", pues ello requeriría de alguien que sepa japonés para leerlo. Y después de leerlo, ese alguien tendría que reconocer el hecho de que, como está en japonés, él puede leerlo. Para escapar de esto, hay que incluir traducciones de "Este mensaje está en japonés" en muchos idiomas. Desde el punto de vista práctico, eso serviría de ayuda, pero en el plano teórico la dificultad sigue siendo la misma. Un hablante de español tiene que, todavía, reconocer la "españolidad" del mensaje; de otro modo, no le será útil. En consecuencia, no se puede evitar el problema de descubrir cómo descifrar el mensaje interior *desde fuera*; el mensaje interior mismo puede proveer indicios y corroboraciones pero, en el mejor de los casos, éstos no son sino disparadores que actúan sobre el descifrador.

Este obstáculo es similar al que enfrenta el aficionado a las emisiones de radio en onda corta. Primero, debe decidir si los sonidos que está oyendo en un momento dado constituyen un mensaje, o son simplemente descargas estáticas. Los sonidos, por sí mismos, no aclaran la situación, ni siquiera en el muy improbable caso de que el mensaje interior esté formulado en el idioma del aficionado, y diga, "¡Estos sonidos constituyen realmente un mensaje y no son sólo estática!" Si el oyente reconoce un mensaje marco en los sonidos, trata luego de identificar el idioma de la emisión, pero es indudable que permanece todavía del lado de afuera: recoge los *disparadores* que emite la radio, pero éstos no le pueden indicar explícitamente la respuesta.

Corresponde a la naturaleza misma del mensaje exterior el no ser transmisible en ningún lenguaje explícito. Establecer un lenguaje explícito para transmitir los mensajes exteriores no sería un avance: ¡sería una contradicción en los términos! Comprender el mensaje exterior es siempre un obstáculo propio de la tarea del oyente. Si lo resuelve exitosamente se abrirá paso hacia el interior y en esta otra etapa la proporción de significaciones explícitas experimentará un notable incremento. Por comparación con los estadios anteriores, el esclarecimiento del mensaje interior parecerá poco costoso. Es como si su comprensión se hubiese ampliado de pronto.

เรียนภาษาอังกฤษด้วยภาพ

เมื่อท่านเรียนตามวิธีนี้ไปได้ ๓๐ หน้า ลอง
ทวนความรู้ของท่านดูด้วยการหัดตอบ คำถาม
เป็นภาษาอังกฤษในหน้า ๓๑, ๓๒ และ ๓๓
แล้วพลิกไปตรวจดูคำตอบในหน้า ๓๔ ว่าถูก
ต้องหรือไม่ คำถามและคำตอบมีให้ไว้ต่อๆ
ไปตลอดทั้งเล่ม

வாசித்துவருகையில், ஒவ்வொரு வாக்கியத்தையும்
அதற்குரிய படத்தோடு ஒப்பிட்டுப் பார்க்குந் தோ-
றும் அர்த்தமாகிக்கொண்டு வரும். மனப்பாடம்
பண்ணிக்கொள்ள வேண்டிய அம்சங்கள் மிகக்
குறைவு. ஆகையினால் அர்த்தத்துக்கு இணங்க
வாக்கிய அமைப்பின் வேறுபாடுகளைக் கண்டறி-
ந்து கொள்வதற்கு வசதிகள் உண்டு. இம்முறை
அநுசரித்து ஆங்கிலம் கற்றுக்கொள்வது கஷ்ட-
மில்லாததுமன்றி விளையாட்டுச் சம்பந்தப்பட்டது.

কত অজানারে জানাইলে তুমি,
কত ঘরে দিলে ঠাঁই—
দূরকে করিলে নিকট বন্ধু,
পরকে করিলে ভাই।
পুরানো আবাস ছেড়ে যাই যবে
মনে ভেবে মরি কী জানি কী হবে,
নূতনের মাঝে তুমি পুরাতন
সে কথা যে ভুলে যাই
দূরকে করিলে নিকট বন্ধু,
পরকে করিলে ভাই

ഡീസൽ തീവണ്ടി എൻജിന്

നാടൻ നിർമ്മിത വസ്തുക്കൾ

La teoría "rockola" de la significación

Estos ejemplos pueden impresionar como evidencias en favor del criterio de que ningún mensaje posee significación intrínseca, ya que para comprender cualquier mensaje interior, previamente deben ser comprendidos su mensaje marco y su mensaje exterior, los cuales son vehiculizados únicamente por disparadores (tales como la presentación del mensaje en alfabeto japonés, o en surcos ordenados en espiral, etc.). Se diría, pues, que uno no puede ir más allá de una teoría "rockola" de la significación, cuya doctrina es que *ningún mensaje contiene significación intrínseca* porque, antes de poder ser comprendido, debe ser aplicado como entrada —o alimentación— de una "rockola", de lo cual se deduce que la información contenida en la "rockola" debe ser agregada al mensaje para que éste adquiera significación.

Este argumento es muy similar a la trampa en que la Tortuga hace caer a Aquiles, en el Diálogo de Lewis Carroll. Dicha trampa consistía en la idea de que, antes de poder utilizar una regla, es necesario contar con otra regla que indique cómo emplear la anterior; en otras palabras, habría una jerarquía infinita de niveles de reglas que impiden, en todo momento, la utilización de ninguna de ellas. En el caso presente, la trampa consiste en la idea de que, antes de poder comprender un mensaje, es necesario contar con otro mensaje que indique cómo comprender el anterior; en otras palabras, habría una jerarquía infinita de niveles de mensajes que impiden, en todo momento, la comprensión de ninguno de ellos.

Figura 40. Un collage de escrituras. La del ángulo superior izquierdo es una inscripción en el sistema bustrofedónico de escritura, todavía sin descifrar, de Islandia oriental, una de cuyas características consiste en que cada segunda línea está invertida respecto a la anterior. Los caracteres están esculpidos en una tableta de madera de 9 por 89 centímetros. A continuación, siguiendo el sentido de las agujas del reloj, encontramos muestras de mogol: primero, mogol actual, y abajo un documento de 1314. Luego —es decir, en el ángulo inferior derecho— aparece un poema de Rabindranath Tagore en bengalí. Lo que sigue es un encabezado de un periódico escrito en malasio (correspondiente al oeste de la provincia de Kerala, al sur de la India); poco más arriba encontramos la elegancia curvilineal del tamil escrito (Keralà oriental). Después tenemos un breve fragmento de un cuento folclórico en buguinés (Islas Célebes, Indonesia). Ocupa el centro del collage un párrafo escrito en tailandés; sobre él, un manuscrito rúnico del siglo catorce, con el texto de la ley vigente en la provincia de Scania, al sur de Suecia. Por último, a la izquierda de las dos últimas muestras citadas, podemos observar un fragmento de las leyes de Hammurabi, escrito en asirio cuneiforme. Tal como si perteneciese a una civilización extraña, me invade un profundo sentimiento de misterio cuando me pregunto cómo se encierra la significación en las extrañas curvas y ángulos de cada uno de estos bellos cristales aperiódicos. En la forma, hay contenido. [Fuentes: Hans Jensen, *Sign, Symbol, and Script* (New York: G. Putnam's Sons, 1969), pp. 89 (cuneiforme), 356 (Islandia oriental), 386, 417 (mogol), 552 (rúnico); Kenneth Katzner, *The Languages of the World* (New York: Funk & Wagnalls, 1975), pp. 190 (bengalí), 237 (buguinés); I. A. Richards and Christine Gibson, *English Through Pictures* (New York: Washington Squa e Press, 1960), pp. 73 (tamil), 82 (tailandés).]

A pesar de todo, sabemos muy bien que estas paradojas no son válidas, pues las reglas *sí* se utilizan, y los mensajes *sí* son comprendidos. ¿Cómo resolveremos esto?

Crítica a la teoría rockola

La explicación es que nuestra inteligencia no es incorpórea, pues requiere de un vehículo material: el cerebro. La estructura de éste es resultado del largo proceso de evolución, y sus operaciones están regidas por las leyes de la física. Puesto que se trata de una entidad natural, *nuestro cerebro funciona sin necesidad de que se le indique cómo debe hacerlo*. Así, la acción distorsiva de la paradoja de Carroll acerca de las reglas se cumple en el nivel donde, bajo el imperio de las leyes físicas, son producidos los pensamientos; paralelamente, el mensaje paradoja actúa en el nivel donde el cerebro interpreta como mensaje los datos con que es alimentado. Pareciera que el cerebro estuviese equipado con "hardware"* que se encargase de reconocer como mensajes a ciertas cosas, y de decodificarlos. Esta capacidad innata para extraer significaciones interiores es lo que permite la producción del proceso, altamente recursivo y del tipo bola de nieve, de adquisición del lenguaje. El hardware innato es como una rockola: suministra la información adicional que convierte a los simples disparadores en mensajes completos.

Si la inteligencia es universal, la significación es intrínseca

Ahora bien, si en los seres humanos las diferentes "rockolas" contuvieran diferentes "canciones", y respondiesen a determinados disparadores de modo completamente peculiar, no nos inclinaríamos a atribuir significaciones intrínsecas a esos disparadores. Sin embargo, el cerebro está construido de tal forma que el de cada individuo reacciona casi igual que el de los demás individuos, frente a determinados disparadores, en tanto el resto de las circunstancias también coincida. Por ello es que un niño pequeño puede aprender cualquier idioma: responde a los disparadores del mismo modo que cualquier otro niño de su edad. Esta uniformidad en las "rockolas humanas" establece un "lenguaje" uniforme, en el cual pueden ser comunicados los mensajes marco y los mensajes exteriores. Si, además,

* "Equipo físico", "dotación física", "máquinas físicas", "componentes físicos" son algunas de las versiones españolas ensayadas para este término de la computación, comúnmente empleado en su forma inglesa por los especialistas. Se opone a *software* ("Máquinas, dotación o equipo lógicos"), término también preferido en el uso técnico, en el ámbito de habla hispana, a las traducciones que de él se han propuesto hasta ahora. Esquematizando, es una pareja de palabras que contrapone la idea de *artefactos materiales* a la de *programas* que son procesados por tales artefactos. [T.]

estamos convencidos de que la inteligencia humana es sólo un ejemplo de un fenómeno generalizado en la naturaleza —la aparición de seres inteligentes en muy diferentes contextos—, consideraremos probable, como consecuencia, que el "lenguaje" en el cual son comunicados los mensajes marco y los mensajes exteriores entre los seres humanos es un "dialecto" de un lenguaje universal, vehículo de comunicación de las inteligencias entre sí. Luego, habría cierta clase de disparadores dotados de "poder disparador universal", frente a los cuales todos los seres inteligentes tenderían a reaccionar del mismo modo en que lo hacemos nosotros, los seres humanos.

Lo anterior nos permitiría modificar nuestra apreciación con respecto a dónde se localiza la significación. Podríamos atribuir las significaciones (marco, exterior e interior) de un mensaje al mensaje mismo, puesto que los mecanismos descifradores son universales; es decir, son formas fundamentales de la naturaleza que surgen del mismo modo en distintos contextos. Para ilustrar esto gráficamente, supongamos que "A-5" actúa como disparador de la misma canción en todas las rockolas, y supongamos también que las rockolas no son artefactos hechos por el hombre, sino objetos naturales esparcidos por doquier, como las galaxias o los átomos de carbono. Siendo así, probablemente, veríamos justificado el considerar como "significación inherente" de "A-5" a su poder disparador universal; asimismo, "A-5" merecería el nombre de "mensaje", en lugar del de "disparador"; y la canción, por cierto, sería la "revelación" de la significación inherente, aunque implícita, de "A-5".

Chovinismo terráqueo

Esta atribución de la significación a los mensajes se deriva del carácter invariante del procesamiento de aquéllos por parte de las inteligencias diseminadas en todo el universo. En tal sentido, hay aquí alguna semejanza con la atribución de masa a un objeto. Los antiguos suponían que el peso de un objeto era una propiedad intrínseca de este último. Pero, cuando se llegó a entender el fenómeno de la gravedad, se supo que el peso varía de acuerdo al campo gravitacional que rodea al objeto. No obstante, hay un elemento vinculado al fenómeno, la masa, que no varía de acuerdo al campo gravitacional; de este carácter invariante se derivó la conclusión de que la masa de un objeto es una propiedad intrínseca del objeto mismo. Si resultase que la masa también es variable, según el contexto, tendríamos que volver atrás y rever nuestra opinión de que constituye una propiedad intrínseca del objeto. Análogamente, podríamos imaginar que exista otra clase de "rockolas" —de inteligencias— que se comunican entre sí a través de mensajes que nosotros jamás reconoceríamos como tales; ellas, por su parte, tampoco reconocerían jamás *nuestros* mensajes como mensajes. Si así fuese, tendría que ser reconsiderado el criterio de que

la significación es una propiedad intrínseca de un conjunto de símbolos. Por otra parte, ¿cómo podríamos advertir que tales seres existen?

Es interesante comparar este alegato en favor del carácter intrínseco de la significación, con un alegato paralelo en favor del carácter intrínseco del peso. Supongamos que alguien define el peso de un objeto como "la magnitud de la fuerza que ejerce un objeto hacia abajo cuando está sobre la superficie del planeta Tierra". Esta definición hace del peso una propiedad inherente, pero a costa de una actitud geocéntrica, o de "chovinismo terráqueo". Se asemejaría al "chovinismo greenwichiano" de quien rechazase aceptar la hora local de cualquier parte del globo cuyos relojes no coincidan con los de la zona regida por la hora de Greenwich: sería un modo anormal de considerar el horario.

Quizá estemos influidos por un chovinismo similar, sin darnos cuenta, con respecto a la inteligencia, y en consecuencia con respecto a la significación. En nuestro chovinismo, llamaríamos "inteligente" a cualquier ser dotado de un cerebro lo suficientemente similar al nuestro, y no reconoceríamos como inteligentes a otros tipos de objetos. Tomando un ejemplo extremo, imaginemos que un meteorito se topa con el disco andariego de Bach y, en lugar de descifrarlo, lo perfora con la mayor indiferencia y sigue tranquilamente en su órbita. La acción que ha ejercido sobre el disco incurre, a nuestro juicio, en una desconsideración de las significaciones del disco, y podríamos así sentirnos inclinados a llamar "estúpido" al meteorito. Pero quizá fuésemos injustos para con ese objeto; quizá éste cuenta con una "inteligencia más elevada", por completo diferente de la que le atribuimos; quizá su significación depende del *tipo* de inteligencia que lo juzgue. Quizá.

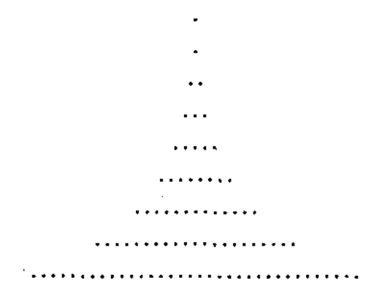
Sería magnífico que pudiéramos definir la inteligencia de un modo distinto a: "es lo que extrae, de una secuencia de símbolos, la misma significación que nosotros". Si sólo podemos definirla de este modo, nuestro aserto de que la significación es una propiedad intrínseca sería entonces circular, y por ende carente de contenido. Tendremos que intentar la formulación de un conjunto sustantivo de características, que merezca ser llamado "inteligencia". Tales características constituirían el núcleo uniforme de la inteligencia, compartido por todos los seres humanos. A esta altura del desarrollo histórico no contamos todavía con un repertorio perfectamente definido de dichas características. Sin embargo, es probable que durante las próximas décadas se produzcan avances importantes en la dilucidación de qué es la inteligencia. En especial, es posible que los psicólogos del conocimiento, los especialistas en Inteligencia Artificial y los neurólogos lleguen a una síntesis entre sus respectivos campos de conocimiento, y logren establecer una definición satisfactoria. Esta quizá siga siendo de corte chovinista humano; no hay medio para evitarlo. Aun así, puede que se consiga un equilibrio mediante el empleo de recursos abstractos —al mismo tiempo precisos y armoniosos, e inclusive simples— para caracterizar la esencia de la inteligencia. Ello mitigaría la pesa-

dumbre de haber formulado un concepto antropocéntrico. Y, por descontado, si llega a hacerse contacto con una civilización correspondiente a otro sistema estelar, nos sentiríamos confirmados en nuestra convicción de que nuestro tipo de inteligencia no es simplemente un hecho azaroso, sino una muestra de una forma básica que reaparece en la naturaleza, en diversos contextos, lo mismo que las estrellas o los núcleos de uranio. A su vez, también se confirmaría así el criterio de que la *significación* es una propiedad intrínseca.

Para terminar con este tema, veremos algunos ejemplos nuevos, y otros ya conocidos, y analizaremos el grado de significación inherente de que están dotados. Lo haremos *colocándonos* nosotros, en la medida en que nos sea posible, en el lugar de los miembros de una civilización remota que intercepta un objeto misterioso . . .

Dos placas en el espacio

Figurémonos una placa rectangular, hecha de una aleación metálica indestructible, en la cual son *grabados* dos puntos, uno inmediatamente arriba del otro: tal como los dos puntos precedentes. Aunque la forma entera del objeto puede sugerir que se trata de un artefacto, y posible depositario, en consecuencia, de un mensaje, dos puntos no son suficientes para *transmitir* nada. (Invito al lector a que, antes de seguir leyendo, elabore conjeturas acerca de la significación que se les podría asignar.) Supongamos, no obstante, que construimos una segunda placa con más puntos, los siguientes:



Una de las cosas más obvias por hacer, frente a este grupo de puntos —al menos desde la perspectiva de una inteligencia *terráquea*—, sería contar los puntos incluidos en cada una de las líneas. La secuencia que se obtiene es:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

Es evidente, aquí, el hecho de que hay una regla gobernando la progresión desde una línea a la siguiente. En realidad, puede inferirse de esta lista, con bastante certeza, la parte recursiva de la definición de los números de Fibonacci. Por vía de suposición, consideremos el par inicial de valores (1,1) como un "genotipo" del cual es extraído el "fenotipo" —toda la secuencia de Fibonacci—, mediante la aplicación de una regla recursiva. Si enviamos solamente el genotipo, o sea la primera versión de la placa, faltaría la información que permite la reconstitución del fenotipo. El genotipo, entonces, no contiene la especificación completa del fenotipo.

Por otro lado, si tomamos como genotipo la segunda versión de la placa, hay muchas más razones para suponer que el fenotipo puede ser correctamente reconstituido. Esta otra versión del genotipo —un "genotipo extenso"— contiene tal grado de información que *el mecanismo a través del cual es extraído el fenotipo del genotipo puede ser inferido por la inteligencia a partir exclusivamente del genotipo*.

Una vez establecido firmemente este mecanismo como vía de extracción del fenotipo desde el genotipo, podemos volver a usar "genotipos breves" como el de la primera placa. Por ejemplo, el "genotipo breve" (1,3) daría lugar al fenotipo:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, . . .

Como vemos, es la secuencia de Lucas. Y para todo conjunto de dos valores iniciales —es decir, para todo genotipo breve— existirá el fenotipo correspondiente. Pero los genotipos breves, a diferencia de los extensos, son nada más que disparadores: botones para oprimir, en las rockolas cuyo interior alberga las reglas recursivas ya construidas. Los genotipos extensos son lo suficientemente informativos como para hacer de disparadores, en un ser inteligente, del reconocimiento de la clase de "rockola" que debe construirse. En este sentido, los genotipos extensos contienen la información del fenotipo: no así los genotipos breves. En otras palabras, el genotipo extenso no sólo transmite un mensaje interior, sino también un mensaje exterior, lo cual permite interpretar al primero. Pareciera que la claridad del mensaje exterior reposa únicamente en la longitud del mensaje. Ello no es sorprendente, pues se trata de algo análogo a lo que ocurre con el desciframiento de textos antiguos. Indiscutiblemente, las probabilidades de obtener resultados exitosos dependen en forma muy directa de la cantidad de texto disponible.

Bach *vs*. Cage, otra vez

Sin embargo, el solo hecho de contar con un texto extenso puede no ser suficiente. Consideremos de nuevo la diferencia existente entre el envío al

espacio de un disco con música de Bach, y el envío de un disco con música de John Cage. Dicho al margen, como este último contiene una Composición Aleatoriamente Generada de Elementos, podría ser llamado, sintéticamente, un "CAGE", mientras que el primero, por tratarse de Bellos y Aperiódicos Cristales de Harmonía* podría ser identificado, abreviadadamente, como "BACH". Pensemos ahora en la significación de una pieza de Cage; para nosotros, dicha significación se desprende de la ubicación de la música de este autor en el interior de un amplio contexto cultural, y entonces la vemos como un alzamiento frente a cierta clase de tradiciones. Luego, si deseamos transmitir esta significación, tenemos que enviar al espacio no solamente las notas de la pieza, sino hacerlas preceder por una detallada historia de la cultura occidental. Es razonable sostener, entonces, que un disco con música de John Cage, por sí solo, *no* tiene significación intrínseca. Aun así, un oyente lo bastante conocedor de las culturas occidental y oriental, y sobre todo de las corrientes producidas durante las últimas décadas dentro de la música occidental, extraería significación de ese disco; pero tal oyente equivale a una rockola, y la pieza grabada a un par de botones: la significación ya está contenida en el interior del oyente, desde el principio; la música es nada más que un disparador de la significación. Y esta "rockola", a diferencia de la inteligencia pura, no es en absoluto universal; está apegada de modo directo a lo terrícola, depende de series peculiares de acontecimientos sucedidos en nuestro planeta a lo largo de prolongados períodos. Esperar que la música de John Cage sea comprendida por otra civilización, es como esperar que nuestra canción preferida esté incluida en una rockola de la luna, y que la podamos escuchar oprimiendo los mismos botones que si estuviéramos en una cafetería de Orizaba.

En cambio, para apreciar Bach se requiere menor documentación cultural. Esto puede sonar muy paradójico, habiendo en Bach tanta complejidad y sistematización, y tan poca intelectualidad en Cage. Pero se registra aquí una curiosa inversión. La inteligencia ama los modelos, y se rebela ante lo azaroso. Para la mayoría de las personas, lo azaroso de la música de Cage obliga a demasiadas explicaciones; e inclusive, luego de haberlas recibido, sospechan que no han captado el mensaje. En tanto, respecto a casi todo Bach las palabras son superfluas. Desde este punto de vista, la música de Bach es más autocontenida que la de Cage. Así y todo, no sabemos en qué medida la condición humana es manifestada por Bach.

Para ilustrar lo anterior, recordemos que la música tiene tres principales dimensiones estructurales (melodía, armonía, ritmo), cada una de las cuales, a su vez, puede volver a subdividirse en distintas escalas y cubriendo todos los aspectos. En cada una de estas dimensiones existe cierto gra-

* Si restauramos por un momento la "h" que "armonía" perdió hace muy poco, en la historia de la lengua, luego de siglos de uso. Por otra parte, aunque inusual, "harmonía" no es preceptivamente incorrecta. [T.]

do de complejidad que nuestro entendimiento es capaz de manipular sin vacilaciones; por supuesto, un compositor los toma en consideración, más bien inconscientemente, cuando elabora una pieza. Estos "niveles de mediana complejidad" que atraviesan las diferentes dimensiones dependen mucho, es lo más probable, de las condiciones propias de nuestra evolución como especie: otras especies inteligentes pueden haber desarrollado su música dotándola de niveles totalmente diferentes de complejidad manipulable, presentes a lo largo de estas numerosas dimensiones. Así, es concebible que una obra de Bach tenga que ser acompañada por un cúmulo de información acerca de la especie humana, información que, lisa y llanamente, no podría ser inferida a partir de la sola estructura musical. Si asimilamos la música de Bach a un genotipo, y la emotividad que sugiere a un fenotipo, lo que nos interesará es saber si el genotipo contiene toda la información necesaria para revelar el fenotipo.

¿Hasta qué punto es universal el mensaje del ADN?

La pregunta de fondo que vamos a afrontar, muy similar por lo demás a las preguntas que nos sugerían las dos placas, es la siguiente: "¿Qué extensión del contexto necesario para su propia comprensión es capaz de restaurar un mensaje?" Podemos ahora remitirnos a las significaciones *biológicas originales* de "genotipo" y "fenotipo" —el ADN, y el organismo vivo— y plantear preguntas similares. ¿El ADN tiene poder disparador universal? ¿O necesita una "biorrockola" que revele su significación? ¿El ADN puede hacer prever un fenotipo sin tomar en consideración el contexto químico pertinente? La respuesta a esta última pregunta es no, pero un "no" relativizado. Naturalmente, una molécula de ADN no creará nada en absoluto si la rodea el vacío. No obstante, si enviáramos una molécula a probar fortuna por el universo, como en los casos de BACH y CAGE que imaginamos, puede que sea interceptada por una civilización inteligente. Es posible que ésta reconozca, primero, el mensaje marco de la molécula; a continuación, trataría de deducir, a partir de su estructura química, *qué clase de medio químico requiere*; luego, intentaría producir tal medio. Si se efectúan ensayos sucesivos, siguiendo este esquema, finalmente se obtendría una restauración completa del contexto químico necesario para que la significación fenotípica del ADN sea revelada. Esta afirmación quizá no parezca muy convincente, pero si los ensayos se extienden durante muchos millones de años, probablemente la significación del ADN termine por surgir.

En cambio, si la secuencia de bases que componen una cadena de ADN fuese enviada bajo la forma de símbolos abstractos (como los que muestra la figura 41), y no de extensa molécula helicoidal, virtualmente no hay probabilidad alguna de que, en función de mensaje exterior, actúen co-

mo disparador del mecanismo decodificador adecuado, gracias al cual pudiera extraerse el fenotipo desde el genotipo. Esto sería un caso de mensaje interior cuya envoltura es un mensaje exterior tan abstracto que el poder restaurador de este último se disiparía, y así, en un sentido muy pragmático, el conjunto de símbolos carecería de significación intrínseca. Para que el lector no juzgue que todo esto suena irremediablemente abstracto y filosófico: el tema relativo a cuál es el momento exacto en que puede sostenerse que el fenotipo ya es "accesible" en el genotipo, o "sobrentendido" a partir de este último, es un tema por demás actual, y de alto interés público. Es el tema del aborto.

Figura 41. Este Cristal Aperiódico Gigante es la secuencia básica del cromosoma del bacteriófago oX174. Es el primer genomio completo, considerando toda clase de organismos, que es representado gráficamente. Cerca de 2000 de estas bustrofedónicas páginas serían necesarias para mostrar la secuencia básica de una sola célula E. Coli, y casi un millón para mostrar la secuencia básica del ADN de una sola célula humana. Este libro contiene, más o menos, la misma cantidad de información que la representación correspondiente a una sencilla célula E. Coli.

CCGTCAGGATTGACACCCTCCCAATTGTATGTTTTCATGCCTCCAAATCTTGGAGGCTTTTTTATGGTTCGTTCTTATTACCCTTCTGAATGTCACGCTG
ACCAATACCTTCGGTTCGTAACCCCTAACTCTTTCTCATCTTTACGGTGTTCGGAGTTATCGTCCAAATTCTCGGAGCTATGCGAGTTTCAGTTTTATTA
GATGGATAACCGCATCAAGCTCTTGGAAGAGATTCTGTCTTTTCGTATGCAGGGCGTTGAGTTCGATAATGGTGATATGTATGTTGACGGCCATAAGGCT
ACAATAATTATAGTTCAACCCCCTCGTGTAACATCGTAACACGGTTAACTAGGTAATTGAAGAGTCATTGTCTATGTTTGAGTAGTGCTTGCAGTCTTCG
CTATAGACCACCGCCCCGAAGGGGACGAAAAATGGTTTTTAGAGAACGAGAAGACGGTTACGCAGTTTTGCCGCAAGCTGGCTGCTGAACGCCCTCTTAA
TTTCGGAGATGCGCTATAGAATCACCTCCGGAGGTCGTTAGAACTTGTGAGTAGGAATTATGGAAAGAAAAACCCCATTAATATGAGTAGCGCTTATAGC
CCTATTCAGCGTTTGATGAATGCAATGCGACAGGCTCATGCTGATGGTTGGTTTATCGTTTTTGACACTCTCACGTTGGCTGACGACCGATTAGAGGCGT
GTCAGCCGCACACTTAGTAATCGGAACGCTGGAGCCGTCGTTCTTGGTATGCTGGTTATAGTGCTTTTATCAGTGCGTTTCGTAACCCTAATAGTATTT
CTATCAGTATTTTTGTGTGCCTGAGTATGGTACAGCTAATGGCCGTCTTCATTTCCATGCGGTGCACTTTATGCGGACACTTCCTACAGGTAGCGTTGAC
CGCACATCGCTTGACGCTACCCGTATGACATTGGTATTCCGGTGCATAAAACGTTCGATAAATTGACCGCCGCTAACGCATAGGCTGCTGGTTTTAATCC
AGGACGCTTTTTCACGTTCTGGTTGGTTGTGGCCTGTTGATGCTAAAGGTGAGCCGCTTAAAGCTACCAGTTATATGGCTGTTGGTTTCTATGTGGCTAA
GAACCCTTCATCGCTGTCGAACCAAAAATCACTCAACAAGGTAAGAAATCGAGGATCTGGAAATCGTCGTTCCAGGTATAGACTGAAAAACAATTGCATA
AAGCTGTTCAGAATCAGAATGAGCCGCAACTTCGGGATGAAAATGCTCACAATGACAAATCTGTCCACGGAGTGCTTAATCCAACTTACCAAGCTGGGTT
ACGCGGCGGTTTTGCAGCCGATGTCATTGAAAAGGGTCGGAGTTAGAGTAGAGAGAAAAACGCAAGACGAAGTTATAGACCAACTTGCCGCAGCGCAGCA
ACCTGTGACGACAAATCTGCTCAAATTTATGCGCGCTTCGATAAAAATGATTGGCGTATCCAACCTGCAGAGTTTTATCGCTTCCATGACGCAGAAGTTA
AAGGCGGTCGTCAGGTGAAGCTAAATTAAGCATTTGTTCGTCATCATTAAGGACGAAATAGTTCTATTAAAAAGCTGAGTAGTCTTTATAGGCTTTCACA
AATGAGAAAATTCGACCTATCCTTGCGCAGCTCGAGAAGCTCTTACTTTGCGACCTTTCGCCATCAACTAACGATTCTGTCAAAAACTGACGCGTTGGAT
AATTTTACAGTTGTTCTCTTAGAGATGGTACTTGTTTTACACTGAGTATAGATTTGGTCAGGAACTGCTTGCACGGTTCGTATAATTCGGTGAAGAGGAG
AAGAGCGTGGATTACTATCTGAGTCCGATGCTGTTCAACCACTAATAGGTAAGAAATCATGAGTCAAGTTACTGAACAATCCGTACGTTTCCAGACCGCT
CCAGTCATCGTTAGGTTTGAAACAATGAGCAGTCTTTTAGCTTTAGTAGAAGCCAATTTAGGTTTTGCCGTCTTCGGACTTACTCGAATTATCTCCGGTT
GCTCTCGTGCTCGTCGCTGCGTTGAGGCTTGCGTTTATGGTACGCTGGACTTTGTAGGATACCCTCGCTTTCCTGCTCCTGTTGAGTTTATTGCTGCCGT
GCCTGCGAGCTGCGGTAATTATTACAAAAGGCATTTAAGTCGCGGAAGGTACTACTCTGTCCGGCAAACTTACAACTGCCCTACTTGTATTATTCGTTAC
GTTAAAGCCGCTGAATTGTTCGCGTTTACCTTGCGTGTACGCGCAGGAAACACTGACGTTCTTACTGACGCAGAAGAAAACGTGCGTCAAAAATTACGTG
TCGCGGAAATGCGAACGGAAATCATGGAGCGTTGCCGACGCCTGCTGGTCCCGCTCGCGGTCTTGCAAAAAATGGAAATCTGTAATGTAGTGAGGAAGGC
CGTCTTTGGTATGTAGGTGGTCAACAATTTTAATTGCAGGGGCTTCGGCCCCTTACTTGAGGATAAATTATGTCTAATATTCAAACTGGCGCCGAGCGTA
TAGAGCTTCCTCAGCGGTCGGTATTGGCCTCATCAACTTTACCATTATTCTGCTGGTTAGACTGGTCGTTCCTTCGGTTCTACCCTTTCCAGTACGCCGT
GGACGCCGTTGGCGCTCTCCGTCTTTCTCCATTGCGTCGTGGCCTTGCTATTGACTCTACTGTAGACATTTTTACTTTTTATGTCCCTCATCGTCACGTT
GTTCTTTTCGCCGTACCAGTTATATTGGTCATCACAATTGTCAGCCCTCTCCTCACCGTAATTGTGGTAGGAAGTACTTGAATTAGGTGACAAGTGGTAT
GCACGATTAACCCTGATACCAATAAAATCCCTAAGCATTTGTTTCAGGGTTATTTCAATATCTATAACAACTATTTTAAAGCGCCGTGGATGCCTGACCG
GAGTCCTCCTTCGCCTCGTCAGGTTTACAAAAACTCTACCGTCGTTGCCTTTGGTATTGCTCGTAGTAGAACTAATTCGAGTAATCCCAATCGGAGCCAT
ACTGAGCTTTCTCGCCAAATGACGACTTCTACCACATCTATTGACATTATGGGTCTGCAAGCTGCTTATGCTAATTTGCATACTGACCAAGAACGTGATT
GTCTCTAATCTCGCGTACTGTTCATTTCCTGCCAACAGTCGCAGTATACTCCAAAATGGAGGTTTACTTCTTTATTGTAGTACCATTGCGACGTACTTCA
GGCATCTGGCTATGATGTTGATGGAACTGACCAAACGTCGTTAGGCCAGTTTTCTGGTCGTGTTCAACAGACCTATAAACATTCTGTGCCGCGTTTCTTT
TTCAGTTTCGTGGAAATCGCAATTCCATGACTTAGAGAAATCAGCGTCATCCGCCTTTTGCTTGTTCGGTTCTCATTTGTATCACGGTACGAGTCCTTG
ATACCGATATTGCTGGCGACCCTGTTTTGTATGGCAACTTGCCGCCGCGTGAAATTTCTATGAAGGATGTTTTCCGTTCTGGTGATTCGTCTAAGAAGTT
TCTTCCGCCCAAGGACTTACTTACCCTTCGGAAGTTCTTCCACTATTCGTCCTCTTTGTATGCTTCCGCGTATTGCTATGGTGACTGGAGTCGTTAGAAT
GGTGATTTGCAAGAACGCGTACTTATTCGCAACCATGATTATGACCAGTGTTTCAGTCGTTCAGTTGTTGCAGTGGATAGTCTTACCTCATGTGACGTTT
CGCCGTTTTTAATTTTAAAAATGGCGAAGCCAATATTGGAGTGTGAGTTAGAAAATAGTGCTTCAGTACTAACTTAGCGCTCACCAGCCGTCTAACGCTA
TCAGGGGTTCACCAAGCGAAGCGCGGTAGGTTTTCTGCTTAGGAGTTTAATCATGTTTCAGACTTTTATTTCTCGCCACAATTCAAACTTTTTTTCTGAT
ATTGGCAGTTTGATAGTTTTATATTGCAACTGCTACATCGAAATCCACAGACATTTTGTCCACGGCTTCTTCGACCTCATTGTCTTCACTCTTGGTCGAA
ATGCTGGTAATGGTGGTTTTCTTCATTGCATTCAGATGGATACATCTGTCAACGCCGCTAATCAGGTTGTTTCAGTTGGTGCTGATATTGCTTTTGATGC
TACCGCTGGTAGGTTTCCTATTTGTAGTATCCGTCAGCCCTCCCATCAGCCTTGGCTTCTTCTGAGTTTCGCTTCGTTTGTCCGTTTTTTAAATCCCAGC
GATGGTGCTTATTATACCGTCAAGGACTGTGTGACTATTGACGTCCTTCCCCGTACGCCCGGCAATAACGTCTACGTTGGTTTCATGGTTTGGTCTAACT
TCGTGCTTTGTATTTAGTGGAGTGAATTCACCGACCTCTGTTTATTAGAGAAATTATTGGACTAAGTCGCTTTGGTTAGGCGCCGTAAATCATCGCCATT
ATTGCTGGCGGTATTGCTTCTGCTCTTGCTGGTGGCGCCATGTCTAAATTGTTTGGAGGCGGTCAAAAAGCCGCCTCCGGTGGCATTCAAGGTGATGTGC
TTTGATCCCCGCCGGAGTAGTCCCAATCCTTGTAATCTCGGAACTTACCGTCTAAATTATGGTCGTAGTGGGTACGGATGTCATAACAATAGCCATCGTT
TGTTTCTGGTGCTATGGCTAAAGCTGGTAAAGGACTTCTTGAAGGTACGTTGCAGGCTGGCACTTCTGCCGTTTCTGATAAGTTGCTTGATTTGGTTGGA
GTAGTCGTCGTCGTGCCAGCGTTCCTAATTCGAGTCCTTTACGTCGTCGTTCTATTAGTGCTCATAGGAAAGGAAATAGTCGCCGTCTGAACGGTGGTTC
CTTCCTCTCCTGGTATGGTTGACGCCGGATTTGAGAATCAAAAAGAGCTTACTAAAATGCAACTGGACAATCAGAAAGAGATTGCCGAGATGCAAAATGA
GAAGACAACTATTCGTTCGTAGAGTAAAACACGTATATGGACCAGAAAGCATAAGACCGCACTTCAGCGGCTGACTTACGGTCGTTAGAGAAAAACTCAG
GAGTCTACTGCTCGCGTTGCGTCTATTATGGAAAACACCAATCTTTCCAAGCAACAGCAGGTTTCCGAGATTATGCGCCAAATGCTTACTCAAGCTCAA
ATGGCGACTAAGACGCAAACGACTACTTGATTCAGTTGGACTCGTGATTGGAACGCTCAGTAAAGAAACTAAACCAGTAACCATTTTATGACTGGTCGGC
TGCCTCTTCTCATATTGGCGCTACTGCAAAGGATATTTCTAATCTCGTCACTGATGCTGCTTCTGGTGTGGTTGATATTTTTCATGGTATTGATAAAGCT
AATAAAGGATCTGTTTAATCTCGGTTATGGTAGTCGAAATGGCAGAAAGGTCTTTAACAAGCTTCATAGCCGTTG

Fantasía cromática, y altercado

Luego de darse un magnífico baño en el estanque, la Tortuga acaba de salir del agua y se está sacudiendo para secarse, cuando aparece, quién si no, Aquiles.

Tortuga: Salud, Aquiles. Precisamente pensaba en usted mientras chapoteaba.

Aquiles: ¿No es curioso? También yo pensaba en usted, mientras paseaba por el parque. Está todo tan verde en esta época del año . . .

Tortuga: ¿Le parece? Eso me recuerda una reflexión que quería consultar con usted. ¿Quiere conocerla?

Aquiles: Oh, me encantaría. Es decir, me encantaría siempre y cuando no vaya usted a enredarme en una de sus pérfidas artimañas lógicas, señora T.

Tortuga: ¿Pérfidas artimañas? Me juzga equivocadamente, Aquiles. ¿Cómo podría yo hacer algo pérfido? Soy un alma mansa, a nadie incomodo, y llevo una apacible y herbívora existencia. Y mi pensamiento se limita a explorar las curiosidades y recodos del modo de ser de las cosas (como las veo yo). Soy un humilde observador de fenómenos, que farfulla trabajosamente sus palabras, de un modo poco espectacular, creo. Y, para tranquilizarlo aun más acerca de mis intenciones, le diré que hoy no pensaba hablarle sino de mi propio caparazón: como usted comprenderá, ello no tiene nada que ver —por donde se lo mire— con la lógica.

Aquiles: Sus palabras me tranquilizan, señora T. Y, francamente, me siento lleno de curiosidad. Así que me gustaría saber qué planeaba decirme, aun cuando no se trate de algo espectacular.

Tortuga: Veamos . . . ¿Cómo empezar? Mmmm . . . ¿Qué le llama más la atención en mi caparazón, Aquiles?

Aquiles: ¡Se lo ve maravillosamente limpio!

Tortuga: Gracias. Justamente acabo de bañarme, y de quitarle algunas capas de polvo que se le habían acumulado durante el último siglo. Ahora puede usted apreciar cuán verde es.

Aquiles: Un excelente caparazón, saludablemente verde; es hermoso ver cómo resplandece bajo el sol.

Tortuga: ¿Verde? No es verde.

Aquiles: Bueno, ¿no termina usted de decirme que su caparazón es verde?

Tortuga: Así es.

Aquiles: Entonces, estamos de acuerdo: es verde.

Tortuga: No, no es verde.

Aquiles: Ah, ya entiendo su intención. Usted está insinuándome que sus palabras no son necesariamente veraces; que las Tortugas juegan con el

lenguaje; que sus afirmaciones y la realidad no son necesariamente coincidentes; que . . .

Tortuga: Nada de eso. Las Tortugas manejan las palabras como si fuesen sagradas. Las Tortugas reverencian la exactitud.

Aquiles: ¿Y por qué, entonces, dice usted que su caparazón es verde, y que no es verde?

Tortuga: Nunca dije tal cosa, pero desearía haberlo hecho.

Aquiles: ¿Querría haber dicho eso?

Tortuga: En absoluto. Lamento decirle que estoy en profundo desacuerdo con usted.

Aquiles: ¡Pero eso contradice lo que dijo antes!

Tortuga: ¿Contradecir? ¿Contradecir? Jamás me contradigo. Eso no forma parte de la naturaleza de las Tortugas.

Aquiles: Bueno, esta vez la he pescado, evasiva señora mía. La he pescado en una flagrante contradicción.

Tortuga: Sí, presumo que tiene usted razón.

Aquiles: ¡Otra vez! ¡Ahora está volviendo a contradecirse! ¡Se ha sumergido tanto en la contradicción que es imposible discutir con usted!

Tortuga: Realmente, no lo veo así. Yo discuto conmigo misma sin ninguna dificultad. Quizá el problema sea suyo. Aventuraría la conjetura de que a lo mejor es usted el contradictorio, y como está tan atrapado en su propia maraña, no alcanza a percibir hasta qué punto se muestra incoherente.

Aquiles: ¡Qué sugerencia tan insultante! Voy a demostrarle que es usted la contradictoria, y entonces quedará en evidencia que yo no puedo serlo.

Tortuga: Bueno, si es así, su tarea deberá consistir en excluirse de la contradicción. ¿Qué puede ser más fácil que puntualizar una contradicción? Adelante . . . haga la prueba.

Aquiles: Mmmm . . . Ahora soy yo el que no sabe bien por dónde comenzar. Ah . . . ya sé. Usted dijo primero que, (1) su caparazón es verde, y luego dijo que, (2) su caparazón no es verde. ¿Qué más hace falta agregar?

Tortuga: Ahora hágame el favor de puntualizar la contradicción. Deje de andarse por las ramas.

Aquiles: Pero, . . . pero, . . . pero . . . Oh, estoy empezando a darme cuenta. (A veces no soy muy rápido de ingenio.) Debe ser que usted y yo tenemos una idea diferente acerca de qué constituye una contradicción. Ese es el problema. Bien, permítame formular esto muy claramente: hay contradicción cuando alguien dice una cosa y al mismo tiempo la niega.

Tortuga: Una triquiñuela evidente. Me gustaría ver eso. Los ventrílocuos, probablemente, sobresalgan en materia de contradicciones, cuando hablan por ambos lados de la boca, digamos. Pero yo no soy ventrílocua.

Aquiles: Bueno, ¡lo que en realidad quiero decir es sólo que alguien pue-

de decir una cosa, y negarla, dentro de la misma oración! Esto no tiene por qué ocurrir literalmente en el mismo instante.

Tortuga: Bien, pero usted no citó UNA oración, sino DOS.

Aquiles: Sí: dos oraciones, cada una de las cuales contradice a la otra.

Tortuga: Me entristece ver tan al desnudo la confusa estructura de sus pensamientos, Aquiles. Primero me dice usted que una contradicción es algo que sucede en una sola oración. Luego me dice que encontró una contradicción en una pareja de oraciones que yo formulé. Francamente, las cosas han sido así, como se lo estoy diciendo. Su sistema de pensamiento es tan erróneo, que se las arregla usted para no tener que reconocer su incoherencia. Pero visto desde fuera se lo reconoce con la claridad del día.

Aquiles: ¡A veces llegan a confundirme tanto sus tácticas diversionistas, que ignoro por completo si está usted discurriendo sobre algo totalmente trivial, o sobre algo significativo y profundo!

Tortuga: Le aseguro que las Tortugas no emplean su tiempo en trivialidades. En consecuencia, se trata de lo otro.

Aquiles: Estoy muy seguro de ello. Gracias. Ahora que he tenido un momento para reflexionar, sé cuál es el procedimiento lógicamente necesario para convencerla de que se ha contradicho.

Tortuga: Excelente, excelente. Espero que sea un procedimiento sencillo e irrefutable.

Aquiles: Sí que lo es. Inclusive usted estará de acuerdo conmigo. Fíjese: usted enunció como válida la oración 1 ("Mi caparazón es verde"), y enunció como válida la oración 2 ("Mi caparazón no es verde"); luego, usted enunciaría una oración compuesta que reúna las oraciones simples mencionadas, ¿verdad?

Tortuga: Por supuesto. Es razonable . . . siempre que la forma de reunión sea universalmente aceptable. Estoy seguro de que coincidirá conmigo en cuanto a esto.

Aquiles: ¡Sí, y así la pescaré de una vez por todas! La forma que propongo es . . .

Tortuga: Momentito; debemos ser cautos al reunir oraciones. Por ejemplo, ¿usted acepta que "Algunos políticos duermen" es válida, verdad?

Aquiles: ¿Quién podría negar eso?

Tortuga: Perfecto. Del mismo modo, "los ciudadanos se inquietan" también es una expresión válida, ¿no?

Aquiles: Indudablemente.

Tortuga: Entonces, reuniéndolas tendremos: "Algunos políticos duermen o los ciudadanos se inquietan"

Aquiles: Espere un momento . . . "¿Algunos políticos duermen o los ciudadanos se inquietan?" Bueno, no . . ., no me convence mucho.

Tortuga: Como puede comprobar, reunir dos oraciones verdaderas en una sola no siempre es una política adecuada.

Aquiles: Pero es que usted las ha combinado de un modo . . .

Tortuga: ¿Qué tiene que objetar a mi combinación? ¿De qué otro modo debería haberlo hecho?

Aquiles: Tendría que haber usado otra conjunción: "y", en lugar de "o".

Tortuga: ¿Yo "tendría"? Querrá decir que si USTED tiene SU combinación, YO tendría la mía . . .

Aquiles: No: es la combinación LOGICA. No tiene nada que ver conmigo personalmente.

Tortuga: Usted siempre consigue desorientarme, cuando recurre a su Lógica y a los altisonantes Principios de ésta. Pero hoy no tengo ganas de nada de eso, por favor.

Aquiles: Oh, señora Tortuga, *no* me haga vivir esta agonía. ¡Usted sabe perfectamente bien qué es lo que significa "y"! ¡Reunir dos oraciones mediante una "y" es una cosa de lo más inocente!

Tortuga: ¡Inocente! ¡Caramba, pero qué desfachatez! Ya no me cabe duda de que todo responde al malvado designio de enredar a una pobre, inofensiva, mortificada Tortuga en una contradicción fatal. Si eso fuera tan inocente, ¿por qué estaría usted tan sospechosamente encarnizado en convencerme? ¿Eh?

Aquiles: Me deja usted sin habla. Me hace sentir un canalla, cuando en realidad no me ha animado sino la mejor de las intenciones.

Tortuga: Eso es lo que todo el mundo piensa de sí mismo . . .

Aquiles: Me avergüenzo . . . de tratar de engañarla . . ., de usar palabras tramposas para inducirla a contradecirse . . . Me siento una porquería.

Tortuga: Me parece muy bien. Sé lo que se proponía usted. Su plan era hacerme aceptar la oración 3, a saber: "Mi caparazón es verde y mi caparazón no es verde". Y una falsedad tan obvia es algo que repugna a la Lengua de una Tortuga.

Aquiles: Oh, lamento enormemente haber provocado todo esto.

Tortuga: No necesita disculparse. No estoy ofendida. Después de todo, estoy acostumbrada a soportar en torno mío los métodos irracionales de todo el mundo. Su compañía me es grata, Aquiles, pese a la falta de claridad de su pensamiento.

Aquiles: Sí . . . Bien, temo estar aprisionado por mis métodos, y no poder evitar el seguir equivocándome una y otra vez, en mi búsqueda de la Verdad.

Tortuga: Este intercambio de ideas puede serle útil para corregir un poco esos métodos. Buenos días, Aquiles.

Aquiles: Buenos días, señora T.

CAPITULO VII

El cálculo proposicional

Palabras y símbolos

EL DIALOGO PRECEDENTE recuerda la *Invención a dos voces,* de Lewis Carroll. En ambos, la Tortuga se niega a usar las palabras normales y corrientes en la forma normal y corriente; al menos, se niega a hacerlo cuando no le resulta conveniente. El capítulo anterior nos proporciona una perspectiva para analizar la paradoja de Carroll. En este capítulo vamos a representar, mediante símbolos, lo que Aquiles, mediante palabras, no podía hacerle aceptar a la Tortuga.

Es decir, vamos a elaborar un sistema formal, uno de cuyos símbolos cumplirá la función que Aquiles reclamaba para la palabra '*y*' en su discusión con la Tortuga, y otros de cuyos símbolos se comportarán como deberían hacerlo las palabras '*si* . . . *entonces* . . .' Sólo dos palabras más agregaremos a este ensayo: '*o*' y '*no*'. El razonamiento que se hace depender exclusivamente del uso correcto de estos cuatro elementos es denominado *razonamiento proposicional.*

Alfabeto y primera regla del cálculo proposicional

Presentaremos otro sistema formal, llamado *cálculo proposicional,* un poco a la manera de un acertijo y sin desarrollarlo íntegramente de inmediato, sino permitiendo que el lector, en cierta medida, vaya descubriendo por sí las distintas etapas. Comenzamos con la lista de símbolos:

$$\begin{array}{cccc} & \langle & \rangle & \\ P & Q & R & \\ \wedge & \vee & \supset & \sim \\ & [&] & \end{array}$$

La primera regla que enunciaremos de este sistema es la siguiente:

REGLA DE AGRUPAMIENTO: Si x e y son teorema del sistema, también lo es la cadena $\langle x \wedge y \rangle$.

Esta regla hace que dos teoremas sean reunidos en uno, lo cual suena parecido a lo que sucedía en el Diálogo.

Cadenas bien formadas

Hay otras reglas de inferencia, que serán enunciadas poco más adelante, pero ahora es importante definir un subconjunto de todas las cadenas, a saber, las cadenas *bien formadas*. Las definiremos de una manera recursiva. Comenzamos con los

ATOMOS: P, Q y R son llamados átomos. Se forman nuevos átomos agregando apóstrofos a la derecha de los ya existentes; por ejemplo, R', Q'', P''', etc. Esto proporciona una provisión interminable de átomos, todos ellos bien formados.

Luego, tenemos cuatro recursivas

REGLAS DE FORMACION: Si x e y están bien formados, entonces las cuatro cadenas que siguen también lo estarán:

(1) $\sim x$
(2) $<x \wedge y>$
(3) $<x \vee y>$
(4) $<x \supset y>$

Por ejemplo, todas las expresiones siguientes están bien formadas:

P	átomo
$\sim P$	aplicando (1)
$\sim\sim P$	aplicando (1)
Q'	átomo
$\sim Q'$	aplicando (1)
$< P \wedge \sim Q'>$	aplicando (2)
$\sim<P \wedge \sim Q'>$	aplicando (1)
$<\sim\sim P \supset Q'$	aplicando (4)
$<\sim<P \wedge \sim Q'> \vee <\sim\sim P \supset Q'>>$	aplicando (3)

La última puede parecer espectacular, pero está construida a partir tan sólo de dos componentes: las dos expresiones que la preceden. Cada una de éstas, a su vez, está construida a partir de las expresiones anteriores, y así siguiendo . . . De este modo, en toda cadena bien formada pueden rastrearse sus constituyentes elementales, es decir, los átomos. Basta con seguir hacia atrás las reglas de formación, hasta que no sea posible continuar. Es seguro que este proceso llega a un final, pues cada regla de formación (si se marcha hacia adelante) es una regla de *ampliación*, por lo que el marchar hacia atrás conduce siempre hacia los átomos.

Este método de descomposición de cadena sirve así para verificar si cualquier cadena está bien formada. Se trata de un *procedimiento de de-*

cisión descendente para la comprobación citada. Uno puede comprobar si entendió dicho procedimiento viendo si puede determinar cuáles de las cadenas siguientes están bien formadas:

(1) <P>
(2) <~P>
(3) <P∧Q∧R>
(4) <P∧Q>
(5) <<P∧Q>∧<Q~∧P>>
(6) <P∧~P>
(7) <<P∨<Q⊃R>>∧<~P∨~R″>>
(8) <P∧Q>∧<Q∧P>

(Respuesta: Las líneas a las que corresponden números de Fibonacci no están bien formadas. Las restantes sí.)

Otras reglas de inferencia

Arribamos ahora a las reglas gracias a las cuales son construidos los *teoremas* de este sistema. En las pocas reglas de inferencia expuestas a continuación, los símbolos '*x*' e '*y*' deben entenderse siempre como indicativos únicamente de cadenas *bien formadas*.

REGLA DE DISOCIACION: Si <*x*∧*y*> es un teorema, entonces tanto *x* como *y* son teoremas.

El lector ha de estar interrogándose acerca de cuál es el concepto representado por el símbolo '∧'. (Insinuación: es la palabra debatida en el Diálogo anterior.) A partir de la siguiente regla, el lector estará en condiciones de advertir cuál es el concepto representado por el *tilde* ('~'):

REGLA DEL DOBLE TILDE: La cadena '~~' puede ser suprimida en cualquier teorema. También puede ser incluida en cualquier teorema, siempre que la cadena resultante esté bien formada.

La regla fantasiosa

Un rasgo particular de este sistema es que *carece de axiomas*: sólo tiene reglas. Si pensamos en los sistemas ya vistos, las preguntas que surgen son, ¿cómo puede, entonces, haber teoremas?, ¿cómo es posible, así, cualquier clase de comienzo? Pero hay una regla que produce teoremas desde la nada: no requiere de un "teorema anterior" como alimentación. (El resto de las reglas sí lo requieren.) Esta regla especial, cuya existencia responde a

aquellas preguntas, se denomina *regla fantasiosa*. La razón para llamarla así es sumamente sencilla.

Para usar la regla fantasiosa, lo primero que se debe hacer es enunciar la cadena bien formada *x* que se desee, y luego entregarse a la "fantasía" de plantear: "¿Qué pasaría si esta cadena *x* fuese un axioma o un teorema?" Luego, se deja que el sistema mismo proporcione una respuesta; es decir, se avanza efectuando una derivación que tenga a *x* como enunciado de apertura, y donde *y* sea la última línea derivada (por supuesto, la derivación debe ajustarse estrictamente a las reglas del sistema): todo el desarrollo, desde *x* hasta *y*, inclusive, constituye la fantasía; *x* es la premisa de la fantasía e *y* su *resultado*. El paso que sigue es *brincar fuera de la fantasía,* luego de aprender gracias a ella que:

Si *x* fuera un teorema, *y* también lo sería.

Así y todo, aún podemos preguntarnos, ¿dónde está el teorema *legítimo*? El teorema legítimo es la cadena

$$<x \supset y>$$

Adviértase la semejanza entre esta cadena y la oración destacada más arriba.

Para señalar el ingreso y la salida de una fantasía se usan los corchetes o paréntesis cuadrados, '[' y ']', respectivamente. Por consiguiente, donde uno vea un corchete izquierdo, sabe que está siendo "desplazado" hacia el interior de una fantasía y que la línea *siguiente* enuncia la premisa de la misma. Cuando aparece un corchete derecho, uno sabe que está "recuperando" su ubicación fuera de la fantasía, y que la línea *anterior* enuncia el *resultado* de la misma. Es útil, aunque no imprescindible, rodear con sangrías tipográficas las líneas que incluyan una derivación fantasiosa.

A continuación, ilustraremos la regla fantasiosa tomando la cadena P como premisa (aun cuando P no sea un teorema; esto no cuenta, pues lo que planteamos es, "¿qué pasaría si lo fuera?"). Tenemos así:

[	desplazamiento hacia el interior de la fantasía
P	premisa
∼∼P	resultado (por aplicación de la regla del doble tilde)
]	recuperación

La fantasía muestra que:

Si P fuera un teorema, ∼∼P también lo sería.

Si ahora "comprimimos" esta oración española (metalenguaje) en el interior de la notación formal (lenguaje objeto), tendremos: <P⊃~~P>. Este, nuestro primer teorema del cálculo proposicional, revelará al lector la interpretación correspondiente al símbolo '⊃'.

La que sigue es otra derivación surgida del empleo de la regla fantasiosa:

[	desplazamiento
<P∧Q>	premisa
P	disociación
Q	disociación
<Q∧P>	agrupamiento
]	recuperación
<<P∧Q>⊃<Q∧P>>	regla fantasiosa

Es importante darse cuenta de que únicamente la última línea presenta un teorema auténtico, en este desarrollo: todas las demás son fantasía.

Recursividad y regla fantasiosa

Tal como lo hace suponer la presencia de la terminología recursiva "desplazamiento" y "recuperación",* la regla fantasiosa puede ser utilizada recursivamente; es decir, puede haber fantasías incluidas en fantasías, fantasías insertadas en otras, en tres instancias autoincluidas, y así siguiendo. Esto significa que hay toda clase de "niveles de realidad", exactamente como en los relatos o en las películas que anidan en su interior otros relatos y películas. Cuando uno emerge de un relato-contenido-en-otro-relato, y recupera el nivel narrativo inicial, se siente por un momento como si hubiese ingresado al mundo real, a pesar de que todavía permanece alejado del superior por un nivel.

Ahora bien, una indicación de "Prohibido fumar", instalada en el interior de una sala cinematográfica, no está dirigida a los personajes de las películas: no hay traslados desde el mundo real al mundo de la fantasía en las películas. Pero en el cálculo proposicional hay esa clase de traslados, e inclusive los hay desde una fantasía a otras fantasías contenidas dentro de la primera. Ello es formalizado por la siguiente regla:

REGLA DE TRASLADO: Dada una fantasía, puede ser llevado a su interior cualquier teorema correspondiente a la "realidad" situada un nivel más arriba.

* "Push" y "pop", respectivamente. N. del T.

Es como si la señal "Prohibido fumar" se aplicara no sólo a los espectadores, sino también a los actores de la película y, por reiteración de la misma idea, a quienquiera aparezca en las múltiples películas insertadas una dentro de otra que pueda haber. (Atención: no hay traslado en la dirección opuesta; los teoremas incluidos en las fantasías no pueden ser llevados al exterior de éstas. Si no fuera por ello, podríamos formular lo que se nos ocurra para ocupar la primera línea de una fantasía y luego mandarlo al mundo real para que actúe como teorema.)

La derivación de más abajo muestra cómo opera el traslado y también cómo puede ser aplicada recursivamente la regla fantasiosa:

[	desplazamiento
P	premisa de la fantasía exterior
[	nuevo desplazamiento
Q	premisa de la fantasía interior
P	traslado de P dentro de la fantasía interior
$\langle P \land Q \rangle$	agrupamiento
]	abandono de la fantasía interior y recuperación del nivel exterior de fantasía
$\langle Q \supset \langle P \land Q \rangle \rangle$	regla fantasiosa
]	abandono de la fantasía exterior y recuperación del mundo real
$\langle P \supset \langle Q \supset \langle P \land Q \rangle \rangle \rangle$	regla fantasiosa

Adviértanse los distintos márgenes de sangrado con que enmarqué las fantasías exterior e interior, destinados a subrayar la naturaleza de estos "niveles de realidad" insertados unos en otros. Un modo de entender la regla fantasiosa es decir que una observación efectuada *acerca* del sistema pasa a ser incluida *dentro* del sistema. En otros términos, el teorema $\langle x \supset y \rangle$, el cual hemos producido, puede ser concebido como representación, dentro del sistema, del enunciado referido al sistema: "Si *x* es un teorema, entonces *y* también lo es". Más específicamente aun: la interpretación postulada para $\langle P \supset Q \rangle$ es, "si P, entonces Q" o, de manera equivalente, "P implica Q".

El reverso de la regla fantasiosa

El Diálogo de Lewis Carroll trató excluyentemente de los enunciados "si . . . entonces . . .". Aquiles, en particular, enfrentó un sinfín de dificultades para conseguir que la Tortuga aceptase la segunda cláusula —así como aceptaba la primera— de un enunciado "si . . . entonces . . .", pese a que el enunciado "si . . . entonces . . ." mismo era aceptado. La

regla que sigue permitirá al lector inferir la segunda cláusula de una cadena '⊃', a condición de que la cadena '⊃' misma sea un teorema y de que la primera "cláusula" también lo sea.

REGLA DE SEPARACION: Si *x* y <*x*⊃*y*> son teoremas, entonces *y* es un teorema.

Dicho al pasar, esta regla es llamada frecuentemente "*modus ponens*", y la regla fantasiosa, por su parte, "teorema de deducción".

Interpretación de los símbolos

A esta altura, podemos dejarnos de secretos y revelar el "significado" de los restantes símbolos. Por si no se ha hecho evidente todavía, digamos que el símbolo '∧' es isomorfo de la común y corriente partícula 'y'. El símbolo'∼'representa el término 'no': es un tipo formal de negación. Los paréntesis angulados '<' y '>' son agrupadores; su función es similar a la de los paréntesis en álgebra convencional; la diferencia principal reside en que, en el álgebra, se cuenta con la libertad de intercalar o suprimir paréntesis, según lo que marquen las preferencias o el estilo personal, mientras que, en un sistema formal, esa discrecionalidad caótica no es tolerada. El símbolo '∨' representa la palabra 'o' ('o' es 'vel', en latín); esta 'o' es la llamada *inclusiva*, lo cual significa que la interpretación de <*x*∨*y*> es 'o *x* o *y*, o ambas'.

Los únicos para los que no hemos proporcionado interpretación son los átomos. Un átomo carece de interpretación propia: puede ser interpretado como cualquier oración en español (debe seguir siendo interpretado del mismo modo si aparece varias veces dentro de una cadena o de una derivación). Así, por ejemplo, la cadena bien formada <P∧∼P> puede ser interpretada como la oración compuesta

Este pensamiento es de Buda, y este pensamiento no es de Buda.

Examinemos ahora cada uno de los teoremas derivados hasta aquí y asignémosles una interpretación. El primero fue<P⊃∼∼P>.Si conservamos igual interpretación de P, tendremos:

Si este pensamiento es de Buda,
entonces no es del caso que este pensamiento no sea de Buda.

Obsérvese cómo he traducido la doble negación. Repetir la negación, en cualquier lenguaje natural, es embarazoso, por lo que cabe efectuar un rodeo mediante la utilización de dos formas diferentes de expresión negativa. El segundo teorema que derivamos fue <<P∧Q>⊃<Q∧P>>.

Si interpretamos a Q como la oración "Esta sandía pesa tres kilos", entonces nuestro teorema debe ser leído:

> Si este pensamiento es de Buda y esta sandía pesa tres kilos,
> entonces esta sandía pesa tres kilos y este pensamiento es de Buda.

El tercer teorema fue $\langle P \supset \langle Q \supset \langle P \wedge Q \rangle\rangle\rangle$; le corresponde la siguiente repetición autoincluida de la oración "si . . . entonces . . . "

> Si este pensamiento es de Buda,
> entonces, si esta sandía pesa tres kilos,
> entonces este pensamiento es de Buda y esta sandía pesa tres kilos.

Probablemente, el lector haya advertido que cada teorema, al ser interpretado, expresa algo banal y absolutamente evidente por sí mismo. (En ocasiones son *tan* evidentes por sí mismos que suenan vacuos y —paradójicamente, por cierto— confusos . . . e inclusive equívocos.) Ello puede quitarles grandiosidad, pero convendría tener presente que podría haberse generado a través de ellos una multitud de falsedades, y sin embargo esto no ha ocurrido. Este sistema —el cálculo proposicional— avanza con nitidez de verdad en verdad, evitando cuidadosamente las falsedades, igual que alguien a quien le preocupe no mojarse cruzará un arroyo con gran precaución, pisando una piedra saliente y luego otra, siguiendo el trazado de éstas por más retorcido y complicado que se lo vea. Lo impresionante es que, en el cálculo proposicional, todo es dado en forma puramente *tipográfica*. No hay nadie "allí dentro" que esté pensando acerca de la *significación* de las cadenas. Todo es dado de modo mecánico, convencional, rígido y hasta tonto.

El repertorio completo de reglas

No hemos enunciado todavía todas las reglas del cálculo proposicional. A continuación presentamos la lista completa de las mismas, incluyendo tres que no habíamos mencionado hasta ahora.

REGLA DE AGRUPAMIENTO: Si x e y son teoremas, entonces $\langle x \wedge y \rangle$ es un teorema.

REGLA DE DISOCIACION: Si $\langle x \wedge y \rangle$ es un teorema, entonces x e y son teoremas.

REGLA DE LA DOBLE TILDE: La cadena '∼∼' puede ser suprimida de cualquier teorema. También puede ser incorporada a cualquier teorema, a condición de que la cadena resultante esté bien formada.

REGLA FANTASIOSA: Si, cuando se supone de *x* que es un teorema, puede derivarse *y*, entonces <*x*⊃*y*> es un teorema.

REGLA DE TRASLADO: Cualquier teorema proveniente de la "realidad" ubicada un nivel más arriba puede ser llevado y empleado dentro de una fantasía.

REGLA DE SEPARACION: Si tanto *x* como <*x*⊃*y*> son teoremas, entonces *y* es un teorema.

REGLA DE CONTRAPOSICION: <*x*⊃*y*> y <∼*y*⊃∼*x*> son intercambiables..

REGLA DE MORGAN: <∼*x*∧∼*y*> y ∼<*x*∨*y*> son intercambiables.

REGLA DE QUITOPONGO: <*x*∨*y*> y <∼*x*⊃*y*> son intercambiables

(La regla de Quitopongo surgió por obra de Q. q. Quitopongo, guardagujas albanés dedicado a la reflexión lógica entre maniobra y maniobra.) En las reglas precedentes, se entiende por "intercambiable" lo siguiente: si una expresión de una forma aparece como teorema, o parte de un teorema, puede ser sustituida por la otra forma, y la cadena resultante también será un teorema. Debe recordarse que los símbolos '*x*' e '*y*' siempre representan cadenas bien formadas del sistema.

Fundamentos de las reglas

Antes de emplear las reglas para obtener derivaciones, examinaremos brevemente algunos hechos que les dan fundamento. Es posible que el lector encuentre mejores razones que las aportadas por mis ejemplos, ya que sólo daré un par de éstos.

La regla de contraposición brinda un modo de enunciar explícitamente formulaciones contrapuestas, que elaboramos inconscientemente, de oraciones —o sentencias— condicionales. Por ejemplo, la "Zentencia" "Zentencia"

Si lo estás contemplando, entonces te encuentras lejos del Camino

significa lo mismo que

Si estás muy cerca del Camino, entonces no lo estás contemplando.

La regla de De Morgan puede ser ilustrada a través de la oración, familiar para nosotros, "La bandera no se está moviendo y el aire no se está

moviendo". Si P simboliza "la bandera se está moviendo" y Q simboliza "el aire se está moviendo", entonces la oración compuesta es simbolizada por <~P∧~Q> lo cual, de acuerdo a la ley de De Morgan, es intercambiable con ~<P∧Q>, cuya interpretación sería, "No es verdad que la *bandera o el aire se estén moviendo*". *Y nadie puede negar que se trata de* una Zensata conclusión.

Respecto a la regla de Quitopongo, consideremos la oración "O una nube está suspendida sobre la montaña, o los rayos lunares están atravesando las olas del lago", lo cual podría ser dicho, supongo, por un meditativo maestro zen, quien recuerda un lago que puede evocar, pero no visualizar. Ahora hay que agarrarse fuerte, porque la regla de Quitopongo nos dice que aquello es intercambiable con el siguiente pensamiento: "Si una nube no está suspendida sobre la montaña, entonces los rayos lunares están atravesando las olas del lago". Esto no será muy luminoso, pero es lo mejor que el cálculo proposicional puede ofrecer.

Ejercitaciones del sistema

Aplicaremos ahora estas reglas a un teorema anterior, y veremos qué se obtiene. Por ejemplo, tomemos el teorema <P⊃~~P>:

<P⊃~~P>	teorema anterior
<~~~P⊃~P>	contraposición
<~P⊃~P>	doble tilde
<P∨~P>	quitopongo

Al ser interpretado, este nuevo teorema dice:

O este pensamiento es de Buda o este pensamiento no es de Buda.

Una vez más, a pesar de no recaer por poco en la vacilación, el teorema interpretado es, al menos, verdadero.

Seminterpretaciones

Es usual, cuando se descifran teoremas del cálculo proposicional en voz alta, que se interprete todo menos los átomos. Llamo a esto *seminterpretar*. Por ejemplo, la seminterpretación de <P∨~P> sería

P o no P.

Pese al hecho de que P no es una oración, la semioración formulada suena verdadera, porque uno se imagina muy fácilmente la asignación de

cualquier oración a P; además, la forma del teorema seminterpretado nos asegura que, cualquiera sea la significación asignada, la oración resultante sería verdadera. Y ésta es la idea básica del cálculo proposicional: producir teoremas que, al ser seminterpretados, sean vistos como "semioraciones universalmente verdaderas", lo cual significa que, cualquiera sea el modo en que se complete la interpretación, el resultado final será una proposición verdadera.

El hacha de Ganto

Haremos ahora un ejercicio más avanzado, basado en un koan zen llamado "El hacha de Ganto". Dice su parte inicial:

> Un día, Tokusan dijo a su discípulo Ganto, "hay dos monjes aquí que llevan muchos años conmigo. Ve y examínalos". Ganto tomó un hacha y fue a la choza donde los dos monjes estaban meditando. Levantó sobre ellos el hacha, diciendo, "si dicen ustedes una palabra, les cortaré la cabeza; y si no dicen una palabra, también les cortaré la cabeza".[1]

Si el lector dice una palabra, seccionaré este koan, y si no dice una palabra, también lo seccionaré . . . porque necesito traducir parte del mismo a nuestra notación. Simbolizaremos "ustedes dicen una palabra" mediante P, y "les cortaré la cabeza" mediante Q. Luego, la amenaza del hacha de Ganto es simbolizada por la cadena <<P⊃Q>∧<~P⊃Q>>. ¿Qué ocurriría si tal amenaza fuera un axioma? La fantasía que sigue responde a esta pregunta.

1)	[	desplazamiento
2)	<<P⊃Q>∧<~P⊃Q>>	axioma de Ganto
3)	<P⊃Q>	disociación
4)	<~Q⊃~P>	contraposición
5)	<~P⊃Q>	disociación
6)	<~Q⊃~~P>	contraposición
7)	[	nuevo desplazamiento
8)	~Q	premisa
9)	<~Q⊃~P>	traslado de la línea 4
10)	~P	separación
11)	<~Q⊃~~P>	traslado de la línea 6
12)	~~P	separación (líneas 8 y 11)
13)	<~P∧~~P>	agrupamiento
14)	~<PV~P>	De Morgan
15)	]	una recuperación
16)	<~Q⊃~<PV~P>>	regla fantasiosa

[1] Gyomay M. Kubose, *Zen Koans*, p. 178.

17)	$\langle\langle P \vee \sim P \rangle \supset Q \rangle$	contraposición
18)	[	desplazamiento
19)	$\sim P$	premisa (¡también resultado!)
20)	]	recuperación
21)	$\langle \sim P \supset \sim P \rangle$	regla fantasiosa
22)	$\langle P \vee \sim P \rangle$	quitopongo
23)	Q	separación (líneas 22 y 17)
24)	]	recuperación

Este ejemplo manifiesta el poder del cálculo proposicional. ¡Sólo mediante dos docenas de pasos hemos deducido Q: que las cabezas serán cortadas! (Ominosamente, la última regla aplicada es la de "separación" . . .) Parecería superfluo completar la lectura del koan, pues sabemos cómo tiene que seguir . . . No obstante, retiraré mi resolución de cortar el koan; es un auténtico koan zen, después de todo. La parte que falta dice así:

> Ambos monjes continuaron su meditación como si no hubiesen escuchado nada. Ganto bajó el hacha y dijo, "ustedes son auténticos discípulos zen". Regresó y relató lo ocurrido a Tokusan. "Capto perfectamente tu punto de vista", dijo Tokusan, "pero dime, ¿cuál es su punto de vista?" "Tozan puede aceptarlos", contestó Ganto, "pero *no* deben ser aceptados por Tokusan".[2]

¿Capta perfectamente el lector mi punto de vista? ¿Cuál será el punto de vista zen?

¿Hay un procedimiento de decisión para aplicar a los teoremas?

El cálculo proposicional nos aporta un conjunto de reglas para producir proposiciones que serían verdaderas en todos los mundos concebibles. Es por ello que todos sus teoremas dan la impresión de ser tan simples, al punto que parecen carecer por completo de contenido . . . Mirado en esta forma, el cálculo proposicional puede ser considerado un desperdicio de tiempo, puesto que nos dice cosas absolutamente triviales. Pero, por otro lado, lo hace mediante la especificación de la *forma* de las proposiciones que son universalmente verdaderas, y esto arroja una nueva clase de luz sobre las verdades centrales del universo: éstas no son sólo fundamentales, sino también *permanentes*; es decir que pueden ser producidas por un conjunto de reglas tipográficas. En otras palabras, todas ellas están "cortadas de la misma tela". Pensemos si puede decirse lo mismo acerca de los koan zen: ¿podrían ser todos producidos por un conjunto de reglas tipográficas?

Es del todo pertinente, aquí, plantear el problema del procedimiento

[2] *Ibid*, p. 178.

de decisión. O sea, ¿existe algún método mecánico que diferencie entre no teoremas y teoremas? Si es así, nos indicaría que el conjunto de teoremas del cálculo proposicional es no solamente r.e., sino también recursivo. Resulta que sí existe un interesante procedimiento de decisión, el método de las tablas de verdad. Presentarlo ahora nos desviaría un poco de nuestro tema, y además se lo encuentra prácticamente en cualquier libro corriente sobre lógica. ¿Y qué ocurre con los koan zen? ¿Podría concebirse un procedimiento mecánico de decisión que distinguiera los koan zen auténticos de las cosas que no lo son?

¿Sabemos si el sistema es coherente?

Hasta ahora, únicamente hemos *presumido* que todos los teoremas, cuando son interpretados del modo indicado, son proposiciones verdaderas. Pero, ¿*sabemos* que es así como debe ser? ¿Podemos demostrarlo? Se trata tan sólo de otra forma de preguntarnos si las interpretaciones postuladas ('y' para '∧', etc.) merecen ser llamadas "significaciones pasivas" de los símbolos. Este tema puede ser analizado desde dos diferentes perspectivas, a las que puede identificarse como la perspectiva "prudente" y la perspectiva "imprudente". Las presentaré según las veo, personificando a sus sostenedores como "Prudencia" e "Imprudencia".

Prudencia: Sólo SABREMOS que todos los teoremas resultan verdaderos bajo la interpretación postulada si nos ingeniamos para DEMOSTRARLO. Este es el modo, cauto y precavido, de proceder.

Imprudencia: Todo lo contrario. Es OBVIO que todos los teoremas han de resultar verdaderos. Si no me cree, examine nuevamente las reglas del sistema; descubrirá que éstas hacen que los símbolos funcionen exactamente como las palabras representadas deben, por su parte, funcionar. Por ejemplo, la regla de agrupamiento hace que el símbolo '∧' actúe como debe actuar 'y'; la regla de separación hace que '⊃' actúe como debe hacerlo, cuando representa a 'implica', o a 'si . . . entonces. . .', etc. A menos que se comporte usted como la Tortuga, reconocerá en cada regla la codificación de un modelo que usted misma utiliza en su propio pensamiento. De modo que si confía en los modelos de su propio pensamiento, entonces debe confiar en que todos los teoremas resulten verdaderos . . . Así es como yo lo veo. No necesito ninguna demostración adicional. Si usted cree que algunos teoremas resultan falsos, debe presumir entonces que algunas reglas no son correctas. Muéstreme cuáles.

Prudencia: No estoy segura de que haya alguna regla errónea, de modo que no puedo hacer lo que me pide. Pero sí puedo imaginarme esta situación: usted, siguiendo las reglas, obtiene el teorema, digamos, x. Yo, entretanto, siguiendo también las reglas, obtengo otro teorema

que resulta ser $\sim x$. ¿Puede usted hacer el esfuerzo de concebir esto?

Imprudencia: De acuerdo. Supongamos que así ocurre; ¿por qué le preocupa eso?, pero permítame plantearlo de otro modo. Imagínese que nos ponemos ambas a trabajar en el sistema MIU y yo obtengo el teorema x, mientras que usted obtiene el teorema xU. ¿Puede usted hacer el esfuerzo de concebir esto?

Prudencia: Por supuesto. En realidad, tanto MI como MIU son teoremas.

Imprudencia: ¿Y eso no le preocupa?

Prudencia: Claro que no. Su ejemplo es risible, porque MI y MIU son no CONTRADICTORIOS, en tanto las cadenas x y $\sim x$, en el cálculo proposicional, sí lo SON.

Imprudencia: Bien, sí . . . siempre que usted interprete '$\sim$' como 'no'. ¿Pero qué lo lleva a pensar que '$\sim$' debe ser interpretado como 'no'?

Prudencia: Las reglas mismas. Cuando uno las analiza, comprende la única interpretación concebible para '$\sim$' es 'no', del mismo modo que la única interpretación concebible para '$\wedge$' es 'y', etc.

Imprudencia: En otras palabras, ¿usted está convencida de que las reglas capturan los significados de esas palabras?

Prudencia: Efectivamente.

Imprudencia: ¿Y a pesar de eso, sigue dispuesta a sostener que tanto x como $\sim x$ pueden ser teoremas? ¿Por qué no sostiene también que los puercoespines son ranas, o que 1 es igual a 2, o que la luna está hecha de queso verde? Por mi parte, todavía no estoy dispuesta a considerar si tales ingredientes básicos de mi pensamiento son erróneos, pues de ser así, debería, entonces, considerar si mis modos de analizar todo el problema no son también erróneos, y me vería arrastrada a un enredo tremendo.

Prudencia: Sus argumentos son imperativos . . . De todos modos, aún quiero ver una DEMOSTRACION de que todos los teoremas resultan verdaderos, o de que x y $\sim x$ no pueden ser ambos, a la vez, teoremas.

Imprudencia: Usted desea una demostración. Eso significa, sospecho, que usted desea estar más persuadida de que el cálculo proposicional es coherente que de su propia cordura. Cualquier demostración en la que piense involucraría operaciones mentales de complejidad mayor que todas las exigidas por el cálculo proposicional mismo. Y entonces, ¿qué demostraría? Su reclamo de que se demuestre la coherencia del cálculo proposicional me hace pensar en alguien que está aprendiendo español e insiste en que se le proporcione un diccionario que defina todas las palabras simples en función de las palabras complicadas . . .

Otra vez el diálogo de Carroll

Esta breve discusión muestra las dificultades que presenta la utilización de la lógica y del razonamiento para argumentar en favor de ellos mis-

mos. Llegados a este punto, tocamos fondo, y no hay más defensa que exclamar a voz en cuello, "¡Yo sé que estoy en lo cierto!" Una vez más, nos enfrentamos al tema tan agudamente planteado por Lewis Carroll en todo su Diálogo: no se puede estar defendiendo permanentemente los modelos propios de razonamiento. Llega un momento en que la fe ocupa el escenario.

Un sistema de razonamiento puede ser comparado con un huevo. Este cuenta con una cáscara que protege el contenido. Si se desea enviar un huevo a alguna parte, sin embargo, no se puede confiar sólo en la cáscara: se lo empaca de alguna manera, elegida con arreglo a las dificultades y características del viaje. Se puede ser especialmente cuidadoso, y ubicar el huevo en el interior de varias cajas, contenidas unas en otras. Con todo, por más niveles de cajas que estén rodeando al huevo, es posible imaginar un cataclismo que consiga romperlo. Pero esto no significa que uno desista, por tal causa, de intentar el transporte. De modo similar, uno no puede aportar una demostración absoluta y definitiva de que otra demostración, correspondiente a determinado sistema, es legítima. Por supuesto, es posible aportar una demostración de una demostración, o una demostración de una demostración de una demostración . . . pero la validez del sistema ubicado en la base seguirá siendo siempre una suposición indemostrada, admitida como artículo de fe. Uno puede imaginar, en todo momento, que alguna sutileza insospechada ha de invalidar los fundamentos de todos los niveles particulares de demostración, y que, por ende, lo "demostrado" resultará carente de validez, al final. Ello no quiere decir, empero, que los matemáticos y los lógicos sufran la preocupación constante de que el edificio entero de la matemática pueda estar basado en el error. Por otra parte, cuando se proponen demostraciones poco ortodoxas, o sumamente extensas, o surgidas de computadoras, es cuando la gente se detiene a pensar un poco en el significado que realmente le otorga a la cuasi sagrada palabra "demostración".

Un ejercicio excelente para ser practicado, en este momento, por el lector, sería retornar al Diálogo de Carroll y codificar los diversos estadios del debate mediante nuestra notación, comenzando con el tema inicial de disputa:

Aquiles: Si usted tiene $<<A\land B>\supset Z>$, y tiene también $<A\land B>$, entonces seguramente tiene usted Z.
Tortuga: ¡Oh! Usted quiere decir $<<<<A\land B>\supset Z>\land<A\land B>>\supset Z>$, ¿no es así?

(Insinuación: Todo lo que Aquiles considera una regla de inferencia la Tortuga lo reduce a mera cadena del sistema. Si uno utiliza únicamente las letras A, B y Z, obtendrá un modelo recursivo de cadenas cada vez más extensas.)

Atajos y reglas derivadas

Cuando uno está efectuando derivaciones, en cálculo proposicional, rápidamente inventa diversos tipos de atajos, los cuales no son, estrictamente, parte del sistema. Por ejemplo, si se necesita la cadena <Q∨∼Q> en un punto determinado, y ya ha sido derivada <P∨∼P>, hay quienes procederían como si <Q∨∼Q> hubiese sido derivada, pues saben que su derivación guarda un paralelo exacto con la de <P∨∼P>. . El teorema derivado es tratado como un "esquema de teorema": un molde para otros teoremas. Esto resulta ser un procedimiento perfectamente válido, en la medida en que conduce siempre a nuevos teoremas, pero no es una regla del cálculo proposicional semejante a las que presentamos. Antes bien, es una *regla derivada*. Es parte de nuestro conocimiento *acerca* del sistema. Que esta regla nos retenga siempre dentro del espacio de los teoremas es algo que necesita demostrarse, por cierto, pero tal demostración no es análoga a una derivación en el interior del sistema: es una demostración en el sentido corriente e intuitivo del concepto, o sea una serie de razonamientos encuadrados por la vía I. La teoría *acerca* del cálculo proposicional es una "metateoría", y sus resultados pueden ser llamados "metateoremas": Teoremas acerca de teoremas. (Obsérvese la peculiar utilización de la mayúscula en la expresión "Teoremas acerca de teoremas". Es consecuencia de la convención a la que nos ajustamos: los metateoremas son Teoremas (demostrados) relativos a teoremas (cadenas derivables).)

En el cálculo proposicional, uno puede descubrir muchos otros metateoremas, o reglas derivadas de inferencia. Por ejemplo, hay una segunda regla de De Morgan:

<∼*x*∨∼*y*>y∼<*x*∧*y*> son intercambiables.

Si ésta fuera una regla del sistema, podrían acelerarse considerablemente muchas derivaciones. Ahora bien, si *demostramos* que es correcta, ¿no basta con ello?, ¿no podemos emplearla exactamente igual que a una regla de inferencia, a partir de entonces?

No hay motivo para poner en duda la validez de la regla derivada, pero si comenzamos a admitir reglas derivadas como parte de nuestro procedimiento en el cálculo proposicional, habremos deshecho la formalidad del sistema, puesto que las reglas derivadas son derivadas informalmente: fuera del sistema. Y los sistemas formales han sido postulados como un medio para exhibir explícitamente cada uno de los pasos de una demostración, dentro de una estructura unitaria y rígida, de modo que cualquier matemático pueda verificar mecánicamente el trabajo de cualquier otro. Luego, para quien decida mantenerse en el exterior de esa estructura, lo mismo da que ésta no hubiese sido creada. En consecuencia, hay alguna desventaja en la utilización de atajos.

Formalización de niveles más altos

Pero hay una alternativa. ¿Por qué no formalizar también la metateoría? Siguiendo tal alternativa, las reglas derivadas (metateoremas) deberían ser teoremas de un sistema formal más amplio, y sería legítimo buscar atajos y derivarlos como teoremas, es decir, teoremas de la metateoría formalizada, los cuales podrían entonces utilizarse para agilizar la derivación de los teoremas del cálculo proposicional. Se trata de una idea interesante, pero tan pronto es sugerida uno se precipita a pensar en metametateorías, y así siguiendo. Queda claro que, por más niveles que se formalicen, finalmente alguien pretenderá establecer atajos en el nivel superior.

Es posible proponer, inclusive, que una teoría del razonamiento llegue a ser idéntica a su propia metateoría, si se lo intenta adecuadamente. Se diría entonces que todos los niveles confluirían en uno solo y que pensar *acerca* del sistema sería ni más ni menos que actuar *dentro* del sistema. Pero no es tan sencillo. Aun cuando un sistema pueda "pensar en sí mismo", ello no lo ubica todavía *fuera* de sí mismo. Quien está fuera del sistema lo percibe de modo diferente de como se percibe el sistema a sí mismo. Así y todo, hay una metateoría —una perspectiva desde el exterior— inclusive en las teorías que pueden "pensar en sí mismas" en el interior de sí mismas. Descubriremos que existen teorías que pueden "pensar en sí mismas"; en realidad, un poco más adelante analizaremos un sistema en el cual esto ocurre de manera enteramente accidental, ¡sin que nos lo propongamos! Y veremos qué tipo de efectos surge de ello. Pero en nuestro examen del cálculo proposicional, nos adherimos a las nociones más elementales: no entremezclar niveles.

Si no se distingue cuidadosamente entre operar en el interior del sistema (la vía M) y pensar acerca del sistema (la vía I), pueden producirse falacias. Por ejemplo, parecería perfectamente razonable suponer que, como $\langle P \vee \sim P \rangle$ (cuya seminterpretación es "o P o no P") es un teorema, entonces "*o* P o $\sim$ P" debe ser un teorema. Pero es una suposición absolutamente errónea: ninguna de las dos últimas expresiones es un teorema. En general, es una práctica riesgosa la de suponer que los símbolos pueden ser deslizados de uno a otro nivel; en este caso, desde el del lenguaje del sistema formal, al de su metalenguaje (el idioma español).

Reflexiones sobre la fortaleza y las debilidades del sistema

Hemos visto una muestra de sistema dotado de un propósito: representar parte de la arquitectura del pensamiento lógico. Los conceptos manejados por el sistema son numéricamente escasos y de carácter simple y preciso. Pero la simplicidad y precisión del cálculo proposicional son exactamente

los aspectos que lo hacen atractivo a los ojos de los matemáticos. Hay dos razones para ello: 1) Puede ser estudiado en sus atributos propios, lo mismo que la geometría estudia formas simples y rígidas. Se le pueden introducir variantes, empleando diferentes símbolos, reglas de inferencia, axiomas o esquemas de axiomas, etc. (Dicho al margen, la versión del cálculo proposicional presentada aquí se relaciona con la creada por G. Gentzen, a comienzos de los años treinta. Hay otras versiones en las que se emplea sólo una regla de inferencia —la separación, generalmente— y varios axiomas, o esquemas de axioma.) El estudio de las maneras de ejercitar un razonamiento proposicional, a través de sistemas formales armoniosos, es una fascinante rama de la matemática pura. 2) El cálculo proposicional puede ser extendido sin dificultad, hasta abarcar otras facetas fundamentales del razonamiento. Algo de esto será mostrado en el capítulo siguiente, donde el cálculo proposicional será metido hasta las orejas dentro de un sistema mucho más amplio y profundo, dentro del cual pueda tener lugar el refinado razonamiento propio de la teoría de los números.

Demostraciones *vs.* derivaciones

El cálculo proposicional se asemeja mucho al razonamiento, en algunos aspectos, pero no debemos identificar sus reglas con las del pensamiento humano. Una *demostración* es una cosa informal o, en otras palabras, un producto del pensamiento normal, formulado en lenguaje humano y destinado al consumo humano. Todas las complejidades del pensamiento humano pueden ser aplicadas a la demostración y, aunque se "sienta" la certeza de que son legítimas, sería para sorprenderse que puedan ser defendidas de modo lógico. Este es, en cambio, el cometido de la formalización. Una *derivación* es el equivalente mecánico de la demostración; su propósito es alcanzar el mismo objetivo, pero a través de una estructura lógica cuyos métodos no sólo son totalmente explícitos, sino también sumamente simples.

Si —tal como es el caso, por lo común— una derivación formal resulta mucho más extensa que la demostración "natural" correspondiente, no hay que disgustarse; es el precio pagado para hacer de cada paso algo tan simple. A menudo ocurre que una derivación y una demostración son "simples" en sentidos complementarios de la palabra; la demostración es simple, desde el punto de vista de que cada paso "impresiona como legítimo", aun cuando no se sepa por qué; la derivación es simple, desde el punto de vista de que sus miríadas de pasos son tan triviales que escapan a toda refutación, y como la derivación íntegra consiste únicamente en esos pasos triviales, se la supone exenta de error. Una y otra forma de simplicidad, sin embargo, conllevan un tipo específico de complejidad. En cuanto a la demostración, se trata de la complejidad del sistema que le subyace, cuyo fundamento, a su vez, es el lenguaje humano; en cuanto a

la derivación, se trata de su dimensión astronómica, lo cual la hace casi imposible de aprehenderla en un solo acto.

Así, el cálculo proposicional debería ser considerado parte de un método general de sintetización de las estructuras mecánicas que se asemejan a la demostración. Sin embargo, carece mayormente de flexibilidad o generalidad; se lo ha postulado únicamente para su uso en vinculación con conceptos matemáticos, los cuales son enteramente rígidos.

Como ejemplo interesante de lo anterior, hagamos una derivación donde una cadena muy peculiar es la premisa de una fantasía: <P∧∼P>. Por lo menos su seminterpretación es peculiar. El cálculo proposicional, no obstante, no toma en cuenta seminterpretaciones: sólo manipula cadenas por medio de procedimientos tipográficos; y, desde el punto de vista tipográfico, la cadena citada carece en realidad de toda peculiaridad. A continuación, una fantasía donde esta cadena actúa como premisa:

1)	[	desplazamiento
2)	<P∧∼P>	premisa
3)	P	disociación
4)	∼P	disociación
5)	[	desplazamiento
6)	∼Q	premisa
7)	P	traslado de la línea 3
8)	∼∼P	doble tilde
9)	]	recuperación
10)	<∼Q⊃∼∼P>	fantasía
11)	<∼P⊃Q>	contraposición
12)	Q	separación (líneas 4, 11)
13)	]	recuperación
14)	<<P∧∼P>⊃Q>	fantasía

Ahora bien, la intepretación es muy extraña:

P y no P, en conjunto, implican Q.

Puesto que Q es interpretable como un enunciado cualquiera, podemos leer libremente lo anterior del siguiente modo: "Dada una contradicción, se sigue cualquier cosa". Por ende, los sistemas basados en el cálculo proposicional no pueden dar cabida a la contradicción; ésta infecta todo el sistema, como si se tratase de un súbito cáncer global.

El manejo de las contradicciones

Esto no se parece mucho al pensamiento humano. Si uno descubre una contradicción dentro de los propios razonamientos, es muy improbable

que la estructura mental personal sufra una desarticulación completa. En lugar de ello, lo más fácil es que uno comience a revisar las convicciones o los modos de razonar a los cuales atribuye la falla. Dicho de otra manera, uno abandona, en la medida posible, los sistemas interiores a los cuales responsabiliza de la contradicción, e intenta recomponerlos. No es ni remotamente probable que uno baje los brazos y exclame, "Bueno, sospecho que esto muestra que ahora creo cualquier cosa". Puede que algo así se diga en son de broma, pero nunca seriamente.

La contradicción, por cierto, es una de las fuentes principales de clarificación y de progreso en todos los dominios de la vida . . . y la matemática no es una excepción al respecto. En tiempos pasados, cuando surgía una contradicción dentro de la matemática, los matemáticos trataban inmediatamente de determinar cuál sistema era responsable para apartarse de él, examinarlo y enmendarlo. Lejos de debilitar la disciplina, el descubrimiento y rectificación de una contradicción la fortalecen. Ello puede insumir tiempo y una buena cantidad de comienzos equivocados, pero en definitiva produce sus frutos. En la Edad Media, por ejemplo, el valor de la serie infinita

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots$$

era algo muy acaloradamente debatido. Estaba "demostrado" que era igual a 0, y también a 1, o a $1/2$, y quizá inclusive a otros valores más. Estos descubrimientos contradictorios dieron lugar a una teoría más completa y profunda acerca de las series infinitas.

Un ejemplo más directo lo da la abierta contradicción que estamos confrontando en este momento, es decir, la discrepancia existente entre la forma en que realmente pensamos y la forma en que el cálculo proposicional nos imita. Esto ha sido una fuente de incomodidad para muchos lógicos, y así es como se han emprendido importantes esfuerzos creativos destinados a reordenar el cálculo proposicional, de modo que deje de funcionar con tanta simpleza y tanta inflexibilidad. Un intento, presentado en el libro *Entailment*, de A. R. Anderson y N. Belnap,[3] habla de la "implicación pertinente", la cual trata de conseguir que el símbolo correspondiente a "si . . . entonces . . ." refleje causalidades legítimas o, en último caso, conexión entre significaciones. Consideremos los siguientes teoremas del cálculo proposicional:

$$<P\supset<Q\supset P>>$$
$$<P\supset<Q\vee\sim Q>>$$
$$<<P\wedge\sim P>\supset Q>$$
$$<<P\supset Q>\vee<Q\supset P>>$$

[3] A. R. Anderson and N. D. Belnap, Jr.: *Entailment* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1975).



Figura 42. "Canon Cangrejo", *de M. C. Escher (~ 1965).*

Estos y muchos otros del mismo tipo muestran sin excepción que entre la primera y la segunda cláusulas de una proposición "si . . . entonces . . ." no se necesita que exista la menor relación, como requisito para ser demostrables dentro del cálculo proposicional. Frente a esto, la protesta de la "implicación pertinente" consiste en establecer ciertas restricciones en los contextos dentro de los cuales vayan a ser aplicadas las reglas de inferencia. Intuitivamente, dice que "una cosa puede ser derivada de alguna otra sólo si ambas están vinculadas entre sí". Por ejemplo, la línea 10 de la derivación de más arriba no sería posible en este nuevo sistema, e impediría la derivación de la cadena $<<P\wedge\sim P>\supset Q>$.

Hay ensayos más radicales, que desisten por completo de preocuparse por la completitud o la coherencia y tratan de reproducir el razonamiento humano, con todas sus incoherencias. Estas búsquedas ya no tienen por meta aportar un sólido apuntalamiento a la matemática, sino exclusivamente estudiar los procesos del pensamiento humano.

A pesar de sus recodos, el cálculo proposicional está dotado de rasgos que lo hacen recomendable. Si se lo incorpora a un sistema más amplio (tal como haremos en el siguiente capítulo), y si se tiene la seguridad de que tal sistema no contiene contradicciones (contaremos con esa seguridad), el cálculo proposicional llena las expectativas que se le han depositado: provee inferencias proposicionales válidas . . . todas las que puedan formularse. Entonces, suponiendo que se deslice una incompletitud o una incoherencia, se puede tener la certeza de que el error está en el sistema más amplio, y no en el subsistema, el cual, en este caso, es el cálculo proposicional.

```
                          *
                         * *
                          *
                          *
                          *
                          *
                          *
                         * *
                        * _ *
                       * ___ *
                   * ___ * ___ *
               * ___ * ___ * ___ *
           * ___ * ___ * ___ * ___ *
       * ___ * ___ * ___ * ___ * ___ *
   * ___ * ___ * ___ * ___ * ___ * ___ *
* ___ * ___ * ___ * ___ * ___ * ___ * ___ *
```

Canon Cangrejo

Aquiles y la Tortuga se encuentran en el parque, estando ambos allí de paseo.

Tortuga: Buenos días, señor Aquiles.
Aquiles: Oh, lo mismo digo.
Tortuga: Qué agradable encuentro.
Aquiles: Es justamente lo que yo pienso.
Tortuga: Y es un día magnífico para dar una caminata. Creo que pronto me marcharé a mi casa.
Aquiles: ¿Sí? Me parece que no hay nada mejor para usted que caminar.
Tortuga: A propósito, se lo ve de muy buen humor estos días, debo decir.
Aquiles: Se lo agradezco mucho.
Tortuga: No, de ninguna manera. ¿Quiere probar uno de mis cigarros?
Aquiles: Oh, se comporta usted prosaicamente; en este campo, los componentes holandeses son de gusto notoriamente inferior, ¿no cree?
Tortuga: No estoy de acuerdo. Pero, hablando de gustos, por fin vi el otro día, en una galería, el *Canon Cangrejo* de su autor predilecto, M. C. Escher, y me cautivaron por completo la belleza y la ingenuidad con las cuales elaboró un tema único que se combina consigo mismo y se despliega hacia adelante y hacia atrás. Pero sospecho que siempre se me impondrá Bach como superior a Escher.

Aquiles: No sé qué decirle. Pero algo de lo que estoy seguro es de que no me preocupan las argumentaciones en torno a gustos. *De gustibus non est disputandum.*

Tortuga: Dígame, ¿cómo son las cosas a su edad? ¿Es cierto que no se tiene ninguna preocupación?

Aquiles: En realidad, no se ven motivos de irritación.

Tortuga: Bueno, para mí es lo mismo.

Aquiles: Toca usted una cuerda equivocada; hay una gran diferencia, para que lo sepa.

Tortuga: Oiga, ¿toca usted la guitarra?

Aquiles: Yo no, pero mi mejor amigo sí. Toca a menudo, es divertido. Pero yo no toco ni siquiera el estuche de una guitarra.

(Súbitamente, desde no se sabe dónde, aparece el Cangrejo, moviéndose excitadamente y señalándose un ojo, más bien negro e inflamado.)

Cangrejo: ¡Hola! ¡Hooolaa! ¿Qué hay de nuevo? ¿Ven ustedes este coscorrón, esta hinchazón? Tan sólo por una reclamación. ¡Oh! Y en un día tan hermoso. Fíjense ustedes, yo paseaba por el parque cuando aparece, golpeando el piso con sus ruidosos pasos, este gigantesco tipo de Varsovia —un coloso (más que nada *oso*) humano— tocando un laúd. Medía tres metros, por lo menos. Yo hice una gambeta para esquivarlo, me estiré como para tocar el cielo y conseguí agarrar su rodilla, diciéndole, "Mil perdones, caballero, pero usted trae po-laúd-ción a nuestro parque con sus mazurcas"; pero, ¡Bum!, no tiene sentido del humor —nada, ni un chiquito— y ¡Pum!, se libró de mi contacto y se conectó él conmigo, ¡machacándome el ojo! Si estuviera en mi naturaleza, me acordaría de que soy Cáncer, según los horóscopos, pero quiero ser fiel a la tradición de mi especie y, en consecuencia, retroceder. Después de todo, cuando avanzamos, vamos hacia atrás. Está en nuestros genes, saben, dar media vuelta una y otra vez. Esto me recuerda . . . Yo siempre me he preguntado, "¿Quién apareció primero: el Cangrejo o el Gene?" Es decir, "¿Quién apareció último: el Gene o el Cangrejo?" Yo siempre invierto las cosas, saben. Está en nuestros genes, al fin y al cabo. Cuando retrocedo, avanzo. ¡Ah, yo! ¡Oh, lo mío! Debo seguir galopando por mi feliz sendero y despedirme de tan bello día. Exclamen "¡Ouuu!" a la salud de un Cangrejo. ¡TEI! ¡TEI! ¡Olé!

(Desaparece tan súbitamente como había aparecido.)

Tortuga: Este es mi mejor amigo. Toca la cuerda divertida a menudo. Pero yo ni siquiera toco un estuche con una guitarra.

Aquiles: Oiga, ¿toca usted la guitarra?

Tortuga: Toca usted una cuerda equivocada; hay una gran diferencia, para que lo sepa.

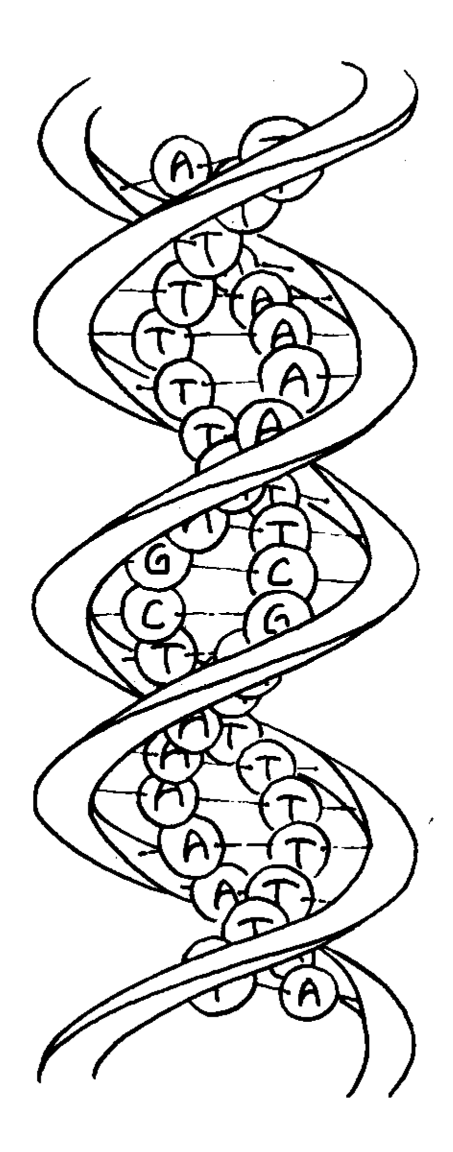


Figura 43. He aquí una breve sección de uno de los genes del Cangrejo, dando media vuelta una y otra vez. Cuando son desanudadas dos cadenas de ADN, y colocadas una al lado de la otra, se las puede descifrar así:

. . .TTTTTTTTTCGAAAAAAAAA. . .
. . .AAAAAAAAAGCTTTTTTTTT. . .

Adviértase que son la misma cosa, sólo que una va hacia adelante y la otra hacia atrás. Esta es la propiedad que define a la forma llamada "canon cangrejo" en música. Evoca, pese a una pequeña diferencia formal, un palindroma, el cual es una oración que dice lo mismo al leérsela hacia atrás o hacia adelante. En biología molecular, estos segmentos de ADN son llamados "palindromas": un pequeño error denominativo, puesto que "canon cangrejo" sería más adecuado. Este segmento de ADN no sólo es canónicamente cangrejo, sino que, además, su secuencia básica codifica la estructura del diálogo. ¡Conviene estudiarlo atentamente!

Aquiles: Bueno, para mí es lo mismo.

Tortuga: En realidad, no se ven motivos de irritación.

Aquiles: Dígame, ¿cómo son las cosas a su edad? ¿Es cierto que no se tiene ninguna preocupación?

Tortuga: No sé qué decirle. Pero algo de lo que estoy segura es de que no me preocupan las argumentaciones en torno a gustos. *Disputandum non est de gustibus.*

Aquiles: No estoy de acuerdo. Pero, hablando de gustos, por fin oí el otro día, en un concierto, el *Canon Cangrejo* de su autor predilecto, J. S. Bach, y me cautivaron por completo la belleza y la ingenuidad con

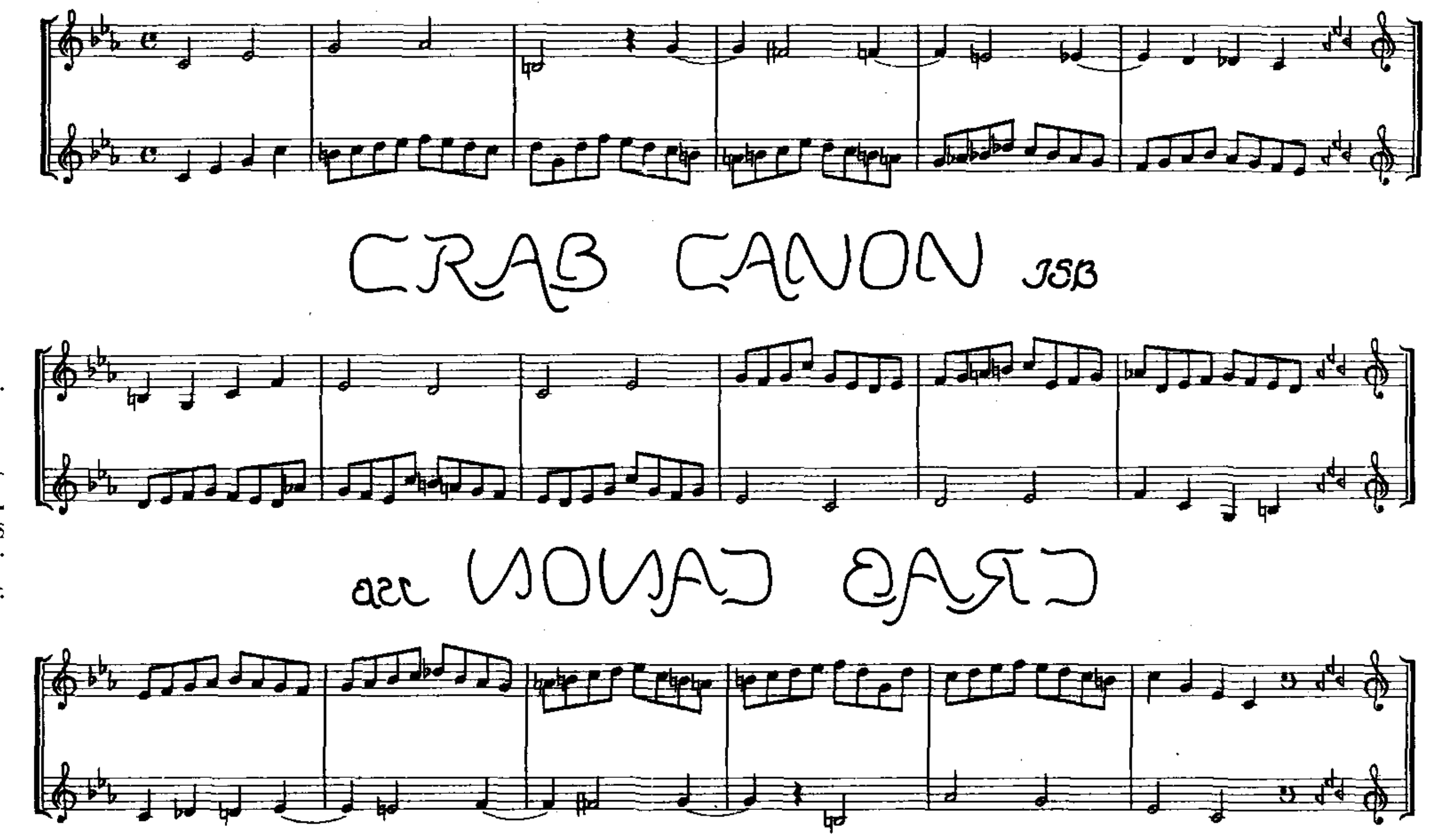


Figura 44. Canon Cangrejo, *de la Ofrenda Musical de J. S. Bach. [Música impresa por el programa "SMUT", de Donald Byrd.]*

las cuales elaboró un tema único que se combina consigo mismo y se despliega hacia adelante y hacia atrás. Pero sospecho que siempre se me impondrá Escher como superior a Bach.

Tortuga: Oh, se comporta usted prosaicamente; en este campo, los componentes holandeses son de gusto notoriamente inferior, ¿no cree?

Aquiles: No, de ninguna manera. ¿Quiere probar uno de mis cigarros?

Tortuga: Se lo agradezco mucho.

Aquiles: A propósito, se la ve de muy buen humor estos días, debo decir.

Tortuga: ¿Sí? Me parece que no hay nada mejor para usted que caminar.

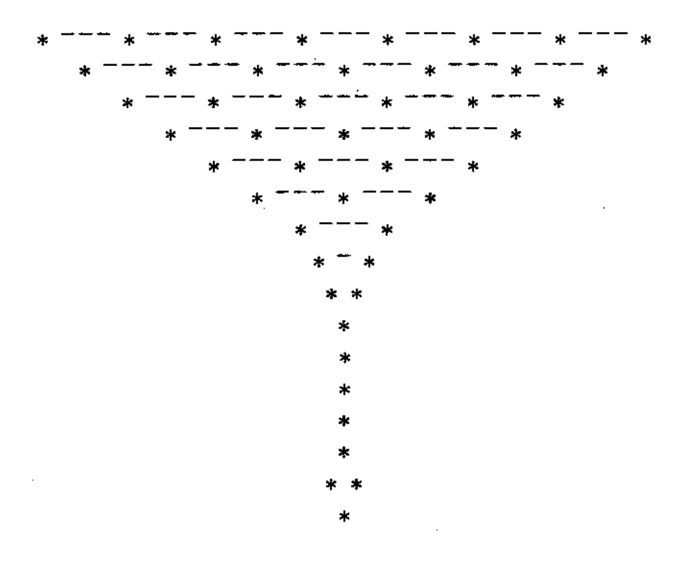
Aquiles: Y es un día magnífico para dar una caminata. Creo que pronto me marcharé a mi casa.

Tortuga: Es justamente lo que yo pienso.

Aquiles: Qué agradable encuentro.

Tortuga: Oh, lo mismo digo.

Aquiles: Buenos días, señora Tortuga.



CAPITULO VIII

Teoría tipográfica de los números

El *Canon Cangrejo* y la autorreferencia indirecta

ENCONTRAMOS TRES EJEMPLOS de autorreferencia indirecta en el *Canon Cangrejo*. Tanto Aquiles como la Tortuga describen creaciones artísticas que conocen y, en forma enteramente casual, sucede que tales creaciones tienen la misma estructura que el diálogo mismo. (Imagine el lector mi sorpresa al advertirlo yo, el autor.) Además, el Cangrejo describe una estructura biológica y ésta, a su vez, ostenta aquella misma propiedad. Por supuesto, uno puede leer el Diálogo, comprenderlo, y no darse cuenta de que éste tiene también la forma de un canon cangrejo. Ello significaría que se lo ha comprendido en un nivel, pero no en otro. Para captar la autorreferencia tiene que analizarse la forma, además del contenido, del Diálogo.

La construcción de Gödel depende de la descripción de la forma, tanto como de la del contenido, de las cadenas del sistema formal que definiremos en este capítulo: la *Teoría de los Números Tipográfica* (TNT). El giro inesperado consiste en que, a causa de una sutil correspondencia descubierta por Gödel, la forma de las cadenas puede ser descripta dentro del sistema formal mismo. Ingresemos a este curioso sistema, disponiéndonos a que nos envuelva.

Qué queremos expresar mediante TNT

Comenzaremos por citar algunas expresiones propias de la teoría de los números; luego trataremos de encontrar un conjunto de nociones básicas en función de las cuales puedan ser reformuladas todas nuestras oraciones. Tales nociones, entonces, consistirán en determinados símbolos específicos. Debemos decir desde ahora que la denominación "teoría de los números" se ha de referir únicamente a las propiedades de los enteros positivos y del cero (y a los conjuntos formados por dichos enteros). Estos números son llamados *números naturales*. Los números negativos no llenan ninguna función en esta teoría. Así, cuando se utilice la palabra "número", se referirá exclusivamente a un número natural. Y es importante —fundamental— que el lector distinga nítidamente entre el sistema formal (TNT), y la un tanto mal definida pero cómoda, y tradicional, rama de la matemática que es la teoría de los números misma. Llamaré a ésta "N".

Algunas oraciones clásicas de N —la teoría de las números— son:

1) 5 es primo.
2) 2 no es un cuadrado.
3) 1729 es la suma de dos cubos.
4) Ninguna suma de dos cubos positivos es un cubo.
5) Hay infinitos números primos.
6) 6 es par.

Ahora bien, se puede pensar que hace falta un símbolo para cada noción tal como "primo", "cubo", o "positivo"; sin embargo, estas nociones no son primordiales, en realidad. La primidad, por ejemplo, está relacionada con los factores que tiene un número, los cuales, a su vez, están relacionados con la multiplicación. La cubicidad está también definida en términos de multiplicación. Vamos, pues, a reformular las expresiones anteriores, utilizando nociones que suenen más elementales.

1') No existen números a y b, ambos mayores que 1, tales que 5 sea igual a a veces b.

2') No existe un número b, tal que b veces b sea igual a 2.

3') Existen números b y c, tales que b veces b veces b, más c veces c, sea igual a 1729.

4') Para todos los números b y c, mayores que 0, no hay un número a tal que, a veces a veces a sea igual a b veces b veces b, más c veces c veces c.

5') Para todo número a existe un número b, mayor que a, dotado de la propiedad de que no existen números c y d, mayores que uno, tales que b sea igual a c veces d.

6') Existe un número c, tal que 2 veces c es igual a 6.

Este análisis nos ha hecho recorrer un largo camino, hacia los elementos básicos del lenguaje de la teoría de los números. Está a la vista que algunas expresiones reaparecen una y otra vez:

para todos los números b
existe un número b, tal que . . .
mayor que
igual a
veces
más
0, 1, 2, . . .

La mayor parte de estas expresiones se constituirá en símbolos específicos. Una excepción está dada por "mayor que", la cual puede ser, a su vez, reducida; la oración "a es mayor que b" pasa a ser:

existe un número c, no igual a 0, tal que a es igual a b más c.

Numerales

No contaremos con un *símbolo diferente para cada número natural*. En lugar de ello, aplicaremos un método simple y uniforme para elaborar símbolos compuestos que correspondan a cada uno de los números naturales: algo muy cercano a lo que hicimos en el sistema pq. He aquí nuestra notación para los números naturales:

cero: 0
uno: S0
dos: SS0
tres: SSS0
etc.

El símbolo S tiene una interpretación: "el subsiguiente a". Entonces, la interpretación literal de SS0 es "el subsiguiente al subsiguiente a cero". Las cadenas de esta forma son llamadas *numerales*.

Variables y términos

Naturalmente, necesitamos un modo de referirnos a los números no especificados, o variables. Usaremos para ello las letras a, b, c, d, e. Pero estos cinco elementos no serán suficientes; nos hace falta un surtido ilimitado, como el de los átomos en el cálculo proposicional. Usaremos un método similar al que adoptamos en este último para incrementar el número de variables: la anexión de la cantidad que se quiera de apóstrofos. (Advertencia: como el símbolo ' se lee "prima", no se lo debe asociar para nada con los números primos.) Por ejemplo:

e
d'
c''
b'''
a''''

son *variables*.

En cierto modo, es un derroche emplear cinco letras del alfabeto, cuando podríamos arreglarnos solamente con la a y el apóstrofo. Más

adelante, por cierto, nos desharemos de b, c, d y e, de lo cual resultará una suerte de versión austera de TNT: austera, en el sentido de que se hace un poco más arduo, así, el desciframiento de fórmulas complejas. Por ahora, empero, seguiremos siendo dispendiosos.

¿Y qué ocurre con la suma y la multiplicación? Muy sencillo: usaremos los símbolos corrientes ' + ' y '·'. Sin embargo, introduciremos también ciertos requisitos en cuanto a la utilización de paréntesis (lentamente, nos vamos deslizando dentro de las reglas que definen las cadenas bien formadas de TNT). Para enunciar "b más c" y "b veces c", por ejemplo, empleamos las cadenas

(b + c)
(b · c)

Lo anterior no configura un exceso en materia de paréntesis; violar la convención al respecto produce fórmulas no bien formadas. (¿"Fórmula"? Usé este término en lugar de "cadena", porque las convenciones establecidas indican que así se haga. Una *fórmula* no es ni más ni menos que una cadena de TNT.)

Corresponde decir que la suma y la multiplicación han de ser siempre consideradas como operaciones *binarias*; es decir, que unen solamente dos números, nunca tres o más. Así, si se desea enunciar "1 más 2 más 3", se debe elegir una de las dos expresiones siguientes

(S0 + (SS0 + SSS0))
((S0 + SS0) + SSS0)

La siguiente noción que simbolizaremos es la de *igual a*. Es muy sencillo: emplearemos para ello '=', o sea el mismo símbolo que se utiliza en N —teoría no formal de los números—, el cual adoptamos a causa de la ventaja que implica su fácil legibilidad. En cuanto a perjuicios, acá son exactamente los mismos que los derivados de usar las palabras "punto" y "línea" cuando se aborda formalmente la geometría: salvo que uno sea muy consciente y escrupuloso, puede descuidar la distinción necesaria entre las significaciones corrientes y el comportamiento estrictamente gobernado por reglas de la simbolización formal. Al hablar de geometría, hicimos la diferencia entre las palabras cotidianas y el término formal, apelando al empleo de mayúsculas para escribir estos últimos: así, en geometría elíptica, un PUNTO era la unión de dos puntos comunes. Aquí no habrá tal diferenciación y, en consecuencia, se hará necesario un esfuerzo mental para no confundir un símbolo con todas las asociaciones que despierta. Tal como se dijo antes, con referencia al sistema pq: la cadena '---' no es el número 3, sino que actúa isomórficamente con respecto a 3, por lo menos en el contexto de la suma. Idéntica observación cabe para la cadena SSS0.

Atomos y símbolos proposicionales

En TNT, utilizaremos todos los símbolos del cálculo proposicional, excepción hecha de las letras destinadas a representar átomos (P, Q, R); dichos símbolos retendrán sus interpretaciones. La función de los átomos será ahora llenada por cadenas que, al ser interpretadas, resultan proposiciones de igualdad, tales como S0 = SS0 o (S0 · S0) = S0.

Ahora, ya estamos equipados para traducir una buena porción de oraciones simples a la notación de TNT:

2 más 3 igual a 4:	(SS0 + SSS0) = SSSS0
2 más 2 no es igual a 3:	∼(SS0 + SS0) = SSS0
Si 1 es igual a 0, entonces 0 es igual a 1:	<S0 = 0⊃0 = S0>

La primera de estas cadenas es un átomo; el resto se trata de fórmulas compuestas. (Atención: el 'y' de la frase "1 y 1 hacen 2" es tan sólo otra palabra para designar 'más', y será representada por el signo '+' (y los paréntesis que correspondan).)

Variables libres y cuantificadores

Todas las fórmulas bien formadas que aparecen más arriba tienen la propiedad de que sus interpretaciones son oraciones o verdaderas o falsas. Hay, sin embargo, fórmulas bien formadas que carecen de tal propiedad, tales como la siguiente:

(b + S0) = SS0

Su interpretación es "b más 1 es igual a 2". Puesto que b es no especificado, no hay forma de asignar un valor de verdad a la proposición. Es semejante a una aseveración centrada en un pronombre, y hecha fuera de contexto, tal como "ella es aburrida": no es ni verdadera ni falsa, está aguardando que se la ubique dentro de un contexto. Ya que no es ni verdadera ni falsa, aquella fórmula es llamada *abierta*, y la variable b es llamada *variable libre*.

Un modo de transformar en fórmula *cerrada*, u *oración* una fórmula abierta, consiste en anteponerle un *cuantificador*: sea la expresión "existe un número b tal que . . .", o la expresión "para todo número b". En el primer caso, se obtiene la oración:

Existe un número b tal que b más 1 es igual a 2.

Está claro que es verdadera. En el segundo caso, se obtiene:

Para todo número b, b más 1 es igual a 2.

Está claro que es falsa. Ahora, introducimos símbolos para representar dichos cuantificadores. Traducimos las oraciones anteriores a notación TNT como sigue:

$$\exists b:(b+S0)=SS0 \qquad \text{('}\exists\text{' representa a 'existe'.)}$$
$$\forall b:(b+S0)=SS0 \qquad \text{('}\forall\text{' representa a 'todo'.)}$$

Es muy importante advertir que estas proposiciones ya no son números no especificados; la primera es una *aseveración de existencia*, y la segunda es una *aseveración universal*. Siguen significando lo mismo aun cuando remplacemos b por c:

$$\exists c:(c+S0)=SS0$$
$$\forall c:(c+S0)=SS0$$

Una variable colocada bajo el dominio de un cuantificador es llamada *variable cuantificada*. Las dos fórmulas que siguen ilustran la diferencia existente entre variables libres y variables cuantificadas:

$$(b\cdot b)=SS0 \qquad \text{(abierta)}$$
$$\sim\exists b:(b\cdot b)=SS0 \qquad \text{(cerrada; una } \textit{oración} \text{ de TNT)}$$

La primera expresa una *propiedad* que puede ser adquirida por algunos números naturales. Ciertamente, ningún número natural está dotado de tal propiedad, y eso, precisamente, es lo expresado por la segunda. Es fundamental comprender la diferencia entre una cadena que incluye una *variable libre*, la cual expresa una *propiedad*, y una cadena donde la variable está *cuantificada*, la cual expresa *una verdad o una falsedad*. La traducción idiomática, española en este caso, de una fórmula que incluye por lo menos una variable libre —una fórmula abierta— es llamada *predicado*. Es una oración sin sujeto (o cuyo sujeto es un pronombre acontextual). Por ejemplo,

"es una oración sin sujeto"
"sería una anomalía"
"marcha simultáneamente hacia atrás y hacia adelante"
"improvisó a pedido una fuga a seis voces"

son predicados no aritméticos. Expresan *propiedades* que los entes específicos pueden poseer o no. También es posible establecer un "sujeto encubierto", como "Fulano". Una cadena con variables libres es semejante a un predicado que tenga como sujeto a "Fulano". Por ejemplo,

$$(S0+S0)=b$$

es como decir "1 más 1 es igual a Fulano". Es un predicado en la variable b; expresa una propiedad que el número b puede tener. Si uno sustituyera b por diversos numerales, obtendría una sucesión de fórmulas, la mayoría de las cuales expresaría falsedades. Sigue otro ejemplo de la diferencia existente entre fórmulas abiertas y *oraciones*:

$$\forall b{:}\forall c{:}(b+c)=(c+b)$$

Esta fórmula es una oración que representa, por supuesto, la conmutatividad de la suma. Por otro lado,

$$\forall c{:}(b+c)=(c+b)$$

es una fórmula abierta, puesto que b es libre; expresa una propiedad con la que el número no especificado b puede o no contar: la de ser conmutable con todos los números c.

Traducción de nuestras oraciones simples

¡Esto completa el vocabulario con el que formularemos todos los enunciados de teoría de los números! Hace falta una considerable práctica hasta adquirir la destreza necesaria para expresar proposiciones complicadas de N en esta notación y, en la otra dirección, para comprender el significado de las fórmulas bien formadas. Por ello, retomamos ahora las seis oraciones simples formuladas al comienzo, y nos ocuparemos de traducirlas a TNT. Cabe aclarar que no debe verse en nuestras traducciones las únicas posibles, ni mucho menos. Hay muchas maneras —infinitas— de vertir cada una de aquéllas.

Comencemos por la última: "6 es par". Puede ser reformulada así, en función de nociones más elementales: "Existe un número e, tal que 2 veces e es igual a 6". Esta enunciación es fácil:

$$\exists e{:}(SS0\cdot e)=SSSSSS0$$

Adviértase la necesidad del cuantificador; no se escribe simplemente

$$(SS0\cdot e)=SSSSSS0$$

Esta interpretación de una cadena no es, por cierto, ni verdadera ni falsa; únicamente expresa una propiedad que el número e puede tener.

Es interesante señalar que, como sabemos que la multiplicación es conmutativa, podríamos sencillamente haber optado por enunciar

$$\exists e{:}(e\cdot SS0)=SSSSSS0$$

O, como sabemos que la igualdad es una relación simétrica, podríamos haber invertido el orden de la oración:

∃e:SSSSSS0 = (SS0·e)

Ahora bien, estas tres traducciones de "6 es par" son cadenas completamente diferentes, y no es obvio, en absoluto, que la teoremidad de cada una de ellas esté ligada a la teoremidad de las restantes. (De modo similar, el hecho de que --p-q--- es un teorema tenía muy poco que ver con el hecho de que su cadena "equivalente", -p--q---, es también un teorema. La equivalencia reside en nuestro entendimiento ya que, siendo seres humanos, pensamos casi automáticamente en interpretaciones, no en las propiedades estructurales de las fórmulas.)

Podemos resolver casi de inmediato la oración 2: "2 no es un cuadrado":

~∃b:(b·b) = SS0

Sin embargo, otra vez nos encontramos con una ambigüedad. ¿Qué hubiera ocurrido si hubieramos elegido este otro enunciado?

∀b:~(b·b) = SS0

La primera forma dice, "No es el caso que exista un número b con la propiedad de que el cuadrado de b sea 2", mientras que la segunda dice, "Para todo número b, no es el caso que el cuadrado de b sea 2". Otra vez, *para nosotros*, ambas formas son conceptualmente equivalentes, pero para TNT se trata de dos cadenas distintas.

Abordamos la oración 3: "1729 es la suma de dos cubos", la cual comprenderá *dos* cuantificadores existenciales, uno después del otro, como sigue:

∃b:∃c:SSSSSS. . . . . SSSSS0 = (((b·b)·b) + ((c·c)·c))

1729 de ellos

Hay muchísimas alternativas aquí: invertir el orden de los cuantificadores; o el de los términos de la ecuación; sustituir las variables por d y e; invertir los términos de la suma; enunciar las multiplicaciones de manera diferente; etc., etc. No obstante, prefiero las dos traducciones que siguen:

∃b:∃c:(((SSSSSSSSSS0·SSSSSSSSSS0)·SSSSSSSSSS0) +
((SSSSSSSSS0·SSSSSSSSS0)·SSSSSSSSS0)) = (((b·b)·b) + ((c·c)·c))

y

∃b:∃c:(((SSSSSSSSSSSS0·SSSSSSSSSSSS0)·SSSSSSSSSSSS0) +
((S0·S0)·S0)) = (((b·b)·b) + ((c·c)·c))

¿Se advierte por qué?

Tretas en el trato

Veamos ahora la oración 4: "Ninguna suma de dos cubos positivos es un cubo". Supongamos que sólo queremos decir que 7 no es la suma de dos cubos positivos. Lo más fácil, para ello, es *negar* la fórmula que asevera que 7 *es* la suma de dos cubos positivos; será análoga a la oración anterior que involucraba a 1729, excepto que debemos agregar, a las condiciones, el requisito de que los cubos sean positivos. Podemos resolver esto mediante una treta: anteponer el símbolo S a las variables, así:

∃b:∃c:SSSSSSS0 = (((Sb · Sb) · Sb) + ((Sc · Sc) · Sc))

Como está a la vista, no elevamos al cubo b y c, sino sus subsiguientes, los cuales tienen que ser positivos pues el valor más pequeño que b o c pueden asumir es cero. Por consiguiente, la expresión ubicada a la derecha representa la suma de dos cubos positivos. Al margen, tómese nota de que la expresión "existen números b y c tales que . . ." no incluye, cuando es traducida, el símbolo '   ', representativo de 'y'. Este símbolo es usado para conectar cadenas bien formadas enteras, no para reunir dos cuantificadores.

Habiendo enunciado "7 es la suma de dos cubos positivos", deseamos negarlo. Esto sólo requiere anteponer un único tilde a todo el grupo. (Nota: *no* negaremos cada uno de los cuantificadores, por más que la expresión buscada diga "No existen números b y c tales que . . .".) Tenemos así:

~∃b:∃c:SSSSSSS0 = (((Sb · Sb) · Sb) + ((Sc · Sc) · Sc))

Ahora bien, nuestro propósito inicial era aseverar esta propiedad, no con respecto al número 7, sino con respecto a todos los cubos. En consecuencia, remplacemos el numeral SSSSSSS0 por la cadena ((a · a) ·a), la cual es traducción de "a al cubo":

~∃b:∃c:((a · a) · a) = (((Sb · Sb) · Sb) + ((Sc · Sc) · Sc))

Llegados aquí, nos encontramos en posesión de una fórmula abierta, puesto que a es aún libre. Esta fórmula expresa una propiedad que un número a puede o no tener, y nuestro propósito es aseverar que todos los números tienen tal propiedad. Esto es sencillo, basta anteponer a todo el grupo un cuantificador universal:

∀a:~∃b:∃c:((a · a) · a) = (((Sb · Sb) · Sb) + ((Sc · Sc) · Sc))

Una versión igualmente adecuada sería:

$$\sim\exists a:\exists b:\exists c:((a\cdot a)\cdot a)=(((Sb\cdot Sb)\cdot Sb)+((Sc\cdot Sc)\cdot Sc))$$

En TNT *austero*, emplearíamos a' en lugar de b, y a'' en lugar de c; entonces, la fórmula sería:

$$\sim\exists a:\exists a':\exists a'':((a\cdot a)\cdot a)=(((Sa'\cdot Sa')\cdot Sa')+((Sa''\cdot Sa'')\cdot Sa''))$$

¿Qué diremos de la oración 1, "5 es *primo*"? A esta oración la hemos reformulado así: "No existen números a y b, ambos mayores que 1, tales que 5 sea igual a a veces b". Ahora, la podemos modificar levemente, de este modo: "No existen números a y b, tales que 5 sea igual a a más 2 veces b más 2". Acá hay otra treta; puesto que a y b están restringidos a valores de números naturales, éste es un modo adecuado de decir la misma cosa. Por su parte, "b más 2" podría ser vertido como (b + SS0), pero hay un camino más corto, a saber, SSb. De la misma forma, "c más 2" puede ser enunciado SSc. Nuestra traducción será ahora extremadamente concisa:

$$\sim\exists b:\exists c:SSSSS0=(SSb\cdot SSc)$$

Sin el tilde inicial, se trataría de la aseveración de que dos números naturales *sí* existen y que, aumentados en 2, su producto es igual a 5. Con el tilde delante, toda esta enunciación es negada, de lo cual resulta la aseveración de que 5 es primo.

Si deseáramos afirmar que d más e más 1, y no 5, es un valor primo, el modo más eficaz sería remplazar el numeral correspondiente a 5 por la cadena (d + Se):

$$\sim\exists b:\exists c:(d+Se)=(SSb\cdot SSc)$$

Otra vez tenemos una fórmula abierta, cuya interpretación no es una oración ni verdadera ni falsa, sino únicamente una aseveración sobre dos números no especificados, d y e. Obsérvese que el número representado por la cadena (d + Se) es necesariamente mayor que d, pues se le ha agregado una cantidad no especificada pero incuestionablemente positiva. Luego, si aplicamos una cuantificación existencial a la variable e, tendremos una fórmula que asevere:

Existe un número que es mayor que d, y es primo.

$$\exists e:\sim\exists b:\exists c:(d+Se)=(SSb\cdot SSc)$$

Bien, ahora sólo nos falta afirmar que esa propiedad es efectivamente alcanzable, sea d lo que fuere. La forma de hacerlo es cuantificar universalmente la variable d:

$$\forall d{:}\exists e{:}\sim\exists b{:}\exists c{:}(d + Se) = (SSb \cdot SSc)$$

Esta es la traducción de la oración 5!

Traducciones problemáticas a cargo del lector

Lo anterior completa el ejercicio de traducir las seis oraciones clásicas de teoría de los números. Pero ello no hace del lector, necesariamente, un experto en notación TNT. Quedan por dominar todavía algunos temas resbalosos. Las siguientes seis fórmulas bien formadas servirán para que el lector verifique su grado de comprensión de la notación TNT. ¿Qué significan? ¿Cuáles son verdaderas (bajo interpretación, por supuesto), y cuáles falsas? (Insinuación: para resolver este ejercicio hay que moverse hacia la izquierda. Primero, traducir el átomo; luego, resolver si se agrega un cuantificador o un tilde; a continuación, avanzar hacia la izquierda, agregando otro cuantificador o tilde; después, volver a moverse hacia la izquierda, y repetir lo mismo.)

$$\sim\forall c{:}\exists b{:}(SS0 \cdot b) = c$$

$$\forall c{:}\sim\exists B{:}(SS0 \cdot b) = c$$

$$\forall c{:}\exists b{:}\sim(SS0 \cdot b) = c$$

$$\sim\exists b{:}\forall c{:}(SS0 \cdot b) = c$$

$$\exists b{:}\sim\forall c{:}(SS0 \cdot b) = c$$

$$\exists b{:}\forall c{:}\sim(SS0 \cdot b) = c$$

(Segunda insinuación: O bien cuatro son verdaderas y dos falsas, o bien cuatro son falsas y dos verdaderas.)

¿Cómo distinguir lo verdadero de lo falso?

En este punto, vale la pena detenerse a tomar aliento, y también a preguntarse qué sucedería si se contase con un sistema formal capaz de separar lo verdadero de lo falso. Tal sistema trataría a todas aquellas cadenas —que para nosotros son proposiciones— como diseños dotados de forma, no de contenido. Y funcionaría como un filtro, a través del cual pasara únicamente cierto estilo especial de diseño: el "estilo de la verdad". Si se han examinado las seis fórmulas de más arriba, y se ha distinguido entre verdadero y falso mediante la consideración de la significación, se apreciará la sutileza que cualquier sistema debería poner en juego para obtener

el mismo resultado . . . ¡pero tipográficamente! Los límites que separan el conjunto de las proposiciones verdaderas del conjunto de las proposiciones falsas (como se las *enuncia* en notación TNT) son todo lo que se quiera menos rectos; son límites llenos de curvas engañosas (recordemos la figura 18), de los cuales los matemáticos han delineado algunos trechos, aquí y allá, esforzándose durante cientos de años. ¡*Sólo* pensar qué golpe maestro sería hacerse de un método tipográfico que indicara con total *certidumbre* el lado de la frontera donde ubicar cualquier fórmula!

Las reglas para formar bien

Es útil contar con una tabla de Reglas de Formación, relativa a las fórmulas bien formadas. Más adelante se las detalla; antes, correspondería transitar algunos pasos preliminares, destinados a definir *numerales, variables* y *términos*. Estas tres clases de cadenas son ingredientes de fórmulas bien formadas, pero no están, por sí mismas, bien formadas. Las fórmulas bien formadas más pequeñas son los *átomos*, y luego vienen las normas para combinar átomos. Muchas de éstas son reglas *recursivas* de ampliación, en el sentido de que toman como entrada, o alimentación, un ítem *de una* clase determinada, y producen un ítem más extenso de la misma clase. En la tabla, usaré '*x*' e '*y*' para representar fórmulas bien formadas, y '*s*', '*t*', y '*u*' para representar otros tipos de cadenas TNT. No hace falta aclarar que ninguno de estos *cinco símbolos* es por sí mismo un símbolo de TNT.

NUMERALES

0 es un numeral.
Un numeral *precedido por* S es también un numeral.
Ejemplos: 0 S0 SS0 SSS0 SSSS0 SSSSS0

VARIABLES

a es una variable. Salvo que se adopte el encuadramiento austero, también *lo son* b, c, d y e.
Una variable seguida por un primo es asimismo una variable.
Ejemplos: a b' c'' d''' e''''

TERMINOS

Todos los numerales y variables son términos.
Un término precedido por S es también un término.
Si *s* y *t* son términos, entonces también lo son (*s* + *t*) y (*s* · *t*)
Ejemplos: 0 b SSa' (S0 · (SS0 + c)) S(Sa ·(Sb · Sc)

Los TERMINOS pueden ser divididos en dos categorías:
(1) Términos DEFINIDOS. No contienen variables.

Ejemplos: 0 $(S0 + S0)$ $SS((SS0 \cdot SS0) + (S0 \cdot S0))$
(2) Términos INDEFINIDOS. Contienen variables.
Ejemplos: b Sa $(b + S0)$ $(((S0 + S0) + S0) + e)$

Estas reglas nos indican cómo elaborar *partes* de fórmulas bien formadas; las reglas que siguen nos indican cómo elaborar fórmulas bien formadas *completas*.

ATOMOS

Si s y t son términos, entonces $s = t$ es un átomo.
Ejemplos: $S0 = 0$ $(SS0 + SS0) = SSSS0$ $S(b + c) = ((c \cdot d) \cdot e)$
Si un átomo contiene una variable u, entonces u es libre allí. Luego, en el ejemplo anterior hay cuatro variables libres.

NEGACIONES

Una fórmula bien formada, precedida por un tilde, está bien formada.
Ejemplos: $\sim S0 = 0$ $\sim\exists b:(b + b) = S0$ $\sim\langle 0 = 0 \supset S0 = 0\rangle$ $\sim b = S0$
El *estatus de cuantificación* de una variable (que nos dice si la variable es libre o cuantificada) no se modifica bajo negación.

COMBINACIONES

Si x e y son fórmulas bien formadas, y siempre que ninguna variable que sea libre en una esté cuantificada en la otra, entonces las que siguen son fórmulas bien formadas:
$\langle x \land y\rangle$, $\langle x \lor y\rangle$, $\langle x \supset y\rangle$. y .
Ejemplos: $\langle 0 = 0 \land \sim 0 = 0\rangle$ $\langle b = b \lor \sim\exists c:c = b\rangle$
$\langle S0 = 0 \supset \forall c:\sim\exists b:(b + b) = c\rangle$
El estatus de cuantificación de una variable no se modifica aquí.

CUANTIFICACIONES

Si u es una variable, y x es una fórmula bien formada donde u es libre, entonces las cadenas siguientes son fórmulas bien formadas:
$\exists u{:}x$ y $\forall u{:}x$.
Ejemplos: $\forall b:\langle b = b \lor \sim\exists c:c = b\rangle$ $\forall c:\sim\exists b:(b + b) = c$ $\sim\exists c:Sc = d$

FORMULAS ABIERTAS

Contienen por lo menos una variable libre.
Ejemplos: $\sim c = c$ $b = b$ $\langle \forall b:b = b \land \sim c = c\rangle$

FORMULAS CERRADAS (ORACIONES)

No contienen variables libres.
Ejemplos: $S0 = 0$ $\sim\forall d:d = 0$ $\exists c:\langle \forall :b = b \land \sim c = c\rangle$

Esto completa la tabla de las Reglas de Formación que rigen las fórmulas bien formadas de TNT.

Unos pocos ejercicios más de traducción

Y ahora, unos pocos ejercicios de práctica para el lector, a fin de que verifique su grado de comprensión de la notación TNT. Consisten en la traducción, a notación TNT, de las primeras cuatro oraciones N siguientes; la última debe ser vertida como fórmula abierta bien formada.

Todos los números naturales son iguales a 4.
No hay número natural que sea igual a su propio cuadrado.
Diferentes números naturales tienen diferentes subsiguientes.
Si 1 es igual a 0, entonces todo número es impar.
b es una facultad de 2.

Quizá el lector encuentre que la última es un poquito tramposa. Pero eso no es nada, en comparación con la siguiente:

b es una facultad de 10.

Extrañamente, se requiere un gran talento para trasladar esta oración a nuestra notación. Advierto al lector que lo intente sólo si está dispuesto a dedicarle muchas horas a la tarea, y si sabe bastante de teoría de los números . . .

Un sistema no tipográfico

Con esto terminamos de exponer la notación de TNT; no obstante, aún tenemos por delante la tarea de hacer, de TNT, el ambicioso sistema que nos propusimos. Si lo conseguimos, habremos justificado las interpretaciones que otorgamos a los diversos símbolos. Entre tanto, lamentablemente, dichas interpretaciones no están más justificadas que las del tipo "caballo-manzana-feliz", correspondientes a los símbolos del sistema pq.

A alguien se le podría ocurrir la siguiente forma de construir TNT: 1) Prescindir de reglas de inferencia, ya que son innecesarias, pues, 2) Tomamos como axiomas todas las proposiciones verdaderas de teoría de los números (enunciadas en notación TNT). ¡Qué sencilla receta! Pero carece de contenido, tal como nos lo dice nuestra primera reacción. La parte 2) no consiste, por cierto, en una descripción tipográfica de cadenas. El objetivo fundamental de TNT es resolver si, y cómo, es posible caracterizar tipográficamente las cadenas verdaderas.

Los cinco axiomas y las primeras reglas de TNT

Seguiremos entonces una ruta más ardua que la sugerida arriba: tendremos axiomas y reglas de inferencia. En primer lugar, acorde con lo anun-

ciado, *todas las reglas del cálculo proposicional son incorporadas al seno de TNT*. En consecuencia, el siguiente será un teorema de TNT:

$$\langle S0=0 \vee \sim S0=0 \rangle$$

Puede ser derivado en la misma forma en que se deriva $\langle P \vee \sim P \rangle$.

Antes de presentar otras reglas, vamos a enunciar los cinco *axiomas* de TNT:

AXIOMA 1: $\forall a{:}\sim Sa=0$
AXIOMA 2: $\forall a{:}(a+0)=a$
AXIOMA 3: $\forall a{:}\forall b{:}(a+Sb)=S(a+b)$
AXIOMA 4: $\forall a{:}(a\cdot 0)=0$
AXIOMA 5: $\forall a{:}\forall b{:}(a\cdot Sb)=((a\cdot b)+a)$

(En las versiones austeras, se usa a' en lugar de b.) Todos son muy fáciles de comprender. El Axioma 1 manifiesta una circunstancia especial acerca del número 0; los Axiomas 2 y 3 se relacionan con la naturaleza de la suma; los Axiomas 4 y 5, con la naturaleza de la multiplicación, y en particular con los vínculos existentes entre ésta y la suma.

Los cinco postulados de Peano

Dicho al pasar, la interpretación del Axioma 1 —"El cero no es subsiguiente a ningún número natural"— es una de las cinco célebres propiedades de los números naturales, explícitamente reconocidas por vez primera, en 1889, por el matemático y lógico Giuseppe Peano. Sus postulados siguen la línea trazada por Euclides en cuanto a lo siguiente: no pretendió formalizar los principios del razonamiento, sino que optó por elaborar un pequeño conjunto de propiedades de los números naturales, a partir de los cuales pudiera derivarse cualquier otra cosa mediante el razonamiento. El ensayo de Peano podría ser considerado, así, "semiformal". Su aporte tuvo gran influencia, por lo que sería muy adecuado mostrar sus cinco postulados. Puesto que la noción de "número natural" fue la única cuya definición abordó Peano, no utilizaremos la expresión habitual "número natural", sobrecargada de connotaciones. La sustituiremos por el término indefinido *dyin*, una palabra que llega fresca, y libre de connotaciones, a nuestro entendimiento. Los cinco postulados de Peano establecen cinco restricciones a los dyin. Hay otros dos términos indefinidos: *Genio* y *meta*. Dejaré que el lector resuelva por sí mismo qué concepto conocido se supone que representa cada uno de estos términos. Los cinco postulados de Peano:

1) El Genio es un dyin.
2) Todo dyin tiene un meta (que también es un dyin).

3) El Genio no es el meta de ningún dyin.
4) Diferentes dyin tienen diferentes meta.
5) Si el Genio tiene X, y cada dyin desplaza X a su meta, entonces todo dyin tiene X.

A la luz de las lámparas del *Pequeño Laberinto Armónico*, denominaremos al conjunto de *todos* los dyin, "DIOS". Esto nos remite a la famosa frase del matemático y lógico alemán Leopold Kronecker, enemigo jurado de Georg Cantor: "Dios hizo los números naturales; todo lo demás es obra del hombre".

Podemos reconocer en el quinto postulado de Peano el principio de la inducción matemática: otro término incluido en argumentos heredados. Peano esperaba que estas cinco restricciones a los conceptos de "Genio", "dyin" y "meta" fueran tan poderosas que, si dos personas distintas formaban imágenes de dichos conceptos en su pensamiento, ambas imágenes tuviesen *estructuras enteramente isomórficas*. Por ejemplo, la imagen de cada una de las personas incluiría una cantidad infinita de diferentes dyin. Y, presumiblemente, las dos personas estarían de acuerdo en que ningún dyin coincide con su propio meta, o con el meta de su meta, etc.

Peano confiaba en haber acotado la esencia de los números naturales a través de sus cinco postulados. Los matemáticos, por regla general, conceden que lo consiguió, pero que ello no ha disminuido la importancia de la pregunta, "¿Cómo se distingue un enunciado verdadero acerca de números naturales, de un enunciado falso?" Y para responder a la pregunta, los matemáticos se inclinaron hacia los sistemas totalmente formales, tales como TNT. Aun así, podrá observarse la influencia de Peano en TNT, ya que todos sus postulados, de una forma u otra, son incorporados a éste.

Nuevas reglas de TNT: Especificación y Generalización

Arribamos ahora a nuevas reglas de TNT. Muchas de ellas nos permitirán penetrar en la estructura interna de los átomos de TNT, y modificarla. En este sentido, manipulan propiedades más "microscópicas", correspondientes a las cadenas, que las reglas del cálculo proposicional, que tratan a los átomos como unidades indivisibles. Por ejemplo, sería magnífico extraer la cadena S0 = 0 del primer axioma. Para lograrlo, habría necesidad de una regla que nos permitiera suprimir un cuantificador universal, y al mismo tiempo modificar la estructura interna de la cadena remanente, si así se lo desea. La que sigue es una regla semejante:

REGLA DE ESPECIFICACION: Supongamos que *u* es una variable que aparece en el interior de la cadena *x*. Si la cadena ∀ *u*:*x* es un teorema, entonces también lo es *x*, y también lo es cualquier cadena construida a

partir de *x* mediante el remplazo de *u*, dondequiera que aparezca, por uno y el mismo término.
(*Restricción:* El término que remplace a *u* no debe contener ninguna variable que esté cuantificada en *x*.)

La regla de especificación permite extraer del Axioma 1 la cadena deseada. Basta una derivación de un solo paso:

∀a:∼Sa = 0	axioma 1
∼S0 = 0	especificación

Adviértase que la regla de especificación permitirá que algunas fórmulas que contienen variables libres (es decir, fórmulas abiertas) lleguen a ser teoremas. Por ejemplo, las siguientes cadenas también podrían ser derivadas del Axioma 1, por especificación:

∼Sa = 0
∼S(c + SS0) = 0

Hay otra regla, la *regla de generalización*, que nos permite reponer el cuantificador universal en los teoremas que contienen variables, y pasaron a ser libres como resultado del empleo de la especificación. Si opera sobre la última cadena enunciada, por ejemplo, la generalización daría:

∀c:∼S(c + SS0) = 0

La generalización anula la acción de la especificación, y viceversa. Por lo común, la generalización es aplicada luego que diversos pasos intermedios han transformado, de distintas maneras, la fórmula abierta. Sigue el enunciado preciso de la regla:

REGLA DE GENERALIZACION: Supongamos que *x* es un teorema donde *u*, una variable, aparece como libre. Luego, ∀*u*:*x es un teorema.*
(*Restricción:* No se permite ninguna generalización, en una fantasía, sobre cualquier variable que aparezca como libre en la premisa de la fantasía.)

La necesidad de establecer restricciones en estas dos reglas será demostrada explícitamente, poco más adelante. Digamos al pasar que esta generalización es la misma generalización que fue mencionada en el Capítulo II, cuando se hablaba de la demostración de Euclides acerca de la infinitud de los primos. Estamos ya en condiciones de ver cómo las reglas de manipulación simbólica comienzan a aproximarse al tipo de razonamiento que utilizan los matemáticos.

El cuantificador existencial

Las dos reglas anteriores nos indican cómo suprimir cuantificadores universales y cómo reponerlos; las dos reglas siguientes nos marcan cómo manejar cuantificadores existenciales.

REGLA DE INTERCAMBIO: Supongamos que *u* es una variable. Entonces, las cadenas ∀*u*: y ∼∃*u*: son intercambiables en cualquier lugar y dentro de cualquier teorema.

Por ejemplo, apliquemos esta regla al Axioma 1:

∀a:∼Sa = 0	axioma 1
∼∃a:Sa = 0	intercambio

Observemos que estas dos cadenas son traducciones perfectamente normales, en TNT, de la oración, "El cero no es subsiguiente a ningún número natural". En consecuencia, es adecuado el que puedan convertirse una en otra con toda simplicidad.

La regla que sigue es, si cabe, aun más intuitiva. Corresponde a la muy simple clase de inferencia que hacemos cuando nos dirigimos desde "2 es primo" a "Existe un primo". El nombre de esta regla es autoexplicativo:

REGLA DE EXISTENCIA: Supongamos un término (que puede contener variables, siempre que sean libres) que aparece una vez, o muchas, en un teorema. Entonces, cualquiera (o varias, o todas) de las ocurrencias del término puede ser sustituida por una variable que de otro modo no aparecería en el teorema, y el correspondiente cuantificador existencial deberá ser situado adelante.

Apliquemos la regla —como es usual— al Axioma 1:

∀a:∼Sa = 0	axioma 1
∃b:∀a:∼Sa = b	existencia

Ahora podemos tratar de derivar símbolos, con arreglo a las reglas presentadas hasta aquí, a fin de producir el teorema ∼∀b: ∃a:Sa = b.

Reglas de Igualdad y de Subsecuencia

Hemos enunciado reglas para la manipulación de cuantificadores, pero ninguna hasta ahora para los símbolos '=' y 'S'. Rectificaremos tal situación de inmediato. En lo que sigue, *r*, *s* y *t* representan *términos* arbitrarios.

REGLAS DE IGUALDAD:

SIMETRIA: Si $r = s$ es un teorema, entonces $s = r$ también lo es.

TRANSITIVIDAD: Si $r = s$ y $s = t$ son teoremas, entonces $r = t$ también lo es.

REGLAS DE SUBSECUENCIA:

ADICION DE S: Si $r = t$ es un teorema, entonces Sr = St es un teorema.

SUPRESION DE S: Si Sr = St es un teorema, entonces $r = t$ es un teorema.

Ya estamos equipados con reglas que nos pueden brindar una fantástica variedad de teoremas. Por ejemplo, las derivaciones siguientes producen teoremas que son muy fundamentales:

1) ∀a:∀b:(a + Sb) = S(a + b)	axioma 3
2) ∀b:(S0 + Sb) = S(S0 + b)	especificación (S0 por a)
3) (S0 + S0) = S(S0 + 0)	especificación (0 por b)
4) ∀a:(a + 0) = a	axioma 2
5) (S0 + 0) = S0	especificación (S0 por a)
6) S(S0 + 0) = SS0	adición de S
7) (S0 = S0) = SS0	transitividad (líneas 3, 6)

* * * * * * *

1)∀a:∀b:(a Sb) = ((a · b) + a)	axioma 5
2)∀b:(S0 · Sb) = ((S0 · b) + S0)	especificación (S0 por a)
3) (SO · S0) = ((SO · 0) + S0)	especificación (0 por b)
4)∀a:∀b:(a + Sb) = S(a + b)	axioma 3
5)∀b:((S0 · Sb) = S((S0 · 0) + b)	especificación ((S0 · 0) por a)
6) ((S0 · 0) + S0) = S((S0 · 0) + 0)	especificación (0 por b)
7)∀a:(a + 0) = a	axioma 2
8) ((SO · 0) + 0) = (SO · 0)	especificación ((S0 ·0) por a)
9)∀a:(a · 0) = 0	axioma 4
10) (S0 · 0) = 0	especificación (S0 por a)
11) ((S0 · 0) + 0) = 0	transitividad (líneas 8, 10)
12) S((S0 · 0) + 0) = S0	adición de S
13) ((S0 · 0) + S0) = S0	transitividad (líneas 6, 12)
14) (SO · S0) = S0	transitividad (líneas 3, 13)

Atajos ilegítimos

Ahora bien, aquí aparece una pregunta interesante: "¿Cómo derivar la cadena 0 = 0?" Pareciera que el camino *obvio* por seguir sería, primero, derivar la cadena ∀a:a = a, y luego emplear la especificación. Entonces,

¿qué ocurre con la siguiente "derivación" de $\forall a:a = a$ . . .?, ¿cuál es el error?, ¿cómo resolverlo?

1)	$\forall a:(a+0)=a$	axioma 2
2)	$\forall a:a=(a+0)$	simetría
3)	$\forall a:a=a$	transitividad (líneas 2, 1)

He dado este miniejercicio para puntualizar un hecho simple: que uno no debe precipitarse a manipular símbolos conocidos (como ' = '). Se deben seguir las reglas, y no el conocimiento de los significados pasivos de los símbolos. Por supuesto, este último tipo de conocimiento es inestimable para orientar el recorrido de una derivación.

Por qué son restringidas la Especificación y la Generalización

Veremos ahora por qué se han establecido restricciones necesarias en la especificación y en la generalización. Siguen dos derivaciones. En cada una de ellas, una de las restricciones ha sido infringida. Obsérvese el desastroso resultado que ello provoca:

1)	[	desplazamiento
2)	$a=0$	premisa
3)	$\forall a:a=0$	generalización (¡*Errónea*!)
4)	$Sa=0$	especificación
5)	]	recuperación
6)	$\langle a=0 \supset Sa=0\rangle$	regla fantasiosa
7)	$\forall a:\langle a=0 \supset Sa=0\rangle$	generalización
8)	$\langle 0=0 \supset S0=0\rangle$	especificación
9)	$0=0$	teorema anterior
10)	$S0=0$	separación (líneas 9, 8)

Este es el primer desastre. El otro se produce por vía de especificación incorrecta.

1)	$\forall a:a=a$	teorema anterior
2)	$Sa=Sa$	especificación
3)	$\exists b:b=Sa$	existencia
4)	$\forall a:\exists b:b=Sa$	generalización
5)	$\exists b:b=Sb$	especificación (¡*Errónea*!)

De modo que ahora podemos ver por qué son necesarias aquellas restricciones.

Lo que sigue es un problema sencillo, para que el lector lo resuelva (en

caso de que todavía no lo haya hecho): traducir a notación TNT el cuarto postulado de Peano, y luego derivar esa cadena como un teorema.

Algo nos queda fuera

Si el lector dedica un rato a experimentar con las reglas y axiomas de TNT presentados hasta el momento, descubrirá que puede producir la *familia piramidal* de teoremas que se incluye a continuación (un conjunto de cadenas, todas estampadas por el mismo molde, con la única diferencia entre sí de que los numerales 0, S0, SS0, y siguientes, se han ido ampliando):

(0 + 0) = 0
(0 + S0) = 0
(0 + SS0) = SS0
(0 + SSS0) = SSS0
(0 + SSSS0) = SSSS0
etc.

En realidad, cada uno de los teoremas de esta familia puede ser derivado del inmediatamente anterior, en tan sólo un par de líneas. Tenemos así una especie de "cascada" de teoremas, donde cada uno dispara al siguiente. (Estos teoremas recuerdan mucho los teoremas pq, en los cuales los grupos del centro y del lado derecho crecían simultáneamente.)

Ahora bien, existe una cadena que podemos enunciar con facilidad, y que sintetiza los significados pasivos de todas ellas, tomados en conjunto. Esta *cadena sintetizadora*, universalmente cuantificada, es la siguiente:

∀a:(0 + a) = a

Sin embargo, a la luz de las reglas que conocemos hasta aquí, esta cadena se resiste a ser producida. Si el lector no me cree, haga la prueba por sí mismo.

Uno puede pensar que la situación tiene solución inmediata, gracias a la siguiente

REGLA (PROPUESTA) DE TOTALIDAD: Si todas las cadenas de una familia piramidal son teoremas, entonces también lo es la cadena universalmente cuantificada que sintetiza a aquéllas.

El problema que presenta esta regla es que no puede ser empleada dentro de la vía M. Unicamente quienes piensan en el sistema pueden saber alguna vez que todas las cadenas de un conjunto infinito son teoremas. Luego, no es una regla que podamos incluir en el interior de ningún sistema formal.

De modo que nos encontramos en una curiosa situación, donde podemos producir tipográficamente teoremas acerca de la suma de números *específicos* cualesquiera, pero donde una cadena tan sencilla como la de más arriba, que expresa una propiedad de la suma *en general*, no es un teorema. Se podría decir que, con todo, no es algo tan extraño puesto que es la misma situación observada en el sistema pq. Pero el sistema pq no tenía pretensiones acerca de sus posibilidades; su simbolismo, en realidad, sólo permite verificar proposiciones generales acerca de la suma, de ningún modo *expresarlas*. No hay allí el equipamiento necesario como para ello, sencillamente, y no se nos ocurre pensar que el sistema sea defectuoso. En este otro caso, en cambio, las posibilidades expresivas son mucho más amplias, y por ende depositamos expectativas más profundas en el TNT que en el sistema pq. Si la cadena mencionada no es un teorema, entonces contaremos con una excelente razón para considerar que TNT es defectuoso. En verdad, hay una denominación para los sistemas que adolecen de esta clase de falla: se los llama *ω-incompletos* (el prefijo 'ω' —'omega'— proviene del hecho de que, en ocasiones, la totalidad de los números naturales es denotada mediante esa letra griega). Esta es la definición exacta:

> Un sistema es ω-incompleto si todas las cadenas de una familia piramidal son teoremas, pero la cadena sintetizadora universalmente cuantificada no es un teorema.

Cabe señalar que la negación de dicha cadena sintetizadora,

$$\sim\forall a:(0+a)=a$$

es también un no teorema de TNT. Esto significa que la cadena original es *indecidible dentro del sistema*. Si una u otra fueran teoremas, diríamos lo contrario. Pese a que pueda sonar como una palabra mística, no hay nada de místico en la indecibilidad referida al interior de un sistema dado. Se trata únicamente de un signo de que el sistema puede ser ampliado. Por ejemplo, el quinto postulado de Euclides era indecidible en el interior de la geometría absoluta; se lo debió agregar como postulado adicional de la geometría, lo cual dio lugar a la geometría euclidiana o, inversamente, el agregado de su negación dio lugar a la geometría no euclidiana. Ya que nos estamos remitiendo a la geometría, recordemos por qué se producían estas curiosas situaciones. La causa residía en que los cuatro postulados de la geometría absoluta, lisa y llanamente, no conseguían delimitar la significación de los términos "punto" y "línea", y se abría un margen para la existencia de *extensiones diferentes* de tales nociones. Los puntos y las líneas de la geometría euclidiana presentan

una clase de extensión de las nociones de "punto" y "línea"; los PUNTOS y las LINEAS de la geometría no euclidiana, otra. Pero el empleo de las presabidas palabras "punto" y "línea" tendió, durante dos milenios, a inducir la creencia de que estas palabras eran necesariamente monovalentes, dotadas de un solo significado.

TNT no euclidiano

Nos encontramos en este instante en una situación análoga con respecto a TNT. Hemos adoptado una notación que, en ciertos aspectos, nos perjudica. Por ejemplo, el empleo del símbolo '+' tiende a hacernos pensar que cada teorema con un signo más debe decir algo conocido y familiar y "sensato", acerca de la conocida y familiar operación a la que llamamos "suma". En consecuencia, sería moverse a contrapelo proponer la incorporación del siguiente "sexto axioma":

$$\sim\forall a:(0+a)=a$$

Su contenido no coincide con nuestras convicciones acerca de la suma; pero es una posible extensión de TNT, en cuanto a los límites de éste formulados hasta aquí. El sistema que incorpore dicho sexto axioma es un sistema *coherente*, en el sentido de que no contiene dos teoremas de las formas x y $\sim x$. Sin embargo, si yuxtaponemos este sexto axioma a la familia piramidal de teoremas mostrada más arriba, probablemente nos sintamos incomodados por una impresión de incoherencia entre la familia y el nuevo axioma. Pero esta clase de incoherencia no es tan peligrosa como la otra (la que existe allí donde x y $\sim x$ son teoremas al mismo tiempo). En rigor, no se trata de una verdadera incoherencia, porque hay un modo de interpretar los símbolos de forma que todo resulte correcto.

Incoherencia no es lo mismo que incoherencia

Esta clase de incoherencia, creada por la oposición entre, 1) una familia piramidal de teoremas que afirman conjuntamente que *todos* los números naturales cuentan con cierta propiedad, y 2) un único teorema que parece afirmar que *no todos* los números naturales llenan esa condición, recibe el nombre de *w-incoherencia*. Un sistema *w*-incoherente se parece mucho a la desagradable-al-principio-pero-aceptable-al-final geometría no euclidiana. A fin de dar forma a un modelo mental adecuado para lo que viene, sería conveniente imaginar que existe un tipo "extraordinario", insospechado, de números, a los que no llamaremos números "naturales", sino *sobrenaturales*, los cuales carecen de numerales. Así, los hechos que se les relacionan no pueden ser representados en la familia piramidal. (Es algo un poco semejante a la concepción de Aquiles acerca de DIOS, a quien consideraba como una suerte de "superdyin",

un ser superior al de cualquiera de los dyin. Pese a que el Genio rechazó por completo esta concepción, se trata de una imagen razonable para ayudarnos a concebir los números sobrenaturales.)

Esto nos indica que los axiomas y las reglas de TNT, presentados hasta aquí, no delimitan perfectamente la interpretación de sus propios símbolos. Sigue abriéndose margen para las variantes en el modelo mental que uno se forma acera de las nociones que aquéllos representan. Cada una de las diversas extensiones posibles podría aportar nuevas delimitaciones a algunas de las nociones, pero a través de formas diferentes. ¿Cuáles símbolos comenzarían a adquirir "desagradables" significados pasivos, si agregamos el "sexto postulado" formulado más arriba? ¿Se distorsionarían *todos* los símbolos, o algunos seguirían significando lo que queremos que signifiquen? Dejo al lector pensando en esto. Encontraremos preguntas similares en el Capítulo XIV, y allí trataremos *el* problema. De todos modos, no continuaremos ahora con el tema, sino que nos abocaremos a tratar de remediar la w-incompletitud de TNT.

La última regla

El problema que planteaba la "Regla de Totalidad" consistía en que requiere el conocimiento de que todas las líneas de una familia piramidal infinita son teoremas: algo excesivo para un ser finito. Supongamos, empero, que cada línea de la pirámide puede ser derivada de la anterior en una forma *modelada*. Habría entonces una *razón finita* que explicase el hecho de que todas las cadenas de la pirámide son teoremas. Así, pues, la salida está en encontrar el *modelo* que genera la cascada, y en mostrar que dicho modelo es también un teorema. Es algo análogo a probar que cada dyin transmite un mensaje a su meta, como en el juego infantil del "teléfono". La cosa que queda por mostrar es que el Genio da impulso al mensaje desencadenante: es decir, establecer que la primera línea de la pirámide es un teorema. ¡Como consecuencia, sabremos que DIOS recibirá el mensaje!

En la pirámide que estamos examinando en particular hay un modelo, el cual es capturado por las líneas 4-9 de la siguiente derivación.

1)	∀a:∀b:(aSb) = S(a + b)	axioma 3
2)	∀b:(0 + Sb) = S(0 + b)	especificación
3)	(0 + Sb) = S(0 + b)	especificación
4)	[	desplazamiento
5)	(0 + b) = b	premisa
6)	S(0 + b) = Sb	adición de S
7)	(0 + Sb) = S(0 + b)	traslado línea 3
8)	(0 + Sb) = Sb	transitividad
9)	]	recuperación

La premisa es $(0 + b) = b$; el resultado es $(0 + Sb) = Sb$.

La primera línea de la pirámide es también un teorema, lo cual se desprende directamente del Axioma 2. Todo lo que necesitamos ahora es una regla que nos permita deducir que la cadena sintetizadora de la pirámide completa es asimismo un teorema. Tal regla será una enunciación formalizada del quinto postulado de Peano.

Necesitamos para ello una breve notación. Abreviaremos una fórmula bien formada, donde la variable a es libre, mediante la siguiente notación: notación:

$$X\{a\}$$

(Puede haber otras variantes libres, pero eso no es pertinente.) Entonces, la notación $X\{Sa/a\}$ representará esa cadena, pero sustituyendo cada aparición de a por Sa. Del mismo modo, $X\{Sa/a\}$ representaría la cadena $(0 + Sa) = Sa$, y $X\{0/a\}$ representaría a $(0 + 0) = 0$. (Atención: esta notación no forma parte de TNT; responde a nuestras conveniencias para hablar *acerca* de TNT.)

Con esta nueva notación, podemos formular la última regla de TNT en forma totalmente precisa:

REGLA DE INDUCCION: Supongamos que u es una variable, y que $X\{u\}$ es una fórmula bien formada donde u aparece como libre. Si $\forall u$: $<X\{u\}\quad X\{Su/u\}$ y $X\{0/u\}$ son teoremas, entonces $\forall u{:}X\{u\}$ es también un teorema.

Esta es la forma más fiel en que nos fue posible incorporar el quinto postulado de Peano a TNT. La emplearemos ahora para mostrar que $\forall a{:}(0 + a) = a$ es, ciertamente, un teorema de TNT. Al salir de la fantasía de nuestra derivación anterior, podemos aplicar la regla fantasiosa, que nos da:

10)	$<(0 + b) = b \supset (0 + Sb) = Sb>$	regla fantasiosa
11)	$\forall b{:}<(0 + b) = b \supset (0 + Sb) = Sb>$	generalización

Este es el primero de los dos teoremas de entrada que requiere la regla de inducción. El otro requerimiento es la primera línea de la pirámide, con la cual contamos. En consecuencia, podemos aplicar la regla de inducción, a fin de deducir lo que necesitamos:

$$\forall b{:}(0 + b) = b$$

La especificación y la generalización nos permitirán transformar la variable b en a; así, $\forall a{:}(0 + a) = a$ ya no es una cadena indecidible de TNT.

Una larga derivación

Ahora, deseo presentar una derivación más extensa, en TNT, de modo que el lector pueda analizar sus sugerencias, y también porque demuestra un hecho simple, pero importante, relativo a la teoría de los números.

1)	$\forall a:\forall b:(a+Sb)=S(a+b)$	axioma 3
2)	$\forall b:(d+Sb)=S(d+b)$	especificación
3)	$(d+SSc)=S(d+Sc)$	especificación
4)	$\forall b:(Sd+Sb)=S(Sd+b)$	especificación (línea 1)
5)	$(Sd+Sc)=S(Sd+c)$	especificación
6)	$S(Sd+c)=(Sd+Sc)$	simetría
7)	[	desplazamiento
8)	$\forall d:(d+Sc)=(Sd+c)$	premisa
9)	$(d+Sc)=(Sd+c)$	especificación
10)	$S(d+Sc)=S(Sd+c)$	adición de S
11)	$(d+SSc)=S(d+Sc)$	traslado 3
12)	$(d+SSc)=S(Sd+c)$	transitividad
13)	$S(Sd+c)=(Sd+Sc)$	traslado 6
14)	$(d+SSc)=(Sd+Sc)$	transitividad
15)	$\forall d:(d+SSc)=(Sd+Sc)$	generalización
16)	]	recuperación
17)	$<\forall d:(d+Sc)=(Sd+c)\supset\forall d:(d+SSc)=(Sd+Sc)>$	regla fantasiosa
18)	$\forall c:\sim\forall d:(d+Sc)=(Sd+c)\supset\forall d:(d+SSc)=(Sd+Sc)>$	generalización

* * * * *

19)	$(d+S0)=S(d+0)$	especificación (línea 2)
20)	$\forall a:(a+0)=a$	axioma 1
21)	$(d+0)=d$	especificación
22)	$S(d+0)=Sd$	adición de S
23)	$(d+S0)=Sd$	transitividad (líneas 19, 22)
24)	$(Sd+0)=Sd$	especificación (línea 20)
25)	$Sd=(Sd+0)$	simetría
26)	$(d+S0)=(Sd+0)$	transitividad (línea 23, 25)
27)	$\forall d:(d+Sc)=(Sd+0)$	generalización

* * * * *

28)	$\forall c:\forall d:(d+Sc)=(Sd+c)$	inducción (líneas 18, 27)

[S puede desplazarse hacia atrás y hacia adelante en una suma.]

29)	$\forall b:(c + Sb) = S(c + b)$	especificación (línea 1)
30)	$(c + Sd) = S(c + d)$	especificación
31)	$\forall b:(d + Sb) = S(d + b)$	especificación (línea 1)
32)	$(d + Sc) = S(d + c)$	especificación
33)	$S(d + c) = (d + Sc)$	simetría
34)	$\forall d:(d + Sc) = (Sd + c)$	especificación (línea 28)
35)	$(d + Sc) = (Sd + c)$	especificación
36)	[	desplazamiento
37)	$\forall c:(c + d) = (d + c)$	premisa
38)	$(c + d) = (d + c)$	especificación
39)	$S(c + d) = S(d + c)$	adición de S
40)	$(c + Sd) = S(c + d)$	traslado 30
41)	$(c + Sd) = S(d + c)$	transitividad
42)	$S(d + c) = (d + Sc)$	traslado 33
43)	$(c + Sd) = (d + Sc)$	transitividad
44)	$(d + Sc) = (Sd + c)$	traslado 35
45)	$(c + Sd) = (Sd + c)$	transitividad
46)	$\forall c:(c + Sd) = (Sd + c)$	generalización
47)	]	recuperación
48)	$<\forall c:(c + d) = (d + c) \supset \forall c:(c + Sd) = (Sd + c)>$	regla fantasiosa
49)	$\forall d:<\forall c:(c + d) = (d + c) \supset \forall c:(c + Sd) = (Sd + c)>$	generalización

[Si d conmuta con todos los c, entonces también lo hace Sd.]

* * * * *

50)	$(c + 0) = c$	especificación (línea 20)
51)	$\forall a:(0 + a) = a$	teorema anterior
52)	$(0 + c) = c$	especificación
53)	$c = (0 + c)$	simetría
54)	$(c + 0) = (0 + c)$	transitividad (líneas 50, 53)
55)	$\forall c:(c + 0) = (0 + c)$	generalización

[0 conmuta con todos los c.]

* * * * *

56)	$\forall d:\forall c:(c + d) = (d + c)$	inducción (líneas 49, 55)

[En consecuencia, todos los d conmutan con todos los c.]

Tensión y resolución en TNT

El TNT ha demostrado la conmutatividad de la suma. Aun si no se sigue esta derivación en detalle, es importante advertir en ella que, como una composición musical, tiene su propio "ritmo". No es precisamente un recorrido caprichoso el que nos lleva a la deseada línea final. He incluido "momentos de respiro" para mostrar en parte la "articulación" de esta derivación. La línea 28, en particular, es un punto decisivo en la derivación, algo así como el punto medio en un tipo *AABB* de pieza musical, donde el oyente arriba a una resolución momentánea, aun cuando no lo haga en la nota tónica. Estos importantes estadios intermedios son llamados frecuentemente "lemas".

Es fácil imaginar un lector que comienza en la línea 1 de esta derivación, ignorando dónde terminará ésta, y adquiriendo una idea cada vez más completa acerca del sentido de la marcha con cada nueva línea que lee. Esto genera una tensión interior, muy análoga a la tensión que, oyendo música, causan las progresiones armónicas que nos permiten saber cuál es la tonalidad, sin resolverla. El arribo a la línea 28 confirmará la intuición del lector y le brindará un sentimiento transitorio de satisfacción, al mismo tiempo que lo alentará a continuar su avance hacia lo que él supone es el verdadero objetivo.

Ahora bien, la línea 49 tiene un efecto incrementador de la tensión, de importancia especial a causa de la sensación de "casi llegamos" que produce. Pero sería muy insatisfactorio abandonar allí la tarea. A partir de ese punto, no es costoso predecir cómo se desarrollarán las cosas. Nadie desea que se interrumpa la música en el momento preciso en que se hace evidente el modo de resolución. Uno no quiere *imaginar* el final, sino *escucharlo*. De la misma manera, también aquí es preciso seguir. La línea 55 es inevitable, y concentra el conjunto final de tensiones, resueltas por la línea 56.

Lo anterior es propio no sólo de la estructura de las derivaciones formales, sino también de las demostraciones no formales. El sentido matemático de la tensión está íntimamente relacionado con su sentido de la belleza, y es lo que hace de la matemática algo tan valioso. Adviértase, sin embargo, que el propio TNT no parece reflejar esas tensiones. En otras palabras, el TNT no formaliza las nociones de tensión y resolución, de objetivo parcial y final, de "simplicidad" e "inevitabilidad": más que una obra musical, es un libro sobre armonía y ritmo. ¿Se podrá idear un sistema tipográfico mucho más imaginativo, que sea *consciente* de las tensiones y objetivos que contienen las derivaciones?

Razonamiento formal *vs.* razonamiento no formal

Yo habría preferido mostrar cómo derivar el Teorema de Euclides (acerca de la infinitud de los primos) en los marcos de TNT, pero ello hubiese

duplicado, probablemente, la longitud del libro. Ahora bien, luego de este teorema, la dirección que naturalmente corresponde seguir es abordar la demostración de la asociatividad de la suma, la conmutatividad y la asociatividad de la multiplicación, y la distributividad de la multiplicación con respecto a la suma. Esto proporcionaría una poderosa base de acción, más tarde.

Tal como está formulado en este momento, el TNT ha llegado a su estado de "masa crítica" (quizá una extraña metáfora para aplicarla a algo denominado "TNT"). Cuenta con las mismas facultades que el sistema de los *Principia Mathematica*; ahora, podemos demostrar en TNT cualquier teorema que aparezca en un tratado corriente sobre teoría de los números. Por cierto, nadie postularía que la derivación de teoremas en TNT es el mejor procedimiento para trabajar en teoría de los números. Si alguien piensa eso es porque pertenece a la clase de personas para quienes la mejor forma de saber cuánto es 1000 x 1000 consiste en dibujar un reticulado donde se crucen 1000 líneas verticales con otras 1000 horizontales, y luego contar los cuadraditos resultantes . . . No; después de la formalización total, el único camino por seguir es hacia una forma de relajamiento del sistema formal. De otro modo, es tan enormemente improductivo que carece por completo de toda utilidad práctica. Luego, es necesario incorporar a TNT dentro de un contexto más amplio, un contexto que permita la derivación de nuevas reglas de inferencia, aptas para agilizar las derivaciones. Esto requeriría la formalización del lenguaje utilizado para expresar las reglas de inferencia: esto es, el metalenguaje. Y se podría llegar mucho más allá. Pero ninguno de estos recursos de agilización haría más *poderoso* a TNT; sencillamente, lo haría más *utilizable*. Todo lo que hemos hecho ha sido expresar en TNT cada uno de los modos de pensamiento en que confían los teóricos de los números. Incorporarlo a contextos permanentemente más amplios no ampliará el campo de los teoremas; sólo conseguirá que —con cada "versión nueva y mejorada"— el TNT actúe en forma más semejante a la teoría convencional de los números.

Los teóricos de los números abandonan el campo de juego

Supongamos que el lector no adquirió conciencia de que TNT resultará ser incompleto, sino que, por el contrario, sigue confiando en que es completo: es decir, que toda proposición verdadera expresable en notación TNT es un teorema. En ese caso, el lector puede elaborar un procedimiento de decisión para toda la teoría de los números. El método sería fácil: si se quiere saber si un enunciado N, al que llamaremos X, es verdadero o falso, lo vertimos como oración TNT, a la que llamaremos x. Ahora bien, si X es verdadero, la completitud nos dice que x es un teorema; e inversamente, si X no es verdadero, la completitud nos dice que $\sim x$ es un teorema. De modo que, o bien x o bien $\sim x$ es un teorema, puesto que, o

bien X o bien no X es verdadero. Y ahora habría que ponerse a enumerar sistemáticamente todos los teoremas de TNT, en la misma forma en que lo hicimos con el sistema MIU y con el sistema pq. Pasado cierto lapso, se llegará a x o $\sim x$; y a cualquiera con que se tropiece, que diga si X o no X es verdadero. (¿Sigue el lector la argumentación? Todo depende de que se puedan mantener separados, en el pensamiento, el sistema formal TNT y su equivalente no formal N. Se debe estar seguro de tener bien asimilado esto.) En principio, entonces, si TNT fuera completo, los teóricos de los números quedarían fuera de juego: cualquier problema correspondiente a su esfera podría ser resuelto, mediante la inversión de tiempo necesaria, gracias a métodos puramente mecánicos. Es evidente que tal cosa es imposible, lo cual, según el punto de vista, será causa de regocijo o de aflicción.

El programa de Hilbert

La última pregunta que plantearemos en este capítulo será la de si debemos tener tanta fe en la coherencia de TNT como la que depositamos en la coherencia del cálculo proposicional; y, en caso de no ser así, si es posible aumentar nuestra fe en TNT mediante la *demostración* de su coherencia. Uno podría hacer el mismo enunciado de apertura acerca de la "obviedad" de la coherencia de TNT, que el presentado por Imprudencia a propósito del cálculo proposicional, a saber: que cada regla incorpora un principio del razonamiento en el cual creemos por entero; luego, cuestionar la coherencia de TNT equivale a cuestionar nuestra propia cordura. En alguna medida, este argumento aún conserva peso, pero no tanto como antes. Hay demasiadas reglas de inferencia, y puede que algunas de ellas estén un poco "de más". Además, ¿cómo sabemos que nuestro modelo mental de determinadas entidades abstractas llamadas "números naturales" es verdaderamente una construcción coherente? Quizá nuestros propios procesos mentales, esos procesos informales que hemos intentado capturar en las reglas formales del sistema, sean incoherentes . . . No es, por cierto, lo que uno espera que ocurra, pero sí es perfectamente concebible que, en la medida en que un tema se va haciendo cada vez más complejo, nuestro pensamiento se confunda más y más: y el de los números naturales no es en absoluto un tema banal. De manera que el reclamo de Prudencia, en el sentido de que se aportase una *demostración* de coherencia, debe ser tomado con mayor seriedad en este caso. No es que creamos firmemente que TNT puede ser incoherente, pero hay en nuestro interior una *pequeña* duda; un centelleo, una partícula de duda, que una demostración contribuiría a disipar.

Pero, ¿qué medios de prueba querríamos que se utilicen? Una vez más, nos enfrentamos con la recurrente cuestión de la circularidad. Si aplicamos a una demostración *acerca* de nuestro sistema el mismo instrumental que hemos utilizado *dentro* del sistema, ¿qué habremos logrado? Si, para

convencernos de la coherencia de TNT, apelamos a un sistema de razonamiento menos poderoso que el de TNT, ¡se nos podrá acusar de incurrir en circularidad! Pensemos en la forma que se utiliza para tender una cuerda pesada entre dos barcos (al menos, según lo que leí siendo niño): primero se arroja una saeta liviana, a la que va atada una cuerda delgada, a través de la distancia que separa a las naves. Estas quedan, así, conectadas, y entonces es posible hacer pasar la cuerda más robusta. Si pudiéramos utilizar un sistema "liviano" para mostrar que un sistema "pesado" es coherente, sí habríamos logrado, verdaderamente, algo.

A primera vista, uno puede pensar que existe una cuerda delgada. Nuestro objetivo es demostrar que TNT cuenta con determinada propiedad tipográfica (coherencia): que en ningún caso aparecen simultáneamente teoremas de la forma x y $\sim x$. Esto es similar a intentar la demostración de que MU no es un teorema del sistema MIU. Ambos son enunciados acerca de las propiedades *tipográficas* de los sistemas de manipulación simbólica. La persuasión de que existe una cuerda delgada se basa en la presunción de que *los hechos relativos a la teoría de los números no serán necesarios* para demostrar que aquella propiedad tipográfica se mantiene vigente. En otras palabras, si no son utilizadas las propiedades de los enteros —salvo algunas, sumamente simples—, entonces, podremos lograr el objetivo de demostrar la coherencia de TNT, a través del empleo de medios menos poderosos que los modos internos de razonamiento de aquél.

En esto consistió la esperanza sustentada por una importante escuela de matemáticos y lógicos, dirigida por David Hilbert, durante los primeros años de este siglo. Su objetivo fue demostrar la coherencia de formalizaciones de la teoría de los números, análogas a TNT, mediante la aplicación de un conjunto muy restringido de principios de razonamiento, llamados métodos "finitísticos" de razonamiento. Esta sería la cuerda delgada. Incluyeron entre los métodos finitísticos todos los pertenecientes al razonamiento proposicional, tal como los emplea el cálculo proposicional, y también incorporaron determinados tipos de razonamiento numérico. Pero la obra de Gödel mostró que cualquier intento de tender la cuerda pesada de la coherencia de TNT, mediante la utilización de la cuerda delgada de los métodos finitísticos, está condenado a fracasar. Gödel mostró que no se puede usar una cuerda más liviana para tender la cuerda pesada a través de la brecha: no hay ninguna que sea lo suficientemente resistente. Podemos decir, menos metafóricamente: *Cualquier sistema que sea lo suficientemente vigoroso como para demostrar la coherencia de TNT es, por lo menos, tan vigoroso como el TNT mismo.* Y, así, la circularidad es inevitable.

Ofrenda Mu[1]

La Tortuga y Aquiles acaban de asistir a una conferencia sobre los orígenes del código genético, y se encuentran bebiendo té en casa del segundo.

Aquiles: Debo confesarle algo terrible, señora T.

Tortuga: ¿De qué se trata, Aquiles?

Aquiles: A pesar de que el tema de la conferencia era fascinante, me dormí una o dos veces. Así y todo, en mi estado de somnolencia conservé alguna conciencia de las palabras que se pronunciaban. Y una extraña imagen que ascendía desde mis profundidades era la de que 'A' y 'T', en lugar de ser la representación de "adenina" y "timina", representaban mi nombre y el suyo . . . y también la imagen de que las cadenas dobles de ADN contenían, en toda su extensión, copias diminutas de usted y de mí, siempre formando pares, del mismo modo en que siempre lo están la timina y la adenina. ¿No le parece una curiosa elaboración simbólica?

Tortuga: ¡Caray! ¿Quién cree en esas tonterías? Además, ¿qué se hace con 'C' y 'G'?

Aquiles: Bueno, supongo que 'C' podría representar al Sr. Cangrejo, en vez de significar "citosina". No estoy seguro con respecto a la 'G', pero sin duda se puede pensar en algo parecido. De cualquier manera, era divertido imaginar mi ADN rellenado con minúsculas copias de usted, y con copias igualmente pequeñísimas de mí mismo. ¡Piense tan sólo en la interminable regresión a que ESO nos conduce!

Tortuga: Puedo advertir que no prestó usted mucha atención a la conferencia.

Aquiles: No, se equivoca. Me esforcé por atender, salvo que me costó mucho, durante un rato, mantener apartadas fantasía y realidad. Al fin y al cabo, es un extraño ultramundo el que esos biólogos moleculares exploran.

Tortuga: ¿Qué quiere decir?

Aquiles: La biología molecular consiste en madejas de bucles que no puedo comprender en absoluto, como por ejemplo la forma en que las proteínas almacenadas, codificadas en el ADN, pueden describir un bucle hacia atrás y actuar sobre el ADN del que provienen, e inclusive destruirlo. Estos circuitos raros ensombrecen mi panorama; en cierta forma, son inquietantes.

[1] Los koans originales que se incluyen en este diálogo han sido tomados de: Paul Reps, *Zen Flesh, Zen Bones*, y de Gyomay M. Kubose, *Zen Koans.*

Tortuga: Yo los encuentro por demás atractivos.

Aquiles: Usted sí, por supuesto: forman parte de sus predilecciones. En cuanto a mí, a veces me gusta apartarme de todo este pensamiento analítico y limitarme a meditar un poco, a manera de antídoto. Ello aclara mi pensamiento, frente a ese cúmulo de circuitos confusos y de complejidades increíbles que hemos escuchado referir hace un rato.

Tortuga: ¡Qué maravilla! Jamás hubiera sospechado que se dedicaba usted a meditar.

Aquiles: ¿Nunca le dije que hago estudios de budismo zen?

Tortuga: Caramba, ¿cómo empezó eso?

Aquiles: Siempre he estado entre los que oyen del yin y el yang con enorme interés, es decir, de todo eso del misticismo oriental: el *I Ching*, los gurús, etcétera, etcétera. Así que un día me dije, "¿Por qué no el zen, también?", y ése fue el comienzo.

Tortuga: Espléndido. Entonces, quizá yo pueda ser iluminada, de una vez por todas.

Aquiles: Cualquier día. La iluminación no es el primer paso en el camino del zen; si es que se trata de un paso, ¡es el último! ¡La iluminación no es para quien apenas se inicia, como es su caso!

Tortuga: Creo que hay un mal entendido. Cuando digo "iluminación", no quiero dar a entender algo con tanto peso como la significación que le otorga el zen; tan sólo quiero decir que quizá llegue a ser iluminada acerca de qué es el zen.

Aquiles: ¡Pero, señora! ¿Por qué no lo dijo así? Bien, me encantará transmitirle lo que yo conozco acerca del tema. Quizá termine por atraerla la idea de convertirse en estudiosa del zen, igual que yo.

Tortuga: Pues . . ., nada es imposible.

Aquiles: Podría hacer sus estudios junto conmigo, bajo la dirección de mi maestro, Okanisama: el séptimo patriarca.

Tortuga: ¿Y qué cosa es eso?

Aquiles: Hay que conocer la historia del zen para saber qué significa eso.

Tortuga: ¿Me va a relatar algo de ella, entonces?

Aquiles: Seguramente. El zen es un género de budismo, fundado por un monje llamado Bodhidharma, quien se trasladó desde la India a China alrededor del siglo seis. Bodhidharma es el primer patriarca. Y el sexto de los patriarcas es Eno (no sabe qué contento estoy de saberme esto, por fin).

Tortuga: El sexto patriarca fue Zenón, ¿eh? Me resulta extraño que precisamente él se haya metido en este asunto.

Aquiles: Creo que usted está subestimando al zen. Permítame que agregue tan sólo alguna cosita más, y a lo mejor comienza a valorarlo adecuadamente. Sigo: unos quinientos años después, el zen fue llevado al Japón, donde adquirió mucho arraigo, al punto de llegar a ser una de las principales religiones del país.

Tortuga: ¿Quién es ese Okanisama, el "séptimo patriarca"?

Aquiles: Es mi maestro; sus enseñanzas provienen directamente de las que impartía el sexto patriarca. Me ha enseñado que la realidad es única, inalterable y uniforme: toda pluralidad, modificación o movimiento, no son más que ilusiones de los sentidos.

Tortuga: No cabe la menor duda, a la legua se ve que se trata de Zenón. ¿Pero cómo vino a caer en esta confusión con el zen? ¡Pobre tipo!

Aquiles: ¿Cooómo? Yo no lo diría así. Si ALGUIEN está confundido, ello es . . . Dejémoslo, es otro tema. De todos modos, no conozco la respuesta a su pregunta. Puedo referirle, en cambio, algunas de las enseñanzas de mi maestro. He aprendido que, en el zen, se persigue la iluminación, o SATORI: el estado de "carencia de deseo". En tal estado, no se piensa en las cosas del mundo: sólo se ES. También he aprendido que un discípulo del zen no debe "adherirse" a ningún objeto, pensamiento o persona: es decir, no debe creer ni depositar su confianza en nada en absoluto, ni siquiera en esta filosofía de la no adhesión.

Tortuga: Mmmm . . . AHI hay algo que me podría gustar.

Aquiles: Se me hace que acabará usted por adherirse al zen.

Tortuga: Pero dígame: si el zen rechaza la actividad intelectual, ¿qué sentido tiene planteárselo intelectualmente, estudiarlo sistemáticamente?

Aquiles: Eso me ha preocupado bastante. Pero creo que finalmente he conseguido elaborar una respuesta. Pienso que uno puede, al principio, aproximarse al zen mediante la vía que prefiera, así sea algo enteramente antitético con respecto al zen. Y cuando se produce el acercamiento, uno comienza a alejarse poco a poco de esa vía. Cuanto mayor es el alejamiento, más cerca se está del zen.

Tortuga: Oh, todo se me empieza a aclarar.

Aquiles: Mi vía preferida son esas breves, fascinantes y extrañas parábolas llamadas "Roans".

Tortuga: ¿Qué es un Koan?

Aquiles: Es un relato protagonizado por los maestros zen y sus discípulos. Unas veces tiene la forma de una adivinanza; otras, la de una fábula; y en otros casos, no se parece a nada que uno conozca.

Tortuga: Me suena muy intrigante. ¿Usted diría que leer y disfrutar koans es practicar el zen?

Aquiles: Difícilmente. Creo, sin embargo, que complacerse en la frecuentación de koans puede llevarlo a uno un millón de veces más cerca del auténtico zen que la lectura de muchos volúmenes sobre el zen, escritos en ardua jerga filosófica.

Tortuga: Me gustaría escuchar uno o dos koans.

Aquiles: Será un placer para mí narrarle alguno . . . o algunos. Quizá deba comenzar con uno de los más célebres. Hace muchos siglos hubo un maestro zen llamado Joshu, quien llegó a la edad de 119 años.

Tortuga: Simplemente un mozalbete . . .

Aquiles: Para usted, es claro. Bueno; un día, encontrándose Joshu en compañía de otro monje, en un monasterio, acertó a pasar un perro. El

monje preguntó a Joshu, "¿Un perro tiene naturaleza de Buda, o no?"

Tortuga: Vaya uno a saber qué es eso. ¿Y qué respondió Joshu?

Aquiles: 'MU'.

Tortuga: ¿'MU'? ¿Qué es 'MU'? ¿Y qué se dice del perro? ¿Y de la naturaleza de Buda? ¿Cuál es la respuesta?

Aquiles: Oh, fíjese, la respuesta de Joshu es 'MU'. Mediante ella, Joshu hizo saber al otro monje que solamente si no se formulan tales preguntas se pueden conocer las respuestas correspondientes.

Tortuga: Joshu "desformuló" la pregunta.

Aquiles: ¡Exacto!

Tortuga: Me parece que 'MU' es algo muy útil para tener a mano. Algunas veces me gustaría desformular ciertas preguntas. Creo que voy captando las sutilezas del zen. ¿No recuerda otros koans, Aquiles? Me gustaría escuchar alguno más.

Aquiles: Con todo gusto. Puedo contarle un par de ellos, que deben ser narrados conjuntamente, pero . . .

Tortuga: ¿Qué ocurre?

Aquiles: Verá; hay un problema. Pese a que ambos son koans muy difundidos, mi maestro me ha advertido que sólo uno es verdadero, y que este mismo es un engaño.

Tortuga: ¡Acabemos, por favor! ¿Por qué no me los cuenta, y luego juzgamos por nuestros propios medios?

Aquiles: De acuerdo. Uno dice así:

Un monje preguntó a Baso: "¿Qué es Buda?"
Baso contestó: "Esta respuesta es Buda".

Tortuga: Mmmm . . . ¿"Esta respuesta es Buda"? En ocasiones, se me escapa por completo qué es lo que logran descubrir estos señores.

Aquiles: Siendo así, es posible que prefiera usted el otro.

Tortuga: A ver.

Aquiles: Es así:

Un monje preguntó a Baso: "¿Qué es Buda?"
Baso contestó: "Esta respuesta no es Buda".

Tortuga: ¡Qué bueno! ¡Mi caparazón es verde y no es verde! ¡Esto me fascina!

Aquiles: Aclaremos, señora Tortuga: creo que lo suyo no era producto de su "fascinación" por los koans, precisamente.

Tortuga: Perfectamente; entonces: esto no me fascina.

Aquiles: Ahora sí. Bien, como le decía, mi maestro sostiene que sólo uno de los dos es verdadero.

Tortuga: No se me ocurre cómo es conducido a sostener eso. De todos modos, supongo que *todo* esto es pura especulación, pues no hay forma de saber si un koan es verdadero o de baratija.

Aquiles: Oh, se equivoca. Mi maestro me ha enseñado cómo se los distingue.

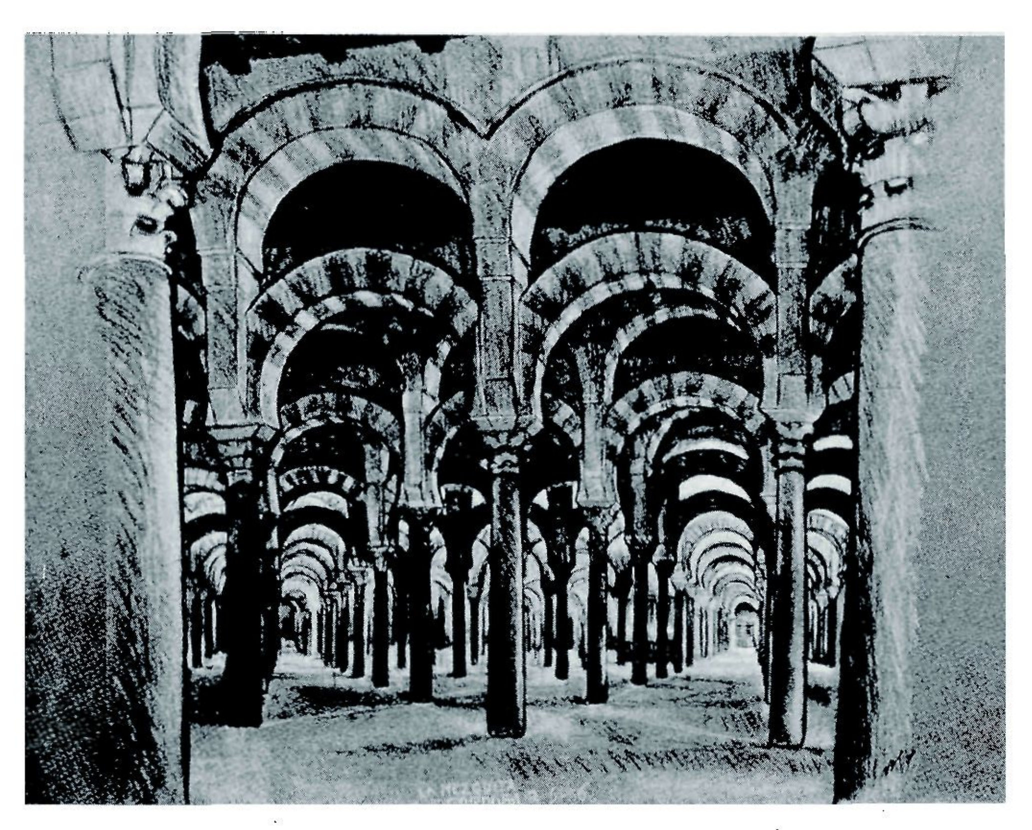


Figura 45. La Mezquita, *de M. C. Escher (tiza blanca y negra, 1936).*

Tortuga: ¿Podrá ser? ¿Un procedimiento de decisión para determinar la veracidad de los koans? Pues sí me interesa que me hable de ESO.

Aquiles: Se trata de un ritual bastante complejo, que comprende dos etapas. En la primera, se debe TRADUCIR el koan a un trozo de cordón, tridimensional, plegado de cierta manera.

Tortuga: Realmente, es un recurso curioso. ¿Y en qué consiste la segunda etapa?

Aquiles: Oh, es muy simple: todo lo que hay que hacer es determinar si el cordón tiene naturaleza de Buda, o si no la tiene . . . Si la respuesta es afirmativa, el koan es verdadero; en caso contrario, no lo es.

Tortuga: Mmmm . . . Da la impresión de que no se ha hecho sino transferir la necesidad de un procedimiento de decisión a otra esfera. El procedimiento de decisión pasó AHORA a determinar la existencia o inexistencia de la naturaleza de Buda. ¿Y luego, qué? Al fin y al cabo, ni siquiera puede usted decir si un PERRO tiene o no naturaleza de Buda, ¿cómo espera poder hacerlo con respecto a todo posible cordón plegado?

Aquiles: Bueno, me ha explicado mi maestro que el desplazamiento de un dominio a otros puede ser útil. Ello equivale a un traslado del punto

de mira. A veces las cosas parecen complicadas, vistas desde cierto ángulo, pero simples desde otro. Mi maestro me dio el ejemplo de un huerto que, observado en una determinada dirección, aparece como algo carente de todo orden, pero cuando se lo mira desde otros ángulos se hace evidente su bella regularidad. Uno reordena la misma información mediante un cambio en el modo de observar.

Tortuga: Ya veo. ¿Quizá, entonces, la veracidad de un koan se oculta muy profundamente en su propio interior, pero el traducirlo a cordón consigue, de alguna manera, que aquélla suba a la superficie?

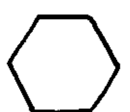
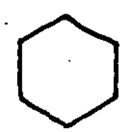
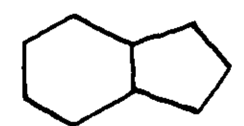
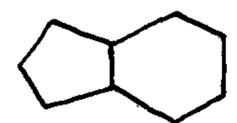
Aquiles: Eso es lo que mi maestro ha descubierto.

Tortuga: Siendo así, me agradaría muchísimo aprender esta técnica. Pero antes, dígame: ¿cómo puede usted transformar un koan (una secuencia de palabras) en un cordón plegado (un objeto tridimensional)? Se trata de clases de entidades bastante distintas.

Aquiles: Esta es una de las cosas más misteriosas que he aprendido en el zen. Hay dos pasos: "transcripción" y "traducción". TRANSCRIBIR un koan implica escribirlo en un alfabeto fonético que contiene solamente cuatro símbolos geométricos. Esta versión fonética del koan es llamada MENSAJERO.

Tortuga: ¿Cómo son los símbolos geométricos?

Aquiles: Están compuestos por hexágonos y pentágonos. Son así (*toma una servilleta de papel, y dibuja las cuatro figuras siguientes*):

Tortuga: Tienen un aspecto misterioso.

Aquiles: Sólo para el neófito. Luego de elaborado el mensajero, uno se frota las manos con un poco de ribo, y . . .

Tortuga: ¿Un poco de ribo? ¿Es alguna clase de untura ritual?

Aquiles: No precisamente. Es una preparación gomosa especial, con la cual se consigue que el cordón conserve la forma en que es plegado.

Tortuga: ¿De qué está hecho?

Aquiles: No lo sé con exactitud, pero es como un pegamento, y funciona extraordinariamente bien. Como quiera que sea, una vez que se tienen untadas las manos con ribo, es posible TRADUCIR la secuencia de símbolos del mensajero a cierto tipo de pliegues en el cordón. Fíjese qué sencillo.

Tortuga: ¡Momentito! ¡Más despacio! ¿Cómo se hace eso?

Aquiles: Se comienza con el cordón perfectamente estirado. A continuación, toma usted uno de los extremos y empieza a hacer los pliegues que correspondan, de acuerdo a los símbolos contenidos en el mensajero.

Tortuga: ¿De modo que cada uno de los símbolos es representado por un tipo de ondulación diferente en el cordón?

Aquiles: No en forma separada. Se los toma de a tres, no de a uno a la vez. Se comienza por un extremo del cordón, y por un extremo del mensajero. Lo que se debe hacer con el primer tramo del cordón es determinado por los tres primeros símbolos geométricos. Los tres símbolos siguientes le indicarán a usted cómo plegar el segundo tramo de cordón. Y de tal modo irá avanzando palmo a palmo a lo largo del cordón y, simultáneamente, a lo largo del mensajero, plegando cada uno de los pequeños segmentos de cordón hasta dar cuenta por completo del mensajero. Si usted se ha aplicado adecuadamente el ribo, el cordón conservará los pliegues, con lo que habrá obtenido la traducción del koan a un cordón.

Tortuga: El método no carece de cierto refinamiento. Se deben producir cordones de extravagante apariencia, ¿verdad?

Aquiles: Ciertamente. Los koans más extensos producen formas por demás extrañas.

Tortuga: Me lo figuro. Ahora bien, para que le sea posible traducir el mensajero a cordón, usted necesita saber qué clase de pliegue representa a cada triplete de símbolos geométricos contenidos en el mensajero. ¿Cómo se las arregla? ¿Existe un diccionario para eso?

Aquiles: Sí: hay un libro sagrado que contiene el "Código Geométrico". Si se cuenta con un ejemplar de este libro, por supuesto que es posible traducir un koan a un cordón.

Tortuga: Si usted lo dice. ¿Y cuál es el origen del Código Geométrico?

Aquiles: Proviene de un viejo maestro conocido como el "Gran Tutor", de quien mi maestro dice que es el único que pudo obtener la Iluminación 'Iluminación Suprema'.

Tortuga: ¡Pero qué lío! Como si un solo nivel de todo esto no bastara. Claro que si hay consumidores de todo género, ¿por qué no va a haber consumidores diversos de iluminación?

Aquiles: ¿Supone usted que "Iluminación 'Iluminación Suprema'", o "IIS", es una iluminación al cuadrado?

Tortuga: En mi opinión, dudo que sea eso lo que significa para usted, Lo más probable es que signifique "Meta – Iluminación", o "MI" . .

Aquiles: ¿Para usted? ¿Por qué tiene que tener un significado para usted, que ni siquiera ha alcanzado el PRIMER grado de iluminación? Deje que . . .

Tortuga: Nunca se sabe, Aquiles. Quizá quienes aprenden las verdades relativas a la iluminación retornan a lo que eran antes de ser iluminados. Siempre he sostenido que "ser iluminado dos veces equivale a la oscuridad". Pero es mejor que volvamos al Gran Torcedor . . ., oh, quiero decir, al Gran Tutor.

Aquiles: Poco es lo que se sabe de él, salvo que inventó el Arte de los Cordones Zen.

Tortuga: ¿Qué es eso?

Aquiles: Es un arte que sirve de base al procedimiento de decisión acerca de la naturaleza de Buda. Le hablaré de esto.

Tortuga: Me fascinará. ¡Tiene tanto que absorber alguien que apenas se inicia, como yo!

Aquiles: Hay inclusive un koan, del que se dice que relata los comienzos del Arte de los Cordones Zen. Lamentablemente, sin embargo, todo esto se ha perdido hace mucho en las arenas del tiempo, y sin duda se ha ido para siempre. Puede que sea mejor así, por otra parte, pues si no habría imitadores que adoptarían el nombre del maestro, e intentarían remedarlo.

Tortuga: ¿Acaso no sería una gran cosa que todos los discípulos del zen imitaran al más iluminado maestro, al Gran Tutor?

Aquiles: Permítame que le narre un koan a propósito de un imitador.

El maestro zen Gutei acostumbraba levantar un dedo cuando formulaba una pregunta acerca del zen. Un joven novicio comenzó a imitarlo. Cuando Gutei supo de este remedo, llamó al novicio y le preguntó si era verdad que así procedía. El interpelado respondió afirmativamente. Gutei le preguntó si había comprendido. En respuesta, el novicio levantó su dedo índice. Al punto, Gutei se lo cortó. El novicio abandonó la estancia, aullando de dolor. Cuando llegaba al umbral de la puerta, Gutei lo llamó, "¡Muchacho!" Entonces el novicio se volvió, y Gutei levantó su dedo índice: en ese instante, el novicio alcanzó la iluminación.

Tortuga: ¡Caramba, las cosas que sabe usted! Precisamente cuando yo estaba pensando que el zen se limitaba a Joshu y sus triquiñuelas, descubro que Gutei también se divierte. Fuera de duda, parece tener un gran sentido del humor.

Aquiles: Este koan es muy serio. No me explico de dónde saca usted la idea de que es gracioso.

Tortuga: Quizá el zen sea instructivo porque es humorístico. Sospecho que si todos estos relatos se toman en forma totalmente seria, se pierde de vista en forma igualmente total el verdadero blanco.

Aquiles: Es posible que haya algo de cierto en su tortugoso zen.

Tortuga: ¿Podría responderme a una pregunta? Querría saber lo siguiente: ¿Por qué Bodhidharma se trasladó de la India a China?

Aquiles: ¡Uh! ¿Le respondo con las palabras de Joshu, cuando le plantearon la misma pregunta?

Tortuga: Se lo ruego.

Aquiles: Contestó, "El roble en el jardín".

Tortuga: Naturalmente; es exactamente lo que yo habría contestado. Salvo que yo habría dicho eso en respuesta a una pregunta diferente; ésta: "¿Dónde puedo encontrar un poco de sombra para protegerme del sol del mediodía?"

Aquiles: Sin proponérselo, usted ha ido a parar a una de las preguntas fundamentales del zen. Esa pregunta, por más inocente que parezca, significa en realidad, "¿Cuál es el principal fundamento del zen?"

Tortuga: Qué extraordinario. No tenía ni la más remota idea de que el objetivo básico del zen era encontrar un poco de sombra.

Aquiles: Oh, no . . . usted no me entiende, en absoluto. Yo no me refería a ESA pregunta. Hablo de su inquietud acerca de por qué Bodhidharma se trasladó de la India a China.

Tortuga: Comprendo. Bueno, tampoco tenía idea de que anduviese usted en aguas tan profundas. Pero retornemos a aquella curiosa correspondencia. Acepto que cualquier koan pueda ser transformado en un cordón plegado con arreglo al método que usted esbozó. Ahora bien, ¿qué me dice acerca del proceso inverso? ¿Cualquier cordón plegado puede ser leído de forma tal que genere un koan?

Aquiles: Sí, de alguna manera. Sin embargo . . .

Tortuga: ¿Cuál es el problema?

Aquiles: Es que, precisamente, se supone que no se sigue el camino inverso. Ello violaría el Dogma Central de los Cordones Zen, representado en este diagrama (*toma una servilleta de papel, y dibuja*):

koan ⇒ mensajero ⇒ cordón plegado
transcripción *traducción*

Se entiende que no se intentará marchar en dirección contraria a la de las flechas, sobre todo a la de la segunda.

Tortuga: Dígame, ¿el Dogma tiene, o no, la naturaleza de Buda? Creo que el llegar a considerar esto desformula la pregunta, ¿estoy en lo cierto?

Aquiles: Me hace feliz que desformule usted la pregunta. No obstante, le contaré un secreto. ¿Me promete no decírselo a nadie?

Tortuga: Palabra de Tortuga.

Aquiles: Bien; de cuando en cuando, me dedico a avanzar en dirección contraria a las flechas. Sospecho que ello me proporciona el placer de lo prohibido.

Tortuga: ¡Caramba, Aquiles! ¡No se me hubiera ocurrido que pudiera usted hacer algo tan irreverente!

Aquiles: Jamás he confesado esto a nadie . . . ni siquiera a Okanisama.

Tortuga: Cuénteme, pues, ¿qué pasa cuando se marcha en dirección contraria a la de las flechas del Dogma Central? ¿Se comienza con un cordón y se produce un koan?

Aquiles: Algunas veces . . . pero pueden ocurrir cosas más misteriosas.

Tortuga: ¿Más misteriosas que producir koans?

Aquiles: Sí . . . cuando se destraduce y destranscribe, puede generar ALGO, pero no siempre un koan; algunos cordones, al ser enunciados en esta forma, sólo producen sinsentidos.

Tortuga: ¿Y no es ésa, justamente, otra denominación de los koans?

Aquiles: Evidentemente, usted no ha asumido aún el auténtico espíritu del zen.

Tortuga: ¿Siempre surgen narraciones, por lo menos?

Aquiles: No, no siempre . . . a veces surgen sílabas carentes de sentido; otras veces, oraciones no gramaticales. Pero de tiempo en tiempo surge algo que se parece a un koan.

Tortuga: ¿Se PARECE, nada más?

Aquiles: Bueno, podría ser falso, ¿se da cuenta?

Tortuga: Oh, por supuesto.

Aquiles: A los cordones que producen koans evidentes los llamo cordones "bien formados".

Tortuga: ¡Por qué no me habla del procedimiento de decisión que le permite distinguir entre koans falsos y auténticos?

Aquiles: A eso iba. Dado el koan, o no koan, como puede ser el caso, lo primero que cabe hacer es traducirlo a cordón tridimensional. Todo el esfuerzo se aboca a descubrir si el cordón tiene naturaleza de Buda, o no.

Tortuga: ¿Pero cómo consigue usted ESO?

Aquiles: Bueno, mi maestro dice que el Gran Tutor era capaz, con sólo echar un vistazo a un cordón, de afirmar si éste tenía o no naturaleza de Buda.

Tortuga: ¿Pero cómo hace quien no ha alcanzado el estado de Iluminación 'Iluminación Suprema'? ¿No hay otro medio para saber si un cordón tiene naturaleza de Buda?

Aquiles: Sí, lo hay. Aquí es donde interviene el Arte de los Cordones Zen. Se trata de una técnica que permite elaborar un número incontable de cordones, todos los cuales tienen naturaleza de Buda.

Tortuga: ¡No me diga! ¿Y hay un procedimiento correlativo para elaborar cordones que NO tengan naturaleza de Buda?

Aquiles: ¿Para qué los necesita?

Tortuga: Oh, sólo porque pienso que podrían tener alguna utilidad.

Aquiles: Sus inclinaciones son por demás extrañas. ¡Imagínese! ¡Estar más interesado en cosas que NO tengan naturaleza de Buda que en las cosas que SI la tienen!

Tortuga: Tenga en cuenta que todavía sigo estando en la desiluminación.

Aquiles: Bien; se debe comenzar tomando un cordón y haciéndole describir un rizo entre sus manos, según alguna de las cinco posiciones legítimas de partida; ésta, por ejemplo . . . (*Toma un cordón y lo hace describir un bucle sencillo, utilizando un dedo de cada mano.*)

Tortuga: ¿Cuáles son las cuatro posiciones de partida restantes?

Aquiles: Todas ellas son consideradas maneras AUTOEVIDENTES de rizar un cordón. Es frecuente que aun los novicios ricen los cordones en esas posiciones. Las cinco formas tienen naturaleza de Buda.

Tortuga: Por supuesto.

Aquiles: Vienen luego ciertas Reglas de Manipulación de Cordones, gracias a las cuales pueden elaborarse figuras más complejas. En particular, está permitido modificar el cordón efectuando determinados movimientos con las manos. Por ejemplo, se las puede cruzar así . . . y extender así . . . y entrelazar así. Cada uno de estos movimientos modifica la confi-

guración íntegra del cordón que se está sosteniendo entre las manos.

Tortuga: ¡Caramba, es idéntico a esos juegos infantiles que consisten en pasarse un cordón entre los dedos, y luego ir variando su configuración!

Aquiles: Así es. Ahora bien, si pone usted atención, verá que algunas de estas reglas generan cordones más complejos; otras, en cambio, los simplifican. Sin embargo, cualquiera sea la vía que se siga, si son respetadas las Reglas de Manipulación de Cordones, todo cordón que se produzca tendrá naturaleza de Buda.

Tortuga: En verdad, esto es maravilloso. Pero, ¿qué me dice del koan oculto en el cordón que se ha elaborado? ¿Será verdadero?

Aquiles: Pues, de acuerdo a lo que he aprendido, debe serlo. Ya que se ha procedido siguiendo las Reglas, y que se ha comenzado por una de las cinco posiciones autoevidentes, el cordón ha de contar con naturaleza de Buda y, en consecuencia, debe corresponder a un koan auténtico.

Tortuga: ¿Y usted sabe qué dice el koan?

Aquiles: ¡Me está pidiendo que viole el Dogma Central! ¡Es usted una malvada!

(Y, con el ceño fruncido y el libro del código a la vista, Aquiles recorre palmo a palmo el cordón, registrando cada pliegue mediante un triplete de símbolos geométricos hasta llenar un montón de servilletas de papel.)

¡Listo!

Tortuga: Terrorífico. Oigamos ahora.

Aquiles: De acuerdo.

Un monje peregrino preguntó a una anciana por el camino a Taizan, famoso templo del que se creía que otorgaba sabiduría a quines lo visitaran para rendir culto. La anciana respondió: "Siga adelante en línea recta". Luego que el monje se alejó unos pasos, agregó para sí misma: "Este es otro feligrés". Alguien relató la anécdota a Joshu, quien dijo: "Antes que nada, voy a investigar". Al día siguiente, se encaminó adonde la anciana y le hizo la misma pregunta; ella le proporcionó la misma respuesta. Joshu señaló: "He investido a la anciana".

Tortuga: ¡Caray, con esa sagacidad para las investigaciones, es una lástima que Joshu nunca fuera contratado por el FBI. Pero dígame: ¿Yo podría hacer lo que hizo usted, si sigo las Reglas del Arte de los Cordones Zen? ¿Qué le parece?

Aquiles: Así es.

Tortuga: ¿Y tendría que realizar las operaciones exactamente en el mismo ORDEN que usted?

Aquiles: No, en cualquier orden.

Tortuga: Por cierto que, en ese caso, obtendría un cordón diferente y, en consecuencia, un koan diferente. ¿Y tendría que dar el mismo NUMERO de pasos que usted?

Aquiles: De ninguna manera. Cualquier número de pasos.

Tortuga: Bien, entonces existe un número infinito de cordones con naturaleza de Buda, y en consecuencia un número infinito de koans verdaderos . . . Así, ¿cómo se sabe si existe algún cordón que no PUEDE ser construido mediante las Reglas?

Aquiles: Oh, de vuelta a las cosas que carecen de naturaleza de Buda. Vea, sucede que si usted sabe cómo construir cordones CON naturaleza de Buda, también sabrá cómo construir cordones SIN naturaleza de Buda. Esto es algo que mi maestro me metió bien en la cabeza desde el principio mismo.

Tortuga: ¡Magnífico! ¿Cómo se hace?

Aquiles: Es fácil. Ya no más, por ejemplo, voy a construir un cordón que carezca de naturaleza de Buda . . .

(*Toma el cordón del que había "extraído" el koan anterior, y le hace un pequeño nudo en uno de los extremos, usando el pulgar y el índice para ajustarlo fuertemente.*)

Ya está. Aquí no hay naturaleza de Buda.

Tortuga: Muy esclarecedor. ¿Basta con agregar un nudo? ¿Cómo sabe que el cordón obtenido carece de naturaleza de Buda?

Aquiles: En virtud de la siguiente propiedad fundamental de la naturaleza de Buda: cuando dos cordones bien formados son idénticos entre sí, con la única diferencia de un nudo en el extremo de uno de ambos, sólo UNO puede tener naturaleza de Buda. Es un índice práctico que me enseñó mi maestro.

Tortuga: Tengo una duda: ¿Hay cordones dotados de naturaleza de Buda que no se pueden obtener siguiendo las Reglas de los Cordones Zen, sea cual fuere el orden aplicado?

Aquiles: Me cuesta confesarlo, pero yo mismo me siento un tanto confundido a ese respecto. Al principio, mi maestro impartió la más cabal persuasión de que, en un cordón, la naturaleza de Buda era DEFINIDA mediante el empleo, como punto de partida, de una de las cinco posiciones legítimas establecidas para ello, y avanzando luego en el moldeamiento del cordón según las indicaciones de las Reglas. Un tiempo después, sin embargo, él dijo algo acerca del "Teorema" de no sé quién. No lo tengo bien claro, y hasta es posible que haya oído mal lo que dijo el maestro; de todas maneras, sus palabras sembraron un interrogante en mi ánimo, el de si TODOS los cordones generados mediante este método contarían con naturaleza de Buda. De acuerdo a lo más profundo de mis conocimientos, al menos, así es; pero la naturaleza de Buda es algo sumamente elusivo, usted sabe.

Tortuga: He acumulado tantas enseñanzas, a partir del 'MU' de Joshu. Digo yo . . .

Aquiles: ¿De qué se trata?

Tortuga: Precisamente estaba pensando en aquellos dos koans, ¿recuerda?: el koan y su no koan, que rezan, respectivamente, "Esta respuesta es Buda" y "Esta respuesta no es Buda". Lo que me pregunto es cuál será su aspecto si son convertidos en cordones, a través de la mediación del Código Geométrico.

Aquiles: Me encantará mostrárselo.

(*Escribe las transcripciones fonéticas, y luego saca de su bolsillo dos trozos de cordón, a los cuales pliega cuidadosamente, siguiendo los tripletes de símbolos del curioso alfabeto; por último, pone frente a frente los cordones terminados.*)

Ya ve, aquí está la diferencia.

Tortuga: Son realmente similares, por cierto. Oiga, creo que sólo hay una diferencia: uno de los dos tiene un nudito en un extremo . . .

Aquiles: Por Joshu que tiene usted razón.

Tortuga: ¡Ajá! Ahora comprendo las reservas de su maestro.

Aquiles: ¿Sí?

Tortuga: Aplicando su índice práctico, A LO SUMO UNO de ambos cordones puede tener naturaleza de Buda, de modo que usted sabe de inmediato que uno de los koans es un engaño.

Aquiles: Pero eso no le indica cuál es el falso. Me he dedicado, lo mismo que mi maestro, a tratar de producir estos dos cordones siguiendo las Reglas de Manipulación de Cordones, pero sin resultado. No aparece ninguno de ambos. Es muy decepcionante. Por momentos, uno comienza a preguntarse . . .

Tortuga: . . . si alguno de los dos tiene naturaleza de Buda, ¿eso quería decir? Quizá ninguno de ellos tenga naturaleza de Buda . . . ¡Y ninguno sea verdadero!

Aquiles: Nunca han llegado tan lejos mis pensamientos, pero tiene razón: sospecho que es posible que sea como usted dice. Ahora bien, creo que no deberíamos plantear tantos interrogantes acerca de la naturaleza de Buda. El maestro zen Mumon advertía siempre a sus discípulos acerca del riesgo que implica el exceso de preguntas.

Tortuga: Perfectamente, basta de preguntas. En cambio, quisiera satisfacer un anhelo, el de moldear yo un cordón. Será interesante ver si lo que obtengo está bien formado o no.

Aquiles: Estoy de acuerdo. Aquí tiene un trozo de cordón. (*Se lo extiende a la Tortuga.*)

Tortuga: Bueno, tenga en cuenta que no tengo la más remota idea de lo que se debe hacer. Seamos indulgentes con mi torpe tarea, la cual no se ajustará a regla alguna y producirá, probablemente, algo enteramente indescifrable. (*Hace que el cordón describa un bucle entre sus extremidades y, mediante unas pocas manipulaciones sencillas, elabora una compleja figura que alcanza calladamente a Aquiles. La cara de éste se ilumina de súbito.*)

Aquiles: ¡Milagro tortugoso! Tendré que probar con su mêtodo. ¡Jamás he visto un cordón así!

Tortuga: Espero que esté bien formado.

Aquiles: Tiene un nudo en la punta.

Tortuga: ¡Oh, un momento! ¿Me lo devuelve, por favor? Quiero hacer una cosa.

Aquiles: Pero cómo no; aquí tiene.

(*Entrega el cordón a la Tortuga, quien hace otro nudo en el mismo extremo y luego da un fuerte tirón: ¡ambos nudos desaparecen instantáneamente!*)

Aquiles: ¿Qué pasó?

Tortuga: Deseaba suprimir ese nudo.

Aquiles: ¡Pero en vez de deshacerlo, ató otro en el mismo extremo, y luego AMBOS desaparecieron! ¿Adónde se fueron?

Tortuga: A Tumbolia, por supuesto. Es la ley de la Doble Nodulación.

(*De repente, los dos nudos reaparecen desde la nada, es decir, desde Tumbolia.*)

Aquiles: Pasmoso. Deben estar en un nivel bastante accesible de Tumbolia para que puedan aparecer y desaparecer con tanta facilidad. ¿O es que Tumbolia es toda igualmente inaccesible?

Tortuga: No sabría decirle. Sin embargo, se me ocurre que si uno quema el cordón sería muy improbable que los nudos reaparezcan. En tal caso, se puede pensar que han quedado atrapados en un nivel más profundo de Tumbolia. Quizá haya niveles y más niveles de Tumbolia. Pero no están aquí o allá. Lo que me gustaría saber es cómo suena mi cordón, si es traducido a símbolos fonéticos. (*Cuando lo mueve para devolvérselo a Aquiles, los nudos regresan otra vez, súbitamente, al olvido.*)

Aquiles: Me siento siempre tan culpable por violar el Dogma Central . . . (*Toma su lápiz y el código, y va apuntando cuidadosamente los* numerosos tripletes de símbolos que corresponden al ondulado recorrido del cordón de la Tortuga; al terminar, aclara su voz). Ejem, ¿está pronta para escuchar lo que elaboró?

Tortuga: Si usted está dispuesto, yo estoy dispuesta.

Aquiles: Muy bien. Es así:

Un monje tenía la costumbre de fastidiar al Gran Torcedor (quien era la única persona que había alcanzado la Iluminación 'Iluminación Suprema'), interrogándolo acerca de si diversos objetos tenían o no naturaleza de Buda. El Torcedor, ante tales preguntas, guardaba invariable silencio. El monje ya lo había interrogado a propósito de un frijol, de un lago, de un claro de luna. Un día, entregó al Torcedor un trozo de cordón, y le formuló la pregunta de siempre. En respuesta, el Gran Torcedor hizo que el cordón describiera un bucle entre sus extremidades y, . . .

Tortuga: ¿Entre sus extremidades? ¡Qué curioso!
Aquiles: ¿Por qué eso le parece curioso a USTED?
Tortuga: Bueno, este . . . No, tiene usted razón. Continúe, por favor.
Aquiles: Correcto.

El Gran Torcedor hizo que el cordón describiera un bucle entre sus extremidades y, mediante unas pocas manipulaciones sencillas, elaboró una compleja figura que alcanzó calladamente al monje. En ese instante, éste alcanzó la iluminación.

Tortuga: Yo, personalmente, preferiría una iluminación por partida doble.
Aquiles: Luego vienen indicaciones para construir el cordón del Gran Torcedor, comenzando por plegarlo en torno a las extremidades. Pasaremos por encima de estos detalles aburridos. Termina así:

Desde entonces, el monje no volvió a incomodar al Torcedor. En lugar de ello, construyó un cordón tras otro siguiendo el método del Torcedor; y transmitió el método a sus discípulos, y éstos lo transmitieron a los suyos.

Tortuga: Un perfecto cuento chino. Es difícil creer que esto haya estado realmente oculto en mi cordón.
Aquiles: Sin embargo, ahí estaba. Insólitamente, se diría que elaboró usted un cordón bien formado al primer intento.
Tortuga: ¿Pero cómo era el cordón del Gran Torcedor? Creo que ése es el punto principal de este koan.
Aquiles: Lo dudo. No hay que "adherirse" a pequeños detalles como ése en materia de koans. Lo que cuenta es el espíritu del koan en su conjunto, y no las pequeñas partes que lo componen. Vea, ¿sabe de qué me acabo de dar cuenta? Pienso, por más alocado que parezca, que ha encontrado usted aquel koan perdido hace tanto tiempo, el cual describe el verdadero origen del Arte de los Cordones Zen. . . .
Tortuga: Oh, eso sería casi más que suficiente para tener naturaleza de Buda.
Aquiles: Quiere decir entonces que el gran maestro —el único que alcanzó el estadio místico de la Iluminación 'Iluminación Suprema'— se llamó "Torcedor", y no "Tutor". ¡Qué nombre tan gracioso!
Tortuga: No estoy de acuerdo. Creo que es un nombre hermoso. Sigo deseando saber cómo era el cordón del Torcedor. ¿No puede usted recrearlo a partir de la descripción que aparece en el koan?
Aquiles: Podría probar . . . Por cierto, tendré que usar también mis pies, pues los movimientos descriptos los incluyen. Esto es sumamente inusual. Pero creo que me las puedo arreglar. A ver . . . (*Toma el koan y un trozo de cordón, y durante unos minutos enrolla y retuerce el cordón siguiendo trazados ignotos, hasta que da por terminada la tarea*). Bueno, aquí está. Es raro, qué aspecto familiar tiene.
Tortuga: ¿Verdad que sí? ¿Dónde lo vi antes?

Aquiles: ¡Ya sé! ¡Caray, es SU cordón, señora T.! ¿O no?
Tortuga: Ya lo creo que no.
Aquiles: Por supuesto que no: me refiero al cordón que me entregó, y que luego yo le devolví para que usted le agregara un nudo.
Tortuga: Oh, sí. Es ése, por cierto. Fantástico. ¿Qué significa esto?
Aquiles: Lo menos que se puede decir es que se trata de algo extraño.
Tortuga: ¿Usted cree que mi koan es verdadero?
Aquiles: Permítame un momento . . .
Tortuga: ¿O que mi cordón tiene naturaleza de Buda?
Aquiles: Hay algo relativo a su cordón que está empezando a preocuparme.
Tortuga: (*visiblemente llena de satisfacción consigo misma, y sin prestar atención a Aquiles*): ¿Y qué pasa con el cordón del Torcedor? ¿Tiene naturaleza de Buda? ¡Hay una multitud de preguntas pendientes!
Aquiles: Me atemoriza plantear esas preguntas, señora T. Se está produciendo algo extraordinariamente raro, y no estoy seguro de que me agrade.
Tortuga: Lamento que diga eso. No puedo figurarme qué es lo que le preocupa.
Aquiles: Bien, lo mejor que se me ocurre para explicárselo es citar las palabras de otro antiguo maestro zen, Kyogen. Dijo:

> El zen es como un hombre que cuelga de un árbol, sobre un precipicio, sostenido solamente por sus dientes. Sus manos no consiguen aferrarse a ninguna rama, sus pies tampoco encuentran apoyo, y parada bajo el árbol, otra persona le pregunta: "¿Por qué Bodhidharma se trasladó de la India a China?" Si el hombre suspendido del árbol no contesta, decepciona al interrogador; y si contesta, cae y pierde la vida. ¿Qué debe hacer?

Tortuga: Pues está claro: debería dejar el zen, y dedicarse a la biología molecular.

CAPITULO IX

Mumon y Gödel

¿Qué es el zen?

NO ESTOY MUY SEGURO de saber qué es el zen. En un sentido, creo comprenderlo perfectamente; pero en otro, pienso que nunca podré comprenderlo por entero. Desde que, estando en el primer año del liceo, el profesor de inglés leyó el MU de Joshu en mi clase, me he debatido con aspectos zen de la vida, y es probable que no deje de hacerlo nunca. Para mí, el zen es una arena movediza intelectual: anarquía, oscuridad, sinsentido, caos. Atormenta y enfurece. Y sin embargo es jocoso, refrescante, seductor. El zen tiene su propia clase específica de significación, de lucidez y de claridad. Espero que, en este capítulo, me sea posible conseguir que el lector comparta algunas de estas apreciaciones. Así, por raro que parezca, ello nos conducirá directamente a los problemas gödelianos.

Uno de los principios básicos del budismo zen es que no hay modo de caracterizar qué es el zen. Por más extensión verbal que se dedique a abarcar al zen, éste se resiste, y permanece más allá. Podría parecer, entonces, que todos los esfuerzos por explicar el zen son irremediables pérdidas de tiempo. Pero los maestros y estudiosos del zen no piensan así. Por ejemplo, los koans zen son una parte central del estudio del zen, y son pensamiento verbal. Se considera que los koans son "disparadores"; aunque no contengan información suficiente como para, por sí mismos, infundir la iluminación, sí es posible que puedan bastar para poner en acción los mecanismos internos del entendimiento que conduzcan a la iluminación. En general, sin embargo, la postura del zen es que las palabras y la verdad son incompatibles o que, al menos, no hay palabras que puedan capturar la verdad.

El maestro zen Mumon

Con la finalidad, posiblemente, de fijar lo anterior de manera rigurosa, el monje Mumon ("Sin paso"), durante el siglo trece, recopiló cuarenta y ocho koans, acompañando a cada uno con un comentario y un breve "poema". La obra fue llamada "El paso sin paso", o bien *Mumonkan* ("Muralla sin paso"). Es interesante advertir que las existencias de Mumon y de Fibonacci coincidieron casi exactamente en el tiempo: Mumon vivió entre 1183 y 1260, en China; Fibonacci entre 1180 y 1250, en Italia.



Figura 46. Tres mundos, de M. C. Escher (litografía, 1955).

Quienes se aproximen al *Mumonkan* con la esperanza de hallar un sentido en los koans, o de "comprenderlos", pueden sufrir una gran frustración pues los comentarios y los poemas son tan faltos de transparencia como los koans que, supuestamente, deberían ser clarificados por ellos. Veamos el siguiente ejemplo:[1]

Koan:

Hogen, del monasterio de Seiryo, estaba a punto de comenzar a disertar, antes de la cena, cuando reparó en que el biombo de bambú permanecía bajado para la meditación, y no había sido vuelto a levantar. Lo hizo notar a la audiencia, de la cual surgieron dos monjes, quienes, en silencio, levantaron el biombo. Hogen, observando sus movimientos, dijo, "El estado del primer monje es bueno, no así el del segundo".

Comentario de Mumon:

Les quiero preguntar: ¿Cuál de los dos monjes ganó, y cuál perdió? Quien mire bien, advertirá dónde está el error del maestro. No obstante, no voy a hablar de ganancias y de pérdidas.

Poema de Mumon:

Al subir el biombo apareció el magno cielo,
Pero el cielo no armonizaba con el zen.
Es mejor olvidar el magno cielo
Y abandonar toda vanidad.

Tenemos esta otra muestra:[2]

Koan:

Dijo Goso: "Cuando un búfalo sale del coto y va hasta el borde del foso, sus cuernos y su cabeza y sus cascos lo atraviesan, ¿pero por qué no puede pasar también la cola?"

Comentario de Mumon:

Cualquiera que pueda observar este hecho, y decir una palabra zen, está calificado para retribuir las cuatro recompensas y, además, podrá dar protección a los seres conscientes que estén a su cargo. Pero si no puede decir esa palabra zen, deberá volverse hacia su cola.

Poema de Mumon:

Si el búfalo avanza, caerá al foso;
Si regresa, será sacrificado.
Esa pequeña cola
Es una cosa muy extraña.

[1] Paul Reps, *Zen Flesh, Zen Bones*, pp. 110-11.
[2] *Ibid.* p. 119.



Figura 47. Gota de rocío, *de M. C. Escher (media tinta, 1948).*

El lector deberá reconocer que Mumon no aclara precisamente el panorama. Se puede decir que el metalenguaje (es decir, el lenguaje de Mumon) no difiere mayor cosa con respecto al lenguaje objeto (el del koan). Según algunas opiniones, los comentarios de Mumon son deliberadamente galimáticos, quizá para hacer patente lo inútil que es perder el tiempo en parloteos acerca del zen. Sin embargo, los comentarios de Mumon presentan más de un nivel de consideración. Veamos, por ejemplo, el siguiente:[3]

Koan:

Un monje preguntó a Nansen: "¿Hay alguna enseñanza que ningún maestro enseñó nunca?"

Nansen respondió: "Sí, la hay".

"¿Cuál es?", preguntó el monje.

Dijo Nansen: "No es entendimiento, no es Buda, no es una cosa".

Comentario de Mumon:

El anciano Nansen reveló sus palabras recónditas. Seguramente estaba muy trastornado.

[3] *Ibid.*, pp. 111-12.

Poema de Mumon:

Nansen fue demasiado generoso y perdió su tesoro.
En verdad, las palabras carecen de poder.
Las montañas podrán llegar a ser el mar,
Pero las palabras no podrán abrir el entendimiento.

En este poema, Mumon da la impresión de estar hablando de algo muy capital dentro del zen, y no la de hacer afirmaciones abstrusas. Curiosamente, empero, el poema es autorreferencial, y entonces no sólo plantea

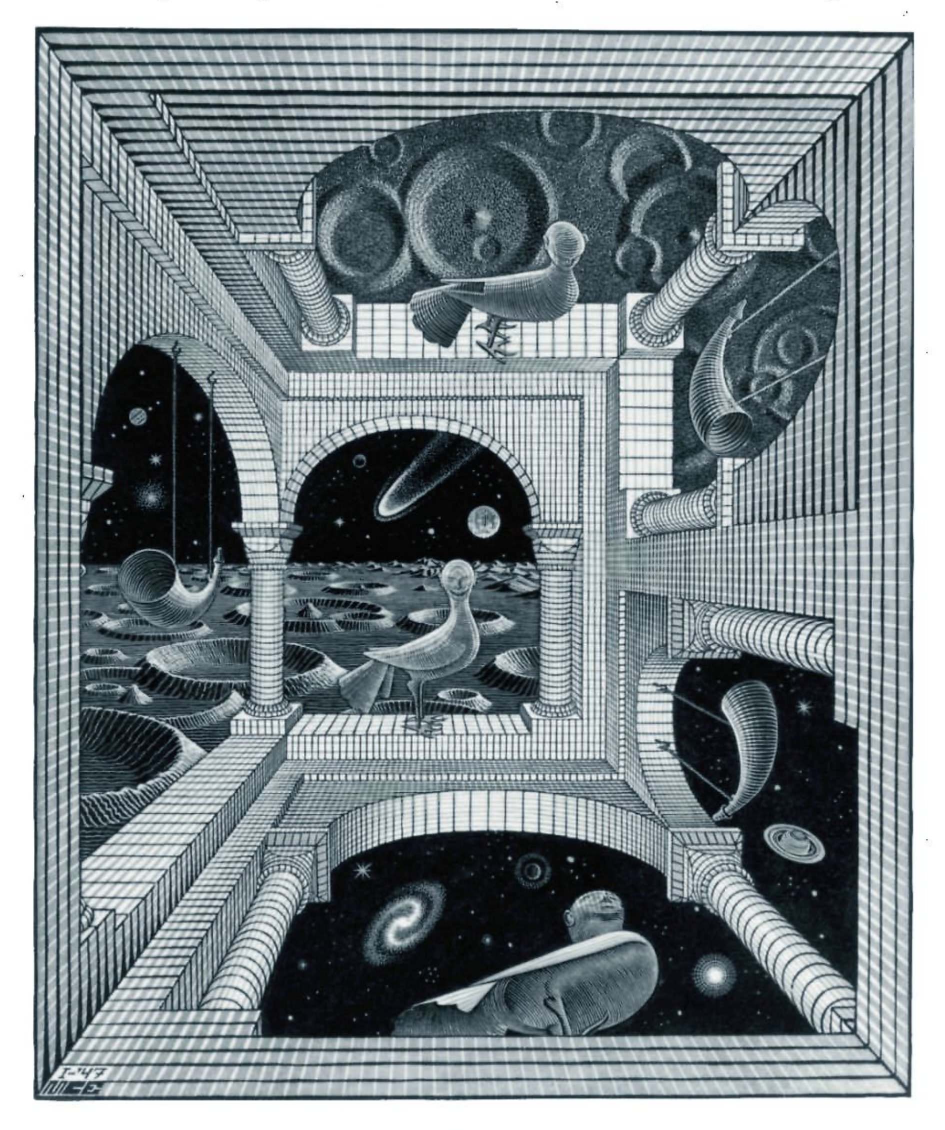


Figura 48. Otro mundo, *de M. C. Escher (grabado en madera, 1947).*

un comentario sobre las palabras de Nansen, sino también sobre su propia ineficacia. Este tipo de paradoja es sumamente característico del zen. Su propósito es "destruir la propensión lógica". También el koan muestra esta cualidad paradójica. Respecto al comentario de Mumon, ¿pensaríamos que Nansen estaba realmente tan seguro acerca de su respuesta? ¿O que la "corrección" de esa respuesta tiene alguna importancia? ¿O que la "corrección" cumple alguna función en el zen? ¿Cuál es la diferencia entre corrección y verdad, si es que la hay? ¿Y si Nansen hubiese dicho: "No, no hay tal enseñanza", su respuesta habría sido inmortalizada en un koan?

He aquí otro koan que pretende destruir la inclinación lógica:[4]

> El discípulo Doko se apersonó a un maestro zen, y le dijo: "Estoy buscando la verdad. ¿Cuál es el estado de entendimiento en el que debo perfeccionarme para encontrarla?"
> Dijo el maestro: "No hay entendimiento, de modo que no puedes ubicarte en estado alguno. No hay verdad, de modo que no puedes perfeccionarte para alcanzarla".
> "Si no hay entendimiento que perfeccionar, ni verdad por encontrar, ¿por qué tienes aquí esos monjes que se reúnen todos los días ante ti para estudiar el zen y perfeccionarse mediante ello?"
> "Pero si aquí no hay siquiera un palmo de sitio", dijo el maestro, "¿cómo podría haber una reunión de monjes?" "Y yo no tengo lengua, ¿cómo podría entonces llamarlos o impartirles enseñanzas?"
> "Oh, ¿cómo puedes mentir así?", dijo Doko.
> "Pero si no tengo lengua que me permita hablar, ¿cómo podría mentirte?", respondió el maestro.
> Entonces, Doko dijo con tristeza, "No puedo seguirte. No puedo comprenderte".
> "Yo no puedo comprenderme a mí mismo", dijo el maestro.

Si existe algún koan apto para crear perplejidad, seguramente es éste. Y lo más probable es que ése sea exactamente su propósito, pues cuando uno se encuentra en estado de perplejidad es el momento en que el pensamiento comienza a operar, en cierta medida, de manera no lógica. Unicamente si uno se aparta de la lógica, así dice la doctrina, es posible brincar hacia la iluminación. ¿Pero por qué es tan indeseable la lógica? ¿Por qué es un impedimento para brincar hacia la iluminación?

La lucha del zen contra el dualismo

Para dar una respuesta a lo anterior, es necesario saber algo acerca de qué es la iluminación. Quizá el modo más conciso de sintetizarla sea decir: consiste en trascender el dualismo. Ahora bien, ¿qué es el dualismo? El dualismo es la división conceptual del mundo en categorías. ¿Es posible trascender esta tendencia tan natural? Al acompañar la palabra "división" con la palabra "conceptual", puedo haber creado la impresión de

[4] *Zen Buddhism* (Mount Vernon, N. Y.: Peter Pauper Press, 1959), p. 22.

que se trata de un esfuerzo intelectual o consciente, y de allí, quizá, haber sugerido la idea de que el dualismo puede ser trascendido mediante la simple supresión del pensamiento (como si suprimir el pensamiento fuese algo tan simple . . .). Por el contrario, la partición del mundo en categorías se produce muy por debajo de los estratos superiores del pensamiento; en realidad, el dualismo es tanto una división *per*ceptual del mundo como una división *con*ceptual. En otra palabras, la percepción humana es, por naturaleza, un fenómeno dualista, lo cual convierte a la búsqueda de la iluminación en una lucha dificultosa, para decir lo menos.

La esencia del dualismo, según el zen, consiste en palabras: meras palabras. El empleo de palabras es intrínsecamente dualista, ya que cada palabra representa, muy obviamente, una categoría conceptual. En consecuencia, uno de los aspectos principales del zen es su pugna contra la confianza en las palabras. Para combatir el uso de palabras, uno de los mejores recursos es el koan, donde aquéllas son tan profundamente violadas que el pensamiento queda poco menos que tambaleándose, si el koan es tomado con seriedad. De manera que quizá sea erróneo decir que el enemigo de la iluminación es la lógica; antes bien, lo sería el pensamiento dualista, verbal. En realidad, el enemigo sería algo más elemental aun: la percepción. Ni bien se percibe un objeto, se traza una línea entre éste y el resto del mundo; se divide al mundo, artificialmente, en partes y, como resultado, se extravía el Camino.

El koan incluido a continuación muestra esta lucha contra las palabras:[5]

Koan:

Shuzan puso a la vista su corto cayado y dijo: "Si llamas a esto un corto cayado, te opones a su realidad. Si no lo llamas un corto cayado, ignoras los hechos. Entonces, ¿cómo tendrías que llamarlo?"

Comentario de Mumon:

Si llamas a esto un corto cayado, te opones a su realidad. Si no lo llamas un corto cayado, ignoras los hechos. No puede ser expresado con palabras y no puede ser expresado sin palabras. Entonces, di rápidamente qué es.

Poema de Mumon:

Mostrando su corto cayado,
Impartió un mandato de vida o muerte.
Lo positivo y lo negativo se entremezclan.
Ni siquiera los Budas y los patriarcas pueden evitar esta embestida.

(Los "patriarcas" son los seis venerados fundadores del budismo zen, de los cuales el primero es Bodhidharma, y Eno el sexto.)

[5] Reps, p. 124.

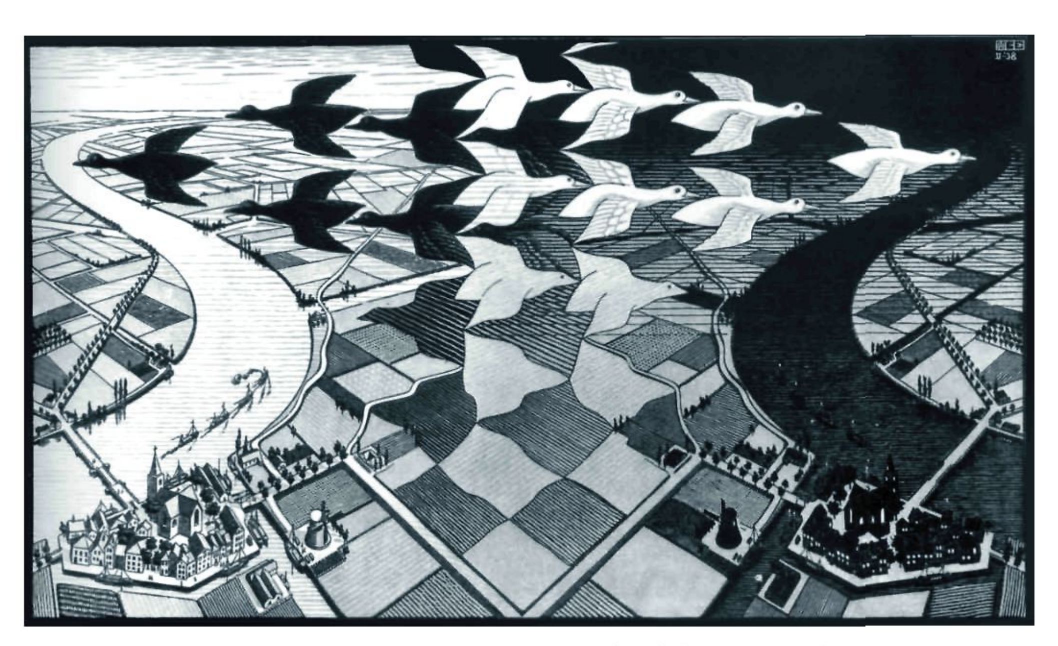


Figura 49. Día y noche, *de M. C. Escher (xilografía, 1938).*

¿Por qué llamar a un corto cayado por ese nombre es oponerse a su realidad? Probablemente, porque tal categorización crea la apariencia de capturar la realidad, cuando lo cierto es que ese enunciado no va más allá de la superficie. Podría ser comparado a la afirmación: "5 es un número primo". Es mucho más —una cantidad infinita de elementos— lo que resulta omitido actuando así. Del otro lado, no llamarlo un cayado es, por cierto, ignorar la circunstancia de que constituye un hecho particular, por minúsculo que sea. Luego, las palabras conducen a cierta verdad —cierta falsedad también, quizá— pero de ningún modo a toda la verdad. Confiarse en las palabras para alcanzar la verdad es como confiar en un sistema formal incompleto para alcanzar el mismo fin. Un sistema formal puede aportarnos ciertas verdades, pero, tal como veremos muy pronto, un sistema formal —por poderoso que sea— no puede conducirnos a todas las verdades. El dilema de los matemáticos es: ¿en qué otra cosa se puede confiar, fuera de los sistemas formales? Y el dilema de los adeptos al zen es: ¿en qué otra cosa se puede confiar, fuera de las palabras? Mumon hace una formulación muy clara del dilema: "No puede ser expresado con palabras y no puede ser expresado sin palabras".

En este punto, escuchemos de nuevo a Nansen:[6]

> Joshu preguntó al maestro Nansen, "¿Cuál es el verdadero Camino?"
> Nansen respondió, "Cada día es el verdadero Camino".

[6] Zen Buddhism, p. 38.

Joshu preguntó, "¿Puedo estudiarlo?"
Nansen respondió, "Cuanto más lo estudies, más te alejarás del Camino".
Joshu preguntó, "¿Si no lo estudio, cómo puedo conocerlo?"
Nansen respondió, "El Camino no es de las cosas que se ven, ni de las cosas que no se ven. No es de las cosas conocidas, ni de las cosas desconocidas. No lo busques, ni lo estudies, ni lo nombres. Para alcanzarlo, ábrete con la amplitud del cielo". [véase figura 50]

Se diría que esta curiosa formulación es sumamente paradójica. Recuerda un tanto a aquella infalible cura para el hipo: "Da tres vueltas a la casa sin pensar en la palabra 'lobo'". El zen es una filosofía que parece haber

Figura 50. Corteza, de M. C. Escher (grabado en madera, 1955).

adoptado la noción de que el sendero hacia la verdad última, lo mismo que la cura infalible para el hipo, puede estar erizado de paradojas.

Ismo, la No Vía y Unmon

Si hay que desechar las palabras, si hay que desechar el pensamiento, ¿a qué hay que apelar? Por supuesto, plantear esta pregunta es de por sí un horrible dualismo, pero lo que estamos haciendo no es comentar el zen desde una postura obediente del zen, de modo que podemos tratar de responder con seriedad al interrogante. Tengo un nombre para lo que persigue el zen: *ismo*. El ismo es una antifilosofía, una forma de ser sin pensar. Los maestros del ismo son las rocas, los árboles, las almejas; por el contrario, las especies animales más evolucionadas están destinadas a perseguir el ismo, sin obtenerlo nunca por completo. Así y todo, de vez en cuando se producen resplandores fugaces de ismo. Quizá el koan que sigue ofrezca un resplandor así:[7]

> Hyakujo proyectaba designar un monje para que abriese un nuevo monasterio. Anunció a sus discípulos que elegiría a quien respondiese más sagazmente una pregunta. Luego de colocar un vaso de agua sobre el piso, inquirió: "¿Quién puede decir qué es esto sin llamarlo por su nombre?"
>
> El monje principal dijo: "Nadie puede llamarlo una sandalia".
>
> Isan, el monje cocinero, volcó el vaso con su pie, y se fue.
>
> Hyakujo sonrió y dijo: "El monje principal perdió". E Isan se convirtió en el director del nuevo monasterio.

Suprimir la percepción; suprimir el pensamiento lógico, verbal, dualista: tal es la esencia del zen, la esencia del ismo. Tal es la *No vía*: ni Inteligente, ni Mecánica, sólo "No". Joshu iba por la No vía, y por eso desformuló la pregunta con su 'MU'. La No vía era algo natural, también, para el maestro zen Unmon:[8]

> Dijo un día Unmon a sus discípulos, "¡Este cayado mío se ha transformado en un dragón y se ha tragado el universo! Oh, ¿dónde están los ríos y las montañas y la magna Tierra?"

El zen es un holismo llevado a sus extremos lógicos. Si el holismo postula que las cosas sólo pueden ser comprendidas como conjuntos, no como sumas de sus partes, el zen va más allá al sostener que de ninguna manera el mundo puede ser fragmentado en partes. Dividir el mundo en partes es caer en el engaño, y ser apartado de la iluminación.

> Un monje curioso formuló esta pregunta a un maestro, "¿Cuál es el Camino?"
>
> "Está exactamente ante tus ojos", dijo el maestro.
>
> "¿Por qué no consigo verlo?"

[7] Reps, p. 121.

[8] Gyomay M. Kubose, *Zen Koans*, p. 35.

"Porque estás pensando en ti mismo".
"¿Y tú, consigues verlo?"
"En la medida en que tu visión *es doble*, diciendo 'yo no', 'tú sí', y así por el estilo, tus ojos se nublan", dijo el maestro.
"Si no hay ni 'yo' ni 'tú', ¿puede uno verlo?"
"Si no hay ni 'yo' ni 'tú', ¿quién es ese 'uno' que quiere verlo?"[9]

Evidentemente, el maestro desea transmitir la idea de que el estado de iluminación disuelve los *límites entre* el yo y el resto del universo. Ello comporta la completa liquidación del dualismo pues, como dice el koan, no queda en pie ningún sistema que tenga el deseo de percibir. Pero si ese estado no es la muerte, ¿cuál es? ¿Cómo, un ser humano vivo, puede disolver los límites entre sí mismo y el mundo exterior?

El zen y Tumbolia

El monje zen Bassui escribió una carta a uno de sus discípulos que estaba por morir; decía: "Tu final, el cual no tiene final, es como un copo de nieve disolviéndose en el aire puro". El copo de nieve, que antes fue un subsistema perfectamente discernible del universo, ahora se disuelve en el sistema más grande, que hasta entonces lo contuvo. Aunque ya no está presente bajo la forma de un subsistema sustantivo, su esencia se conserva, de alguna forma, y así permanecerá. Flota en Tumbolia, junto con los hipos que *no* están siendo hipados y con los personajes de las narraciones que no están siendo leídas . . . Así es como entiendo *yo el mensaje* de Bassui.

Así como los matemáticos han aprendido a reconocer las limitaciones de los métodos axiomáticos como métodos para alcanzar la verdad, también el zen reconoce sus limitaciones propias. Esto no significa que el zen tenga una respuesta para lo que está situado más allá del zen: cuanto más, su caso es análogo al de los matemáticos, con su clara conciencia de las formas de razonamiento válido que existen fuera de la formalización. Una de las expresiones más claras del zen acerca de sus límites aparece en el koan siguiente, muy acorde con el espíritu de Nansen:[10]

> Tozan, dirigiéndose a sus monjes, dijo: "Ustedes deben saber que hay una comprensión aún más elevada en el budisno". Un monje se adelantó, y le hizo esta pregunta: "¿Cuál es el budismo más elevado?" Tozan respondió: "No es Buda".

Siempre hay una meta ubicada más adelante; la iluminación no es el punto terminal del zen. Pero no hay receta que indique cómo trascender *el zen:* únicamente se puede estar seguro de que la vía para ello *no* es Buda. El zen es un sistema, y no puede ser su *propio* matasistema; siempre queda algo fuera del zen, que no puede ser comprendido o descripto dentro del zen.

[9] *Zen Buddhism*, p. 31.
[10] Kubose, p. 110.



Figura 51. Charco, *de M. C. Escher (xilografía, 1952).*

Escher y el zen

En su cuestionamiento de la percepción, y en su hábito de plantear absurdos enigmas sin respuesta, el zen cuenta con la compañía de M. C. Escher. Observemos *Día y noche* (figura 49), una obra maestra de "lo positivo y lo negativo entremezclados" (en palabras de Mumon). Es posible preguntarse, "¿en realidad, se trata de pájaros o de campos parcelados?, ¿es de noche o de día?" Sin embargo, sabemos perfectamente que estas preguntas no vienen muy al caso; la obra, igual que un koan zen, trata de fisurar la propensión lógica. Escher se complace también en producir imágenes contradictorias, como en *Otro Mundo* (figura 48): imágenes que juegan con la realidad y la irrealidad de un modo semejante a como lo hace el zen. ¿Escher ha de ser tomado con seriedad? ¿El zen ha de ser tomado con seriedad?

En *Gota de rocío* (figura 47) hay un delicado análisis de reflejos visuales, parecido al que elaboran los haikai. Por su parte, *Charca* (figura

51) y *Superficie Ondulada* (figura 52) presentan sosegadas imágenes de la luna reflejándose en aguas quietas. El reflejo lunar es un tema reiterado en diversos koans; en el siguiente, por ejemplo:[11]

> Chiyono había estudiado el zen durante muchos años, bajo la dirección del maestro Bukko, de Engaku. Sin embargo, no conseguía practicar satisfactoriamente la meditación. Una noche de luna, traía agua en un viejo cubo de madera ceñido con tallos de bambú, cuando éstos se cortaron, y el fondo del cubo se desprendió. En ese instante, ella quedó liberada, y dijo: "Ya no hay agua en el cubo, ya no hay luna en el agua".

Tres Mundos: es una litografía de Escher (figura 46), y también el tema de un koan zen:[12]

> Un monje preguntó a Ganto, "Si me amenazan los tres mundos, ¿qué debo hacer?" Ganto respondió, "Siéntate". "No comprendo", dijo el monje. Ganto respondió, "Levanta la montaña y tráemela. Luego te contestaré".

La hemiolia y Escher

En *Verbum* (figura 149), hay una elaboración de oposiciones dentro de unidades ubicadas en diversos niveles. Mirando circularmente, vemos allí un tránsito gradual: de pájaros negros, a pájaros blancos, a peces negros, a peces blancos, a ranas negras, a ranas blancas, a pájaros negros . . . ¡Luego de seis pasos, volvemos al comienzo! ¿Es una forma de reconciliar la dicotomía entre negro y blanco? ¿O la tricotomía entre pájaros, peces y ranas? ¿O es una unidad séxtuple compuesta a partir de la oposición entre el carácter par de 2 y el impar de 3? En música, seis notas de igual valor temporal crean una ambigüedad rítmica: ¿se trata de 2 grupos de 3, o de 3 grupos de 2? Esta ambigüedad tiene un nombre: *hemiolia*. Chopin manejó magistralmente la hemiolia, como lo muestran su Vals op. 42 o su Estudio op. 25, número 2. En Bach, se puede observar lo mismo en el *Tempo di Menuetto*, de la Partita para teclado número 5, o en el increíble *Finale* de la primera Sonata para solo de violín, en Sol menor.

Cuando uno se desliza hacia el centro de *Verbum*, las distinciones se van borrando paulatinamente hasta que, por fin, no permanecen ni tres, ni dos, sino una única esencia: "VERBUM", fulgurante . . . símbolo, quizá, de la iluminación. Ahora bien, suena paradójico el hecho de que "verbum" no sólo *es* una palabra, sino que *significa* "palabra", lo cual no configura, precisamente, una noción compatible con el zen. Por otro lado, sin embargo, "verbum" es la única palabra del cuadro; y el maestro zen Tozan dijo, en una ocasión: "Todo el Tripitaka puede ser expresado mediante un solo signo." ("Tripitaka", cuyo significado es "tres cestos", designa al conjunto completo de los escritos budistas originarios.) ¿Qué clase de mecanismo decodificador —yo me pregunto— será el que extrac-

[11] *Ibid*, p. 120.
[12] *Ibid*, p. 180.



Figura 52. **Superficie ondeada,** *de M. C. Escher (grabado en lino, 1950).*

te los tres cestos en un solo signo? Posiblemente, un mecanismo dotado de dos hemisferios.

La red de Indra

Por último, veamos *Tres Esferas II* (figura 53), donde cada parte del mundo parece contener a las otras partes, y estar contenida en ellas: la superficie del escritorio donde reposan produce un reflejo de las esferas, las esferas se reflejan entre sí, y además reflejan el escritorio, el acto de dibujar que las construye, y al artista que las está dibujando. Esta vinculación sin fin de todas las cosas entre sí no está más que insinuada aquí, pero es una insinuación suficiente. La alegoría budista de "La red de Indra" habla de una trama interminable de hilos que recorren el universo: los horizontales atraviesan el espacio; los verticales, el tiempo. Cada intersección de los hilos es un individuo, y cada individuo es una bolita de cristal; cada bolita, a su vez, refleja la imagen de todas las demás . . . y también todos los reflejos de todos los reflejos del universo.

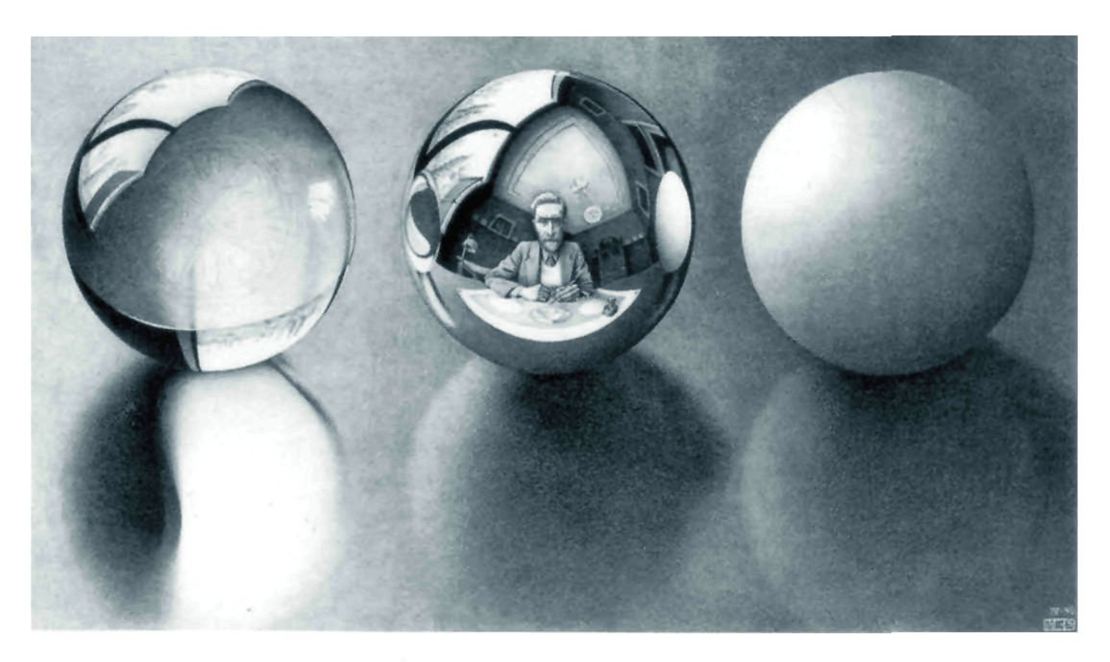


Figura 53. Tres esferas II, *de M. C. Escher (litografía, 1946).*

A mi entender, esto produce un símil de las partículas renormalizadas: en cada electrón hay, de modo virtual, fotones, positrones, neutrinos, muones . . .; en cada fotón hay, también de modo virtual, electrones, protones, neutrones, piones, . . .; en cada pion hay, . . .

Y entonces surge otro símil: el de las personas, cada una de ellas reflejada en el pensamiento de muchas otras, quienes a su vez son reflejadas por otras más, y así sucesivamente.

La imagen de estas dos situaciones podría ser representada en forma sintética y precisa mediante las Redes de Transición Aumentada. En el caso de las partículas, habría una red para cada categoría de partículas; en el caso de las personas, una para cada individuo. Cada red contendría apelaciones a muchas otras, generando así un enjambre virtual de redes RTA alrededor de cada RTA. Una apelación produciría otras apelaciones, desencadenando un proceso que, antes de agotarse, puede alcanzar una amplitud difícil de acotar.

Mumon, MU

Concluiremos esta breve visita a los territorios del zen con otra cita de Mumon. He aquí su comentario del MU de Joshu:[13]

[13] Reps, pp. 89 90.

Para comprender el zen es necesario atravesar la barrera de los patriarcas. La iluminación siempre sobreviene después de haber sido bloqueado el camino del pensamiento. Si no se atraviesa la barrera de los patriarcas, o si el camino del pensamiento no ha sido bloqueado, cualquier cosa que se haga o que se piense no será más que la imagen de la confusión. Uno puede preguntar: "¿Cuál es la barrera de los patriarcas?" Es una palabra: 'MU'.

Esta es la barrera del zen. Quien la atraviese, se encontrará cara a cara con Joshu. Y entonces podrá actuar en consonancia con todos los patriarcas, sin excepción. ¿No es una meta placentera? Quien desee atravesar esa barrera, deberá penetrar cada hueso de su cuerpo y cada poro de su piel con la pregunta: "¿Qué es 'MU'?", y llevarla sobre sí día y noche. No debe creer que se trata del símbolo negativo usual que significa "nada". No es la nada, lo opuesto de la existencia. Quien quiera, realmente, atravesar esa barrera, se deberá sentir como si estuviese bebiendo hierro caliente, sin poder ni tragarlo ni escupirlo.

Después, el conocimiento inferior de antes desaparece. Semejante a un fruto que llega a su sazón, la subjetividad y la objetividad, de manera natural, se hacen una. Y, como una persona muda que ha tenido un sueño, lo comprende, pero no puede relatarlo. Cuando alguien ingresa a tal condición, la corteza de su yo queda triturada, y puede hacer estremecer los cielos y conmover la tierra.

Es igual a un guerrero imbatible armado con una espada filosa. Si un Buda se interpone en su camino, lo cercenará; si un patriarca lo obstaculiza, lo matará; y será libre en su forma de nacer y de morir. Puede penetrar en cualquier mundo, como si se tratase del patio de su casa. Les diré cómo obtener esto a través del siguiente koan:

Basta con concentrar toda la energía en este MU, y no permitir ninguna interrupción. Cuando se entra en este MU y no hay interrupciones, tal logro será como una candela encendida que ilumina todo el universo.

De Mumon al acertijo MU

Desde la etéreas alturas del MU de Joshu, descendemos ahora a la prosaica terrenalidad del MU de Hofstadter . . . Sé que el lector ya concentró toda su energía en este MU (cuando leyó el Capítulo I). Por eso, deseo contestar ahora la pregunta planteada allí:

¿El MU tiene naturaleza de teorema, o no?

La respuesta no es un evasivo MU; por el contrario, consiste en un rotundo NO. Para mostrar por qué, nos serviremos del dualista pensamiento lógico.

Hicimos dos observaciones fundamentales en el Capítulo I:

1) el acertijo MU tiene profundidad, lo cual resulta sobre todo del hecho de que interrelaciona reglas de ampliación y de reducción;
2) *sin embargo*, existe la esperanza de allanar el obstáculo mediante el empleo de un instrumental que, en cierto sentido, sea lo adecuadamente profundo como para entenderse con problemas de esa complejidad: la teoría de los números.

Nuestro análisis del acertijo MU en el Capítulo I no atendió a las precisiones anteriores con puntillosidad, cosa que sí será hecha ahora. Y así veremos de qué manera la segunda observación (cuando es generalizada, más allá del no significativo sistema MIU) es una de las más provechosas adquisiciones de toda la matemática, y en qué medida modificó la perspectiva de los matemáticos con respecto a su propia disciplina.

Para facilitar las referencias, incluyo a continuación un resumen del sistema MIU:

SIMBOLOS: M, I, U

AXIOMA: MI

REGLAS:

I. Si *x*I es un teorema, también lo será *x*IU.
II. Si M*x* es un teorema, también lo será M*xx*.
III. En cualquier teorema, III puede ser remplazado por U.
IV. UU puede ser suprimido en cualquier teorema.

Mumon nos indica cómo resolver el acertijo MU

De acuerdo con las observaciones de más arriba, entonces, el acertijo MU no es más que un acertijo, bajo disfraz tipográfico, referido a números naturales. Para estar en condiciones de resolverlo, bastaría con poder transferirlo al dominio de la teoría de los números. Consideremos las palabras de Mumon, "Quien mire bien, advertirá dónde está el error del maestro." ¿Y por qué será importante mirar bien?

Si se cuenta el número de veces que I aparece en los distintos teoremas, pronto se advertirá que, por lo visto, ese número nunca es 0. En otras palabras, se diría que por más reducciones y ampliaciones que intervengan, no es posible proceder de forma tal que la I quede eliminada. Llamemos *valor I* al número de veces en que aparece I en cada cadena; así, el valor I del axioma MI es 1. Podemos hacer algo más que mostrar que el valor I no puede ser 0: podemos mostrar que el valor I no puede ser nunca un múltiplo de 3.

Para comenzar, tómese nota de que las reglas I y IV no afectan en absoluto al valor I. En consecuencia, sólo necesitamos pensar en las reglas II y III. En lo que se refiere a la regla III, ésta hace decrecer el valor I exactamente en 3. Luego de una utilización de esta regla, es concebible que el valor I del resultado, o salida, pueda ser un múltiplo de 3: pero únicamente en el caso de que también lo fuera el valor I de la *entrada*. En síntesis, la Regla III no puede crear un múltiplo de 3 desde la nada;

puede hacerlo sólo si ha comenzado con un múltiplo de esa clase. Lo mismo vale para la regla II, la cual duplica el valor I. Ello es así porque si 3 divide a $2n$, entonces —puesto que 3 no divide a 2— debe dividir a n (un hecho sencillo dentro de la teoría de los número). Ni la regla II ni la regla regla III pueden producir un múltiplo de 3 desde la nada.

¡Y ésta es la clave del acertijo MU! He aquí lo que sabemos:

1) El valor I comienza en 1 (no en un múltiplo de 3);
2) Dos de las reglas no afectan en absoluto al valor I;
3) Las dos reglas restantes, las cuales sí lo afectan, lo hacen fuera de toda posibilidad de producir un múltiplo de 3, salvo que otro múltiplo de esta clase haya sido previamente dado.

La conclusión —conclusión ajustada a antecedentes tradicionales, sin duda— es que el valor I jamás puede llegar a ser un múltiplo de 3. Específicamente, el valor I nunca puede ser 0. Luego, MU *no es un teorema del sistema MIU*.

Conviene reparar en que, aun tomado como un acertijo centrado en el valor I, este problema seguía bajo el acoso del fuego cruzado de las reglas de ampliación y de reducción. El objetivo había pasado a ser el cero; el valor I podía aumentar (regla II), o decrecer (regla III). Hasta que no analizamos la situación, podíamos haber pensado que moviéndonos debidamente hacia atrás y hacia adelante, mediante la aplicación alternada de las reglas, terminaríamos por alcanzar el 0. Ahora, gracias a una sencilla argumentación aportada por la teoría de los números, sabemos que ello es imposible.

Numeración Gödel del sistema MIU

No todos los problemas del tipo simbolizado por el acertijo MU son tan fáciles de resolver como este último. Pero hemos visto que por lo menos uno de ellos puede ser incorporado a la teoría de los números y resuelto allí. Ahora, vamos a ver que existe un modo de incorporar a la teoría de los números *todos* los problemas vinculados a *cualquier* sistema formal. Ello es posible en virtud del hallazgo, debido a Gödel, de una clase especial de isomorfismo. Utilizaremos el sistema MIU para ilustrar esto.

Vamos a comenzar considerando la notación del sistema MIU. Haremos corresponder cada símbolo con un nuevo símbolo:

M ⇐⇒ 3
I ⇐⇒ 1
U ⇐⇒ 0

La relación es arbitraria; la única consonancia o motivación tenida en cuenta es la de que cada uno de los símbolos tiene cierto parecido con el que le ha sido asignado como correspondiente. Llamaremos a cada número el *número Gödel* de la letra respectiva.

Bien, estoy seguro de que el lector ya puede conjeturar cómo será el número Gödel de una cadena que incluya más de una letra:

MU ⇐⇒ 30
MIIU ⇐⇒ 3110
etc.

Es fácil. Sin duda, esta correspondencia entre notaciones es una transformación que conserva la información; equivalente a ejecutar la misma melodía mediante dos instrumentos diferentes.

Observemos ahora una derivación común, dentro del sistema MIU, enunciadas simultáneamente en ambas notaciones:

1)	MI	—	axioma	—	31
2)	MII	—	regla 2	—	311
3)	MIIII	—	regla 2	—	31111
4)	MUI	—	regla 3	—	301
5)	MUIU	—	regla 1	—	3010
6)	MUIUUIU	—	regla 2	—	3010010
7)	MUIIU	—	regla 4	—	30110

La columna de la izquierda es obtenida mediante la aplicación de las cuatro reglas tipográficas que nos son familiares. Respecto a la columna de la derecha, también se podría pensar que ha sido producida por un conjunto similar de reglas tipográficas. Sin embargo, esta última columna tiene una naturaleza dual. Me explicaré acerca de cuál es el significado de esto.

Visión conjuntamente tipográfica y aritmética de las cosas

Podríamos decir que la quinta cadena ('3010') ha sido elaborada a partir de la cuarta, gracias al agregado de un '0' a la derecha; por otro lado, sería igualmente válido atribuir la transición a una operación *aritmética*: una multiplicación por 10, para ser precisos. Cuando se enuncian números naturales en el sistema decimal, la multiplicación por 10 y la colocación de un '0' a la derecha son operaciones que no se distinguen entre sí. Podemos servirnos de ello para formular una regla *aritmética* que se corresponda con la regla tipográfica I:

REGLA ARITMETICA Ia: Un número cuyo desarrollo decimal finalice, sobre la derecha, en '1', puede ser multiplicado por 10.

Podemos suprimir la referencia a los símbolos del desarrollo decimal, por medio de la descripción aritmética del dígito ubicado en el extremo derecho:

REGLA ARITMETICA Ib: Un número cuyo resto, al ser dividido por 10, sea 1, puede ser multiplicado por 10.

Ahora bien, podríamos habernos limitado a contar con una regla exclusivamente tipográfica, como la siguiente:

REGLA TIPOGRAFICA I: Dado cualquier teorema cuyo último símbolo del lado derecho sea '1', puede elaborarse un nuevo teorema, agregando '0' a la derecha de aquel símbolo.

Se hubiera obtenido el mismo resultado. Es por ello que la columna de la derecha tiene "naturaleza dual": puede ser vista como una serie de operaciones tipográficas que transforman una configuración de símbolos en otra, o bien como una serie de operaciones aritméticas que transforman una magnitud en otra. Pero existen razones poderosas para tener mayor interés por la versión aritmética. Pasar de un sistema exclusivamente tipográfico a otro sistema tipográfico, isomórfico con respecto al anterior, no es una meta demasiado atrayente; pero dejar atrás el dominio tipográfico para ingresar en una región isomórfica de la teoría de los números ofrece el incentivo de encontrarse con ciertas potencialidades inexploradas. Es como si alguien hubiese estado en contacto toda su vida con partituras musicales, pero conociéndolas sólo visualmente, y de pronto, sin transición alguna, palpase la correspondencia existente entre sonidos y partituras. ¡Qué mundo nuevo y tan rico! Diríamos también: es como si alguien hubiese estado en contacto toda su vida con formas de cadenas, pero conociéndolas sólo como formas de cadenas, desprovistas de significación, y de pronto, sin transición alguna, palpase la correspondencia existente entre discursos y cadenas. ¡Qué revelación!

El descubrimiento de la numeración Gödel ha sido comparado con el descubrimiento, por parte de Descartes, del isomorfismo existente entre curvas ubicadas en un plano y ecuaciones de dos variables: algo increíblemente simple —después que se lo ve— e inaugurador de un vasto mundo nuevo.

Antes de saltar a las conclusiones, quizá convenga ofrecer al lector muestras más completas de este nivel superior de isomorfismo. Será un excelente ejercicio. La idea consiste en formular reglas aritméticas cuyos efectos no se distingan de los producidos por cada una de las reglas tipográficas del sistema MIU.

Más abajo se ofrece una solución. En las reglas formuladas, m y k son números naturales cualesquiera, y n es cualquier número natural menor que 10^m.

REGLA 1: Si tenemos $10m + 1$, podemos hacer $10 \times (10m + 1)$.
Ejemplo: El paso de la línea 4 a la línea 5. Aquí, $m = 30$.

REGLA 2: Si tenemos $3 \times 10^m + n$, podemos hacer
$10^m \times (3 \times 10^m + n) + n$.
Ejemplo: El paso de la línea 1 a la línea 2, tanto m como n valen 1.

REGLA 3: Si tenemos $k \times 10^{m+3} + 111 \times 10^m + n$,
podemos hacer $k \times 10^{m+1} + n$.
Ejemplo: El paso de la línea 3 a la línea 4. Aquí, m y n valen 1, y k, 3.

REGLA 4: Si tenemos $k \times 10^{m+2} + n$, podemos hacer
$k \times 10^m + n$.
Ejemplo: El paso de la línea 6 a la línea 7.
Aquí, $m = 2$, $n = 10$ y $k = 301$.

¡No olvidemos nuestro axioma! Sin él, no iremos a ninguna parte. En consecuencia, postulamos que:

Podemos obtener 31.

Ahora, la columna de la derecha puede ser considerada un proceso aritmético acabado, dentro de un nuevo sistema aritmético al cual podemos llamar *sistema 310*:

1)	31	dado
2)	311	regla 2 ($m=1$, $n=1$)
3)	31111	regla 2 ($m=2$, $n=11$)
4)	301	regla 3 ($m=1$, $n=1$, $k=3$)
5)	3010	regla 1 ($m=30$)
6)	3010010	regla 2 ($m=3$, $n=10$)
7)	30110	regla 4 ($m=2$, $n=10$, $k=301$)

Adviértase una vez más que las reglas de ampliación y de reducción nos siguen acompañando; han sido trasladadas directamente al dominio de los números, y entonces los números Gödel se agrandan y se achican. Si se observa cuidadosamente todo esto, se descubrirá que las reglas están basadas sencillamente en la noción de que el desplazamiento de dígitos hacia la izquierda y hacia la derecha, en representaciones decimales de enteros, se relaciona con multiplicaciones y divisiones por potencias de 10. Esta simple observación es generalizada a través de la siguiente

PROPOSICION BASICA: Si existe una regla tipográfica que indica el modo en que determinados dígitos han de ser desplazados, transformados, suprimidos o incluidos dentro de cualquier número representa-

do en forma decimal, entonces, tal regla puede ser adecuadamente representada, a su vez, por su equivalente aritmético, el cual empleará operaciones aritméticas con potencias de 10, lo mismo que adiciones, sustracciones, etc.

Más sintéticamente:

Las reglas tipográficas para la manipulación de *numerales* son, en realidad, reglas aritméticas para operar con *números*.

Aquella simple observación está en el centro del método de Gödel, y su efecto será grandemente explosivo. La misma nos señala que, contando con la numeración Gödel de cualquier sistema formal, podemos formular de inmediato un conjunto de reglas aritméticas, con lo cual queda completo el isomorfismo de Gödel. El resultado consiste en que podemos transferir el estudio de cualquier sistema formal —en realidad, el estudio de *todos* los sistemas formales— al campo de la teoría de los números.

Números MIU producibles

Del mismo modo que un conjunto de reglas tipográficas genera un conjunto de teoremas, el conjunto correspondiente de números naturales será generado por la repetida aplicación de reglas aritméticas. Estos *números producibles* cumplen, dentro de la teoría de los números, la misma función que los teoremas en el interior de cualquier sistema formal. Por supuesto, serán producibles diferentes números, según las reglas que se adopten. Los "números producibles" son producibles únicamente *con relación a un sistema* de reglas aritméticas. Por ejemplo, números tales como 31, 3010010, 3111, etcétera, pueden ser llamados *números MIU producibles*: una denominación nada elegante, que puede ser abreviada como *números MIU*, y encargada de significar que estos números son los únicos que se producen cuando el sistema MIU es trasladado a la teoría de los números, con la mediación de la numeración Gödel. Si traspusiéramos a números Gödel el sistema pq, y luego "aritmetizáramos" sus reglas, llamaríamos "números pq" a los números producibles, y así por el estilo.

Hago notar que los números producibles (en cualquier sistema dado) son definidos merced a un método recursivo: conocidos los números de los cuales se sabe que son producibles, utilizamos reglas que establecen cómo obtener otros números producibles. Así, la clase de los números de los cuales se sabe que son producibles se autoamplía constantemente, de modo muy similar a como lo hace la lista de números de Fibonacci, o la de los números Q. El conjunto de los números producibles de cualquier sistema es un *conjunto recursivamente enumerable*. ¿Qué ocurrirá con su complemento: el conjunto de los números no producibles? ¿Este conjunto

es siempre recursivamente enumerable? ¿Hay algún rasgo aritmético común en todos los números que no son producibles?

Este tipo de tema es el que surge cuando se lleva el estudio de los sistemas formales al reino de la teoría de los números. Se puede preguntar, con respecto a cada sistema aritmetizado, "¿Podemos caracterizar de una manera simple a los números producibles?" "¿Podemos caracterizar de una manera recursivamente enumerable a los números *no* producibles?" Las preguntas anteriores configuran problemas difíciles de teoría de los números. En el marco del sistema que haya sido aritmetizado, aquéllas pueden resultarnos muy arduas de responder. Si existe alguna posibilidad de resolver dichos problemas, deberá fincarse en el género de razonamiento paso a paso, usualmente aplicado a los números naturales. La forma depurada de esto fue presentada en el capítulo anterior: desde todo punto de vista, se diría que el TNT ha capturado, gracias a un sistema unitario y compacto, la gama completa de los procesos válidos de pensamiento matemático.

La respuesta a preguntas sobre números producibles, con la ayuda del TNT

¿Sería posible, en consecuencia, que los instrumentos adecuados para elaborar respuestas, frente a cualquier interrogante relativo al sistema formal que fuere, residan en el interior de un solo sistema formal: el TNT? Parece, razonablemente, que sí. Tomemos, por ejemplo, la siguiente pregunta:

¿MU es un teorema del sistema MIU?

Hallar la respuesta equivale a establecer si 30 es un número MIU o no. Como se trata de un enunciado correspondiente a la teoría de los números, deberíamos primero resolver —con algún esfuerzo— de qué manera traducimos la oración "30 es un número MIU" a notación TNT, siguiendo para ello, de alguna manera, el mismo procedimiento que cuando resolvimos cómo traducir otras oraciones de teoría de los números a notación TNT. Debo advertir ahora mismo al lector que tal traducción, si bien existe, es enormemente compleja. Le hago recordar mi observación, en el Capítulo VIII, de que un enunciado aritmético tan simple como "b es una potencia de 10" es muy complicado de codificar en notación TNT: ¡y el enunciado "b es un número MIU" lo es en grado mucho mayor! Con todo, es algo posible; y cada b puede ser remplazada por el numeral SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS0. Esto ha de generar una MONstruosa cadena de TNT, una cadena de TNT que se refiere al acertijo MU. Siendo así, llamaremos "MUMON" a esa cadena. A través de MUMON y de cadenas semejantes, el TNT está ahora en condiciones de hablar "en código" sobre el sistema MIU.

La naturaleza dual de MUMON

A fin de obtener algún provecho de esta singular transformación de la pregunta original, deberíamos buscar respuesta a esta otra pregunta:

¿MUMON es un teorema de TNT?

Todo lo que hemos hecho es sustituir una cadena relativamente corta (MU), por otra (la monstruosa MUMON); y un sistema formal simple (el sistema MIU), por un sistema complicado (el TNT). No es probable que la respuesta sobrevenga pronto, aun cuando la pregunta haya sido reformulada. TNT, en verdad, tiene un repertorio completo de reglas de ampliación y de reducción, y así, la relaboración de las preguntas quizá haga a éstas mucho más dificultosas que en su versión original. Se podría decir, inclusive, que analizar MU a través de MUMON, es una forma intencionalmente abstrusa de plantear las cosas. Sin embargo, hay más de un nivel para considerar a MUMON.

La que sigue es, realmente, una cuestión intrigante: MUMON tiene dos significados pasivos diferentes. En primer lugar, el que ya ha sido expuesto:

30 es un número MIU.

Pero, por otro lado, sabemos que este enunciado se vincula (por vía isomórfica) con otro enunciado:

MU es un teorema del sistema MIU

De modo que podemos sostener, legítimamente, que este último es el segundo significado pasivo de MUMON. Lo cual parecerá muy curioso ya que, al fin y al cabo, MUMON no contiene sino signos más, paréntesis y demás símbolos de TNT. ¿Cómo es posible que pueda expresar enunciado alguno con un contenido distinto al aritmético?

El hecho es que sí puede. Así como una misma línea musical puede estar integrando tanto la melodía como la armonía de una composición; así como "BACH" puede ser interpretado como un nombre y también como una melodía; así como una misma oración puede ser una precisa descripción estructural de una pintura de Escher, de una sección de ADN, de una obra de Bach, y del propio diálogo dentro del cual aparece esta oración, así, del mismo modo, MUMON puede ser tomado de (por lo menos) dos maneras diferentes. Este estado de cosas se produce a causa de dos circunstancias:

Circunstancia 1. Los enunciados tales como "MU es un teorema" pueden ser expresados en el código de la teoría de los números, por vía del isomorfismo de Gödel.

Circunstancia 2. Los enunciados de teoría de los números pueden ser traducidos a TNT.

Se puede decir que MUMON, en función de la Circunstancia 1, es un mensaje codificado, donde los símbolos del código son, en función de la Circunstancia 2, símbolos de TNT.

Códigos y significación implícita

Podría objetarse ahora que un mensaje codificado, a diferencia de un mensaje no codificado, no expresa nada sobre sí mismo: requiere el conocimiento del código. Ahora bien, en rigor, los mensajes no codificados no existen. Unicamente hay mensajes formulados en códigos más familiares, y mensajes formulados en códigos menos familiares. Para revelar la significación de un mensaje, es necesario extraerla del código mediante alguna clase de mecanismo, o de isomorfismo. Descubrir el método adecuado para la decodificación puede resultar difícil, pero una vez conseguido ello, el mensaje se convierte en algo tan transparente como el agua. Cuando un código es muy familiar, deja de ser visto como un código; uno olvida que existe un mecanismo decodificador. El mensaje pasa a ser identificado con su significación.

Nos estamos enfrentando con un caso donde la identificación del mensaje con la significación es tan profunda, que nos cuesta mucho concebir la existencia de una significación alternativa, contenida por los mismos símbolos. A saber, estamos tan inducidos por los símbolos de TNT a ver significaciones pertenecientes a la teoría de los números (y *únicamente* significaciones pertenecientes a la teoría de los números) en las cadenas de TNT, que nos resulta sumamente dificultoso concebir ciertas cadenas de TNT como enunciados referidos al sistema MIU. No obstante, el isomorfismo de Gödel nos fuerza a reconocer este segundo nivel de significación en determinadas cadenas de TNT.

Si lo decodificamos según el modo más familiar, vemos que MUMON contiene el mensaje:

30 es un número MIU.

Se trata de un enunciado de teoría de los números, obtenido mediante la interpretación de cada signo según el modo convencional.

Con la aparición de la numeración Gödel, y del isomorfismo total fundado en ésta, tenemos descifrado, hasta cierto punto, un código en el cual los mensajes referidos al sistema MIU son formulados en cadenas de TNT. El isomorfismo de Gödel es un nuevo revelador de información, exactamente como los desciframientos de antiguas inscripciones fueron reveladores de información. Si lo decodificamos según este nuevo y menos familiar mecanismo, vemos que MUMON contiene el mensaje:

MU es un teorema del sistema MIU

Este cuento tiene una moraleja que ya escuchamos: la significación es un subproducto espontáneo generado por nuestro reconocimiento de cual-

quier isomorfismo; en consecuencia, hay, por lo menos, dos significados pasivos en MUMON . . ., ¡y es posible que haya más!

El búmerang: la numeración Gödel de TNT

Por cierto que las cosas no acaban aquí. Tan sólo hemos comenzado a comprender el potencial del isomorfismo de Gödel. Lo natural sería urdir la estratagema de volver sobre sí misma la capacidad de TNT de reflejar otros sistemas formales, del mismo modo en que la Tortuga volvió los fonógrafos del Cangrejo contra sí mismos, y en que su Copa C se volvió contra sí misma, autodestruyéndose. Para conseguirlo, tendremos que asignar numeración Gödel al propio TNT, tal como lo hicimos con el sistema MIU, y luego "aritmetizar" sus reglas de inferencia. La numeración Gödel es fácil de aplicar. Podríamos establecer, por ejemplo, la siguiente correspondencia:

Símbolo	*Codón**	*Justificación mnemotécnica*	
0	666	El Número de la Bestia, para el Misterioso Cero	
S	123	sucesión: 1, 2, 3, . . .	
=	111	parecido visual, si se lo pone horizontal	
+	112	1 + 1 = 2	
·	236	2 x 3 = 6	
(	362	termina en 2	
)	323	termina en 3	*estos tres pares*
<	212	termina en 2	*forman*
>	213	termina en 3	*un patrón*
[	312	termina en 2	
]	313	termina en 3	
a	262	lo contrario de ∀ (626)	
′	163	163 es primo	
∧	161	'∧' es una "gráfica" de la secuencia 1-6-1	
∨	616	'∨' es una "gráfica" de la secuecia 6-1-6	
⊃	633	6 "implica" 3 y 3, en algún sentido	
~	223	2 + 2 *no* es 3	
∃	333	'∃' se parece a '3'	
∀	626	lo contrario de a; también, es una "gráfica" de 6-2-6	
:	636	dos puntos, dos seis	
punc.	611	número especial, como en el sistema Bell (411, 911)	

* Nombre de cada una de las unidades que componen el código genético. El codón es una secuencia de tres bases, en una molécula de ADN o de ARN, y determina un aminoácido específico. [T.]

Cada uno de los símbolos de TNT ha sido vinculado con un triplete compuesto por los dígitos 1, 2, 3 y 6, ordenados con arreglo a motivaciones mnemotécnicas. Llamaré *codón Gödel*, o simplemente *codón*, a cada uno de tales tripletes. Adviértase que no he asignado codones a b, c, d, o e: estamos empleando el TNT austero. Hay razones profundas para ello, las cuales serán expuestas en el Capítulo XVI. En cuanto al último elemento del repertorio de equivalencias, la "puntuación", lo fundamentaré en el Capítulo XIV.

Podemos ahora reformular cualquier cadena o regla de TNT, utilizando el nuevo ropaje. A continuación, por ejemplo, tenemos el Axioma 1, enunciado en las dos notaciones; primero, la nueva, y debajo la anterior:

626,262,636,223,123,262,111,666
∀ a : ~ S a = 0

La convención habitual de poner puntuación cada tres dígitos viene a coincidir, muy oportunamente, con los límites de nuestros codones, otorgándoles así una "fácil" legibilidad.

Veamos ahora la Regla de Separación en la nueva notación:

REGLA: Si x y 212x633y213 son teoremas, entonces y es un teorema.

Por último, presentamos toda una derivación, tomada del capítulo anterior, formulada dentro del TNT austero, y vertida, también, en la nueva notación:

626,262,636,626,262,163,636,362,262,112,123,262,163,323,111,123,362,262,112,262,163,323	axioma 3
∀ a : ∀ a ' : (a + S a ') = S (a + a ')	
626,262,163,636,362,123,666,112,123,262,163,323,111,123,362,123,666,112,262,163,323	especificación
∀ a ' : (S 0 + S a ') = S (S 0 + a ')	
362,123,666,112,123,666,323,111,123,362,123,666,112,666,323	especificación
(S 0 + S 0) = S (S 0 + 0)	
626,262,636,362,262,112,666,323,111,262	axioma 2
∀ a : (a + 0) = a	
362,123,666,112,666,323,111,123,666	especificación
(S 0 + 0) = S 0	
123,362,123,666,112,666,323,111,123,123,666	inserción de '123'
S (S 0 + 0) = S S 0	
362,123,666,112,123,666,323,111,123,123,666	transitividad
(S 0 + S 0) = S S 0	

Aclaro que he cambiado el nombre de la regla "'adición de S" por el de "Inserción de '123' "; ya que es ésta la operación tipográfica convalidada ahora por la regla.

Esta nueva notación tiene que provocar una reacción de intensa extrañeza, pues hace que se pierda toda idea de significación; pero si uno se familiariza con ella, puede leer las nuevas cadenas tan fácilmente como leía

las formuladas en notación TNT. Se estará así en condiciones de distinguir, de un vistazo, las fórmulas bien formadas de las que no lo están. Naturalmente, el hecho de que tenga esa característica tan visual, nos llevaría a pensar que se trata de una operación tipográfica; al mismo tiempo, sin embargo, señalar *fórmulas* bien formadas en esta notación es señalar una clase especial de *enteros*, los cuales cuentan, además, con una definición aritmética.

Ahora bien, ¿qué diremos respecto a la "aritmetización" de todas las reglas de inferencia? No cabe duda de que siguen siendo reglas tipográficas. ¡Pero un momento, por favor! Según la Proposición Básica, una regla tipográfica es perfectamente equivalente a una regla aritmética. La inserción y el desplazamiento de dígitos, en un número representado en forma decimal, es una operación *aritmética*, la cual puede ser efectuada tipográficamente. Así como agregar un '0' al final es exactamente lo mismo que multiplicar por 10, cada regla es una manera sintética de describir una engorrosa operación aritmética. En cierta forma, en consecuencia, ni siquiera nos hace falta buscar reglas aritméticas equivalentes, porque todas las reglas son, *ya*, aritméticas . . .

Números TNT: un conjunto recursivamente enumerable de números

Observada de tal modo, la derivación precedente del teorema "362,123,666,112,123,666,323,111,123,123,666" es una secuencia de transformaciones teórico-numéricas entrelazadas en alto grado, cada una de las cuales actúa sobre uno, o más, de los números de entrada, y produce un número de salida al que llamamos, como antes, *número producible*, o más específicamente, *número TNT*. Algunas de las reglas aritméticas toman un número TNT anterior, y lo *acrecientan* de un modo particular, a fin de producir un nuevo número TNT; otras reglas toman un número TNT anterior y lo hacen *decrecer*; y también hay ciertas reglas que toman dos números TNT, operan sobre cada uno de ellos mediante determinadas y singulares formas, y luego reúnen los resultados en una combinación que da lugar a un nuevo número TNT . . . y así sucesivamente. Además, en lugar de comenzar sólo con un número TNT conocido, lo hacemos con *cinco* de ellos: naturalmente, uno por cada axioma (austero). El TNT aritmetizado es por cierto muy similar al sistema MIU aritmetizado, salvo que tiene más reglas y axiomas, y que entonces la formulación explícita de los equivalentes aritméticos sería mucho más enfadosa . . . y para nada esclarecedora, dicho sea de paso. Si el lector tiene presente el modo en que se procedió con el sistema MIU, comprobará que el modo seguido en este caso es enteramente análogo.

Hay un nuevo enunciado teórico-numérico, creado por esta "gödelización" de TNT; el siguiente:

a es un número TNT.

Por ejemplo, sabemos, a partir de la derivación efectuada más arriba, que 362,123,666,112,123,666,323,111,123,123,666 *es* un número TNT, en tanto que, por otro lado, 123, 666, 111, 666 presumiblemente *no* es un número TNT.

Se nos ocurre ahora que este nuevo enunciado teórico-numérico es *expresable* mediante determinada cadena de TNT, con una variante libre, digamos a. Podríamos colocarle un tilde delante, y esa cadena expresaría la noción complementaria:

a no es un número TNT.

Ahora bien, si remplazamos todas las apariciones de a, en esta segunda cadena, por el numeral TNT correspondiente a 123,666,111,666 —un numeral que contendría exactamente 123,666,111,666 veces a S: demasiado extenso para enunciarlo—, contaríamos con una cadena TNT que, tal cual como MUMON, tendría la facultad de poder ser interpretada en dos niveles. En primer lugar, la cadena diría

123,666,111,666 no es un número TNT.

Pero a causa del isomorfismo que vincula los números TNT con los teoremas de TNT, habría un segundo nivel de significación en esta cadena, el siguiente:

S0 = 0 no es un teorema de TNT.

TNT trata de introducirse en TNT

Esta double entendre inesperada demuestra que TNT contiene cadenas que hablan de otras cadenas de TNT. En otras palabras, el metalenguaje que nosotros utilizamos, desde fuera, para hablar de TNT, aparece reproducido, cuando menos parcialmente, *dentro* mismo de TNT. Y ello no configura un rasgo casual; por el contrario, se explica porque la arquitectura de cualquier sistema formal puede ser reflejada en el interior de N (teoría de los números). Se trata entonces de un rasgo tan inevitable de TNT como lo son las vibraciones generadas en un fonógrafo cuando ejecuta un disco. Aparentemente, las vibraciones podrían provenir del mundo exterior: causadas, por ejemplo, por niños que estén brincando o haciendo rebotar balones; pero resulta que un efecto colateral de la producción de sonidos —un efecto ineludible, además— consiste en que alcanzan y conmueven al propio mecanismo que los produce. No es algo accidental: es un efecto colateral del que no se puede escapar. Está en la

naturaleza de los fonógrafos. Y está en la naturaleza de toda formalización de teoría de los números que su metalenguaje esté incorporado dentro suyo.

Podemos prestigiar esta observación llamándola el *Dogma Central de la Lógica Matemática,* y representándola mediante un diagrama en dos pasos:

$$\text{TNT} \Rightarrow \text{N} \Rightarrow \text{meta-TNT}$$

Dicho con palabras: una cadena de TNT cuenta con una interpretación en N; y un enunciado de N puede tener una segunda significación como enunciado referido a TNT.

G: una cadena que habla de sí misma en código

Todo esto tan atractivo corresponde solamente a la mitad del cuento. La mitad restante implica una intensificación de la autorreferencia. Nos encontramos en el mismo estadio de la Tortuga cuando ésta se percató de que era posible construir un disco tal que, al ser ejecutado, rompería el fonógrafo; pero ahora la pregunta es: "Dado un fonógrafo, ¿cómo resolver con precisión qué disco poner?" Es un asunto problemático.

Necesitamos encontrar una cadena de TNT —a la cual llamaremos 'G'— que se refiera *a sí misma,* en el sentido de que uno de sus significados pasivos sea una oración que hable de G. El significado pasivo, específicamente, ha de ser:

"G no es un teorema de TNT."

Debo agregar de inmediato que G tiene también un significado pasivo consistente en un *enunciado de teoría de los números*; igual que MUMON, es susceptible de ser construido mediante (por lo menos) dos diferentes formas. Lo importante es que cada uno de los significados pasivos es válido y útil por separado, y no arroja incertidumbres de ninguna índole sobre el otro significado. (El hecho de que un fonógrafo que ejecuta un disco produzca vibraciones en sí mismo y en el disco ¡no crea incertidumbres de ninguna índole acerca del hecho de que esas vibraciones son sonidos musicales!)

La existencia de G es lo que causa la incompletitud de TNT

El ingenioso método previsto para crear G, y ciertos conceptos importantes relativos a TNT, serán desarrollados en los Capítulos XIII y XIV; por ahora nos limitamos a echar una mirada, más bien superficial, sobre las

consecuencias que pueden desprenderse del hallazgo de un componente autorreferencial en TNT. Quién sabe, ¡hasta podría explotar! En cierto modo, eso es lo que ocurre. Nos centramos en la pregunta obvia:

¿G es un teorema de TNT, o no?

Asegurémonos de formar una opinión *propia* a propósito de esta cuestión, en lugar de admitir la opinión de G acerca de sí misma. Después de todo, G no puede comprenderse a sí misma mucho más de lo que un maestro zen se comprende a sí mismo. Como MU, G puede ser un no teorema. No tenemos por qué confiar en toda cadena posible de TNT: sólo en sus teoremas. Utilizaremos ahora nuestra capacidad de razonamiento a fin de esclarecer el presente problema, en este punto, lo mejor que nos sea posible.

Haremos nuestra suposición habitual: que TNT emplea métodos válidos de razonamiento y, en consecuencia, jamás aparecen falsedades en él, ocupando el lugar de los teoremas. En otras palabras, todo aquello que sea un teorema de TNT expresa una verdad. De modo que si G fuera un teorema, expresaría una verdad, la siguiente: "G no es un teorema". Nos topamos así con el peso íntegro de su autorreferencialidad. Siendo un teorema, tendría que ser entonces una falsedad. Luego, si nos apoyamos en nuestra suposición de que una falsedad nunca ocupa el lugar de un teorema en TNT, estaríamos obligados a concluir que *G no es un teorema*. Todo esto está muy bien, pero nos queda pendiente un pequeño problema: aun sabiendo que G no es un teorema, debemos reconocer que expresa una verdad. Tenemos aquí una situación donde TNT contradice nuestras expectativas: hemos hallado una cadena que expresa una afirmación verdadera, pero tal cadena no es un teorema. Pese a nuestro desconcierto, no debemos perder de vista el hecho de que G tiene una interpretación aritmética, asimismo, la cual nos permite resumir nuestros descubrimientos de la siguiente manera:

> Ha sido encontrada una cadena de TNT; la misma expresa, sin la menor ambigüedad, una afirmación relativa a ciertas propiedades aritméticas de los números naturales; además, podemos determinar, razonando desde fuera del sistema, no sólo que la afirmación es verdadera sino también que la cadena no es apta para ser un teorema de TNT. Y entonces, si preguntamos a TNT si la enunciación es verdadera, TNT no reponde ni sí ni no.

¿La cadena de la Tortuga, en la *Ofrenda MU*, es análoga a G? No del todo. Lo análogo a la cadena de la Tortuga es ~G. ¿Por qué? Bueno, pensemos por un momento en qué dice ~G. Debe decir lo contrario de lo dicho por G. Dice G, "G no es un teorema de TNT", luego, ~G debe decir, "G es un teorema". Podemos reformular ambas, G y ~G, de esta forma:

G: "*No soy un teorema (de TNT)*"

~G: "Mi negación es un teorema (de TNT)."

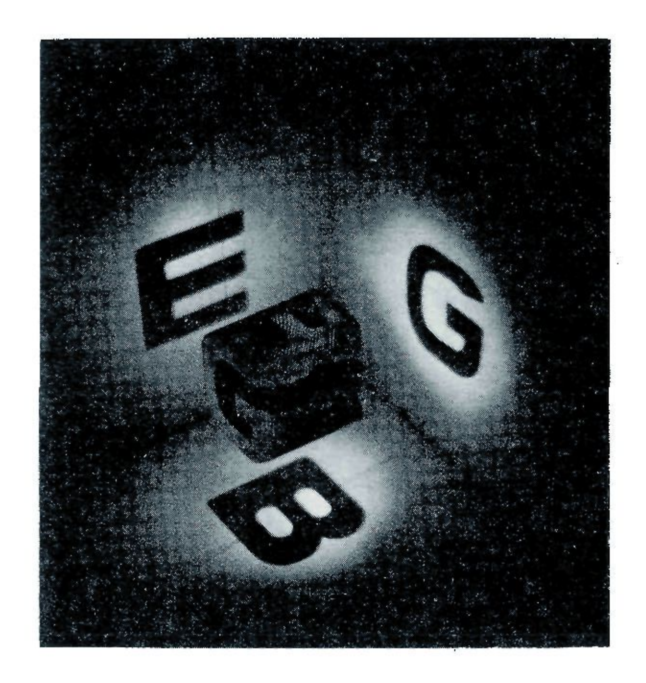
Lo que es paralelo a la cadena de la Tortuga es ~G, pues la cadena de la Tortuga *no se refería a sí misma*, sino a la primera cadena entregada por la Tortuga a Aquiles: la que tenía un nudo adicional (o un nudo de menos, como se prefiera).

Mumon tiene la última palabra

En su breve poema sobre el MU de Joshu, Mumon penetró más profundamente que nadie en el Misterio de lo Indecidible:

¿Un perro tiene naturaleza de Buda?
No hay pregunta más importante que ésta.
Si se responde sí o no,
se pierde la propia naturaleza de Buda.

PARTE II



Preludio . . .

Aquiles y la Tortuga han ido a casa de su amigo el Cangrejo a fin de conocer a uno de los amigos de éste, el Oso Hormiguero. Ya han sido hechas las presentaciones, y los cuatro se encuentran sentados, tomando el té.

Tortuga: Le hemos traído una cosita, señor Cangrejo.

Cangrejo: Qué amables, pero no debieran haberse molestado.

Tortuga: No es más que una muestra de nuestra estima. Aquiles, ¿querría entregársela al señor Cangrejo?

Aquiles: Por supuesto. Con nuestros mejores deseos. Que la disfrute usted, señor Cangrejo.

(Aquiles entrega al Cangrejo un elegante envoltorio, de forma cuadrada y muy delgado. El Cangrejo comienza a desenvolverlo.)

Oso Hormiguero: Qué podrá ser . . .

Cangrejo: Pronto lo sabremos. (*Termina de desenvolverlo, y extrae el regalo.*) ¡Dos discos! ¡Qué emocionante! Pero no tienen rótulo. Ah, eh . . . ¿es otro de sus presentes "especiales", señora T?

Tortuga: Si se refiere usted a un destructor de fonógrafos, no se trata de ello en esta oportunidad, pero sí de un artículo de ese mismo ramo, el único de su clase en el mundo entero. En realidad, es algo que nunca fue escuchado hasta ahora . . . salvo, claro está, cuando Bach lo ejecutó.

Cangrejo: ¿Cuando Bach lo ejecutó? ¿Qué quiere decir usted, exactamente?

Aquiles: Oh, se sentirá usted fabulosamente conmovido, señor Cangrejo, cuando la señora Tortuga le diga qué son verdaderamente estos discos.

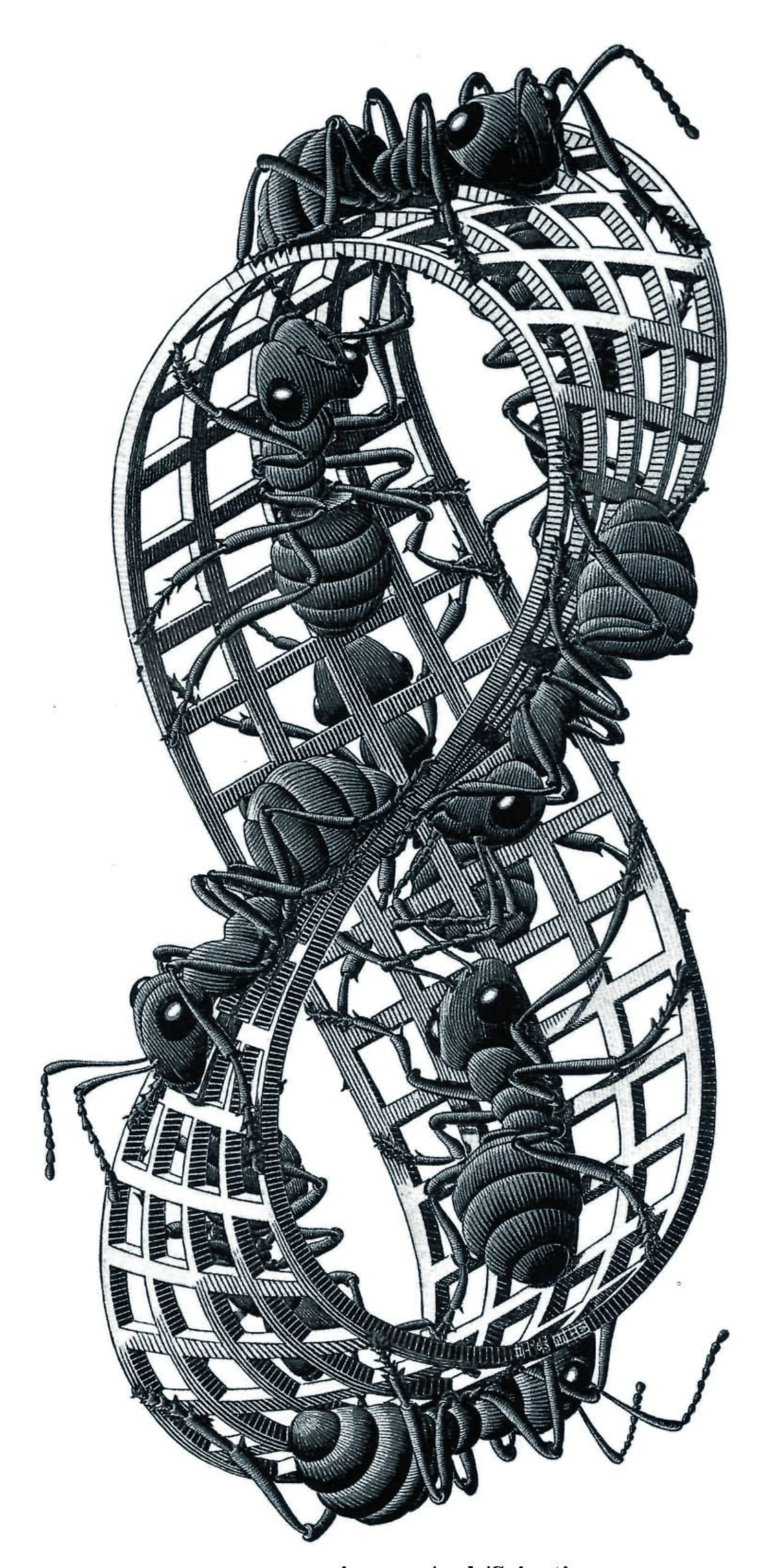
Tortuga: Pero, no se detenga, Aquiles, y dígalo usted.

Aquiles: Oh, ¿sí? Ay, caramba. Será mejor que consulte mis apuntes, entonces. (*Extrae una pequeña ficha, y se aclara la voz.*) Ejem. ¿Les interesaría que hablásemos del reciente y notable descubrimiento matemático al que estos discos deben su existencia?

Cangrejo: ¿Estos discos derivan de alguna cuestión matemática? ¡Qué curioso! Bien, ya ha conseguido usted despertar mi interés, así que continúe, por favor.

Aquiles: Perfectamente, pues. (*Se detiene por un momento, bebe un sorbo de té, y luego prosigue.*) ¿Han oído nombrar el polémico "Teorema Final" de Fermat?

Oso Hormiguero: No estoy seguro . . . Me suena curiosamente familiar, pero no alcanzo a ubicarlo.



Aquiles: Se trata de una idea sumamente simple. Pierre de Fermat, abogado de profesión y matemático por distracción, estaba leyendo el clásico texto de Diofanto, *Arithmetica*, en una de cuyas páginas se topó con la siguiente ecuación:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Comprendió de inmediato que esta ecuación tiene infinitas soluciones a, b, c, y entonces escribió, al margen, este notable comentario:

La ecuación

$$a^n + b^n = c^n$$

tiene soluciones, a través de los enteros positivos a, b, c y n, únicamente si $n = 2$ (y entonces habrá infinitos tripletes a, b, c, que satisfagan la ecuación); pero no hay soluciones si $n>2$. He descubierto una demostración verdaderamente prodigiosa de esta afirmación, pero, desdichadamente, este margen es demasiado pequeño para contenerla.

Desde ese día, unos trescientos años atrás, los matemáticos se han estado esforzando por conseguir una cosa o la otra: o bien probar lo afirmado por Fermat, y en consecuencia reivindicar su reputación, la cual, aunque muy alta, ha sido un tanto empañada por los escépticos para quienes Fermat, en realidad, jamás encontró la demostración que dijo haber encontrado; o bien refutar su afirmación, hallando el contraejemplo adecuado: un conjunto de cuatro enteros a, b, c y n, donde $n>2$, que satisfaga la ecuación. Hasta hace muy poco, todos los ensayos en ambas direcciones habían fracasado. Existe la seguridad de que el Teorema ya ha sido probado con relación a muchos valores específicos de n: en particular, todos los valores n hasta 125000.

Oso Hormiguero: ¿No habría que llamarlo "Conjetura", en vez de "Teorema", puesto que nunca ha sido adecuadamente demostrado?

Aquiles: Estrictamente hablando, tiene usted razón; es por tradición que se le dice "Teorema".

Cangrejo: ¿No hay nadie que se las haya ingeniado para resolver este célebre problema?

Aquiles: ¡Por cierto que sí! La señora Tortuga lo ha conseguido y, como es usual en ella, a través de un toque mágico. No solamente ha descubierto una DEMOSTRACION del Teorema Final de Fermat (dando justificación, así, a tal denominación, y reivindicando al mismo tiempo el prestigio de Fermat), sino también un CONTRAEJEMPLO, que muestra la excelente intuición de los escépticos . . .

Cangrejo: ¡Caramba! Sí que es un hallazgo revolucionario.

Figura 54. Banda de Moebius II, *de M. C. Escher (grabado en madera, 1963).*



Figura 55. Pierre de Fermat.

Oso Hormiguero: ¡Por favor, basta de suspenso! ¿Cuáles son esos mágicos enteros que satisfacen la ecuación de Fermat? Siento especial curiosidad con respecto al valor de n.

Aquiles: ¡Oh, qué horror! ¡Estoy apenadísimo! ¿Pueden creerlo? Me dejé los valores en casa, pues era un montón verdaderamente colosal de papel. Por desdicha, era algo demasiado enorme para traerlo conmigo. Desearía tenerlo acá para que pudiesen verlo. Pero, si de algo sirve, me acuerdo de una cosa: el valor de n es el único entero positivo que no aparece nunca en la fracción continua π.

Cangrejo: Oh, cuán lamentale es que no tengamos eso ahora. Sin embargo, no hay razón para poner en duda lo que usted nos ha dicho.

Oso Hormiguero: De cualquier modo, ¿para qué queremos ver a n enunciado decimalmente? Aquiles nos ha indicado cómo encontrarlo. ¡Bien, señora Tortuga, le ruego que acepte mis sinceras felicitaciones por su trascendental descubrimiento!

Tortuga: Muchas gracias. Pero lo que me parece más importante que el resultado mismo es la utilización práctica a la cual conduce directamente mi resultado.

Cangrejo: Me estoy muriendo por escucharla hablar de eso, pues siempre pensé que la teoría de los números era la Reina de la Matemática —la rama más pura de la matemática—, la única rama de la matemática que NO tiene aplicaciones . . .

Tortuga: No es usted la única persona que cree eso. No obstante, es del todo imposible hacer una afirmación genérica acerca de cuándo o cómo una rama determinada de la matemática pura —o, inclusive, determinado Teorema en particular— obtendrá repercusiones importantes fuera de la matemática. Es algo enteramente impredictible, y el pre-

sente caso es un ejemplo perfecto de tal fenómeno.

Aquiles: ¡El descubrimiento doble cañón de la señora Tortuga ha abierto un camino en el campo de la caza acústica!

Oso Hormiguero: ¿Qué es la caza acústica?

Aquiles: El nombre ya lo dice: es la caza o recuperación de información acústica en fuentes extremadamente complejas. Un caso ejemplificador de caza acústica es la reconstrucción del sonido producido por un peñasco que cae a plomo en un lago, a partir de las ondas que se esparcen sobre la superficie del agua.

Cangrejo: ¡Caray, eso parece casi imposible!

Aquiles: No crea. En realidad, es algo enteramente similar a lo que hace nuestro cerebro cuando, a partir de las vibraciones transmitidas por el tímpano a las fibras de la cóclea, reconstruye el sonido producido en las cuerdas vocales de otra persona.

Cangrejo: Ya veo. Pero lo que todavía no veo es cómo entra la teoría de los números en este cuadro, ni qué tienen que ver mis nuevos discos con todo esto.

Aquiles: Bueno, en la matemática de la recuperación acústica surgen muchos problemas que están relacionados con las diversas soluciones de ciertas ecuaciones diofantinas. Por su parte, la señora Tortuga ha dedicado años a tratar de reconstruir los sonidos producidos por Bach al ejecutar su clave, hace más de dos siglos, a partir del cálculo, hoy, de los movimientos de todas las moléculas en la atmósfera.

Oso Hormiguero: ¡Pero eso es imposible! ¡Esos sonidos son irrecuperables, se han ido para siempre!

Aquiles: Así piensa el ingenuo . . . Sin embargo, la señora T ha estudiado durante muchos años este problema, y llegó a la conclusión de que todo depende de las diversas soluciones que tenga la ecuación

$$a^n + b^n = c^n$$

en enteros positivos, siendo $n>2$.

Tortuga: Precisamente, yo podría explicar cómo surge esta correspondencia, pero estoy segura de que se van a aburrir.

Aquiles: Resulta que la teoría de la recuperación acústica predice que los sonidos de Bach pueden ser recuperados a partir del movimiento de todas las moléculas en la atmósfera, si es posible decir que, O existe por lo menos una solución a la ecuación . . .

Cangrejo: ¡Asombroso!

Oso Hormiguero: ¡Fantástico!

Tortuga: ¡Quién lo hubiera pensado!

Aquiles: Yo estaba diciendo, "¡si es posible decir que, O existe tal solución O existe una demostración de que NO hay solución!" En consecuencia, la señora Tortuga empezó a trabajar, de manera muy cuidadosa, sobre los dos polos del problema a la vez. Cuando se produjo el descubrimiento

del contraejemplo, éste sirvió de ingrediente clave para hallar la demostración, de modo que lo primero condujo directamente a lo segundo.

Cangrejo: ¿Cómo pudo ser eso?

Tortuga: Bueno, fíjese, yo había mostrado que la organización estructural de cualquier demostración del Teorema Final de Fermat —si es que existía alguna— podía ser descripta mediante una fórmula precisa, la cual, tal como efectivamente sucedió, dependería de los valores de la solución que se hallase para determinada ecuación. Cuando encontré esta segunda ecuación, la misma resultó ser, para mi sorpresa, la ecuación de Fermat: una graciosa relación accidental entre forma y contenido. Entonces, cuando descubrí el contraejemplo, todo lo que necesité hacer fue utilizar aquellos números para construir mi demostración de que no hay soluciones a la ecuación. Notablemente simple, si se lo piensa. No puedo explicarme por qué nadie obtuvo antes este resultado.

Aquiles: Como consecuencia de este logro matemático incalculablemente valioso, la señora Tortuga estuvo en condiciones de concretar la recuperación acústica con la que tanto tiempo había soñado. Y este regalo recibido hoy por el señor Cangrejo representa una materialización tangible de todo el trabajo abstracto mencionado.

Cangrejo: ¡No me diga que se trata de grabaciones de Bach ejecutando sus propias obras para clave!

Aquiles: Lo lamento, pero eso mismo es lo que debo decirle, pues se trata exactamente de lo que usted supuso... Son dos grabaciones de Juan Sebastián Bach ejecutando su composición *El Clave Bien Temperado*. Cada disco contiene uno de los dos volúmenes de la obra, es decir, 24 preludios y fugas, en tonalidad mayor en uno de los discos, y en tonalidad menor en el otro.

Cangrejo: ¡Bueno, no puedo pensar sino en escuchar de inmediato una de estas inapreciables grabaciones! ¿Cómo podré agradecerles?

Tortuga: Su agradecimiento ya está plenamente mostrado, con este delicioso té que nos sirvió.

(*El Cangrejo quita el envoltorio a uno de los discos, y dispone lo necesario para escucharlo. Instantes después, el sonido de una ejecución increíblemente magistral llena el cuarto, con la más alta fidelidad imaginable. Hasta se puede oír —¿o no será más que ilusión?— el suave sonido de la voz de Bach, tarareando para sí mismo mientras toca . . .*)

Cangrejo: ¿Alguno de ustedes querría seguir la música con la partitura? Sucede que tengo una edición única de *El Clave Bien Temperado*, especialmente ilustrada por un maestro mío a quien también le sucedía que era un finísimo calígrafo.

Tortuga: Me encantaría.

(*El Cangrejo va hasta su elegante biblioteca de madera, protegida con cristales; abre las puertas, y retira dos grandes tomos.*)

Cangrejo: Aquí tiene, señora Tortuga. En verdad, nunca me he sentido llevado a conocer todas las bellas ilustraciones de esta edición. Quizá su regalo me impulse ahora a hacerlo.

Tortuga: Así lo espero.

Oso Hormiguero: ¿Se han dado cuenta de cómo, en estas composiciones, los preludios siempre disponen el ánimo adecuadamente para la fuga que sigue?

Cangrejo: Sí. Aunque es muy difícil expresarla con palabras, siempre hay cierta relación sutil entre ambos. Aun cuando el preludio y la fuga no tengan el mismo tema melódico, en todos los casos existe una inefable cualidad abstracta que subyace a ambos, ligándolos así vigorosamente.

Tortuga: Y los escasos instantes de ansiedad silenciosa suspendidos entre preludio y fuga acumulan un gran dramatismo: esos instantes en que el tema de la fuga está por ser anunciado, en notas separadas, que luego se entremezclarán, a través de niveles más y más complejos de misteriosa y exquisita armonía.

Aquiles: Sé muy bien a qué se refiere usted. Hay muchos preludios y fugas que todavía no conozco, y entonces ese fugaz silencio me llena de anhelo pues durante su transcurso trato de conjeturar qué nos dará el viejo Bach. Por ejemplo, siempre me pregunto si el tempo de la fuga será allegro o adagio; si estará en 6/8 o en 4/4; si habrá tres voces, o cinco . . . o cuatro. Y después, comienza la primera voz . . . Son momentos deliciosos.

Cangrejo: Ah, sí, qué bien recuerdo los lejanos días de mi juventud, cuando me estremecía con cada preludio y fuga, los cuales me invadían con la excitación de su novedad y de su belleza, y de las muchas y grandes sorpresas que encerraban.

Aquiles: ¿Y ahora? ¿Es que ese estremecimiento ya no se produce?

Cangrejo: Ha sido suplantado por la familiaridad, sin desaparecer por ello. Y en esta familiaridad hay una hondura compensatoria. Por ejemplo, siempre me encuentro con sorpresas, con elementos que antes no había advertido.

Aquiles: ¿Apariciones del tema que había pasado por alto, quizá?

Cangrejo: Es posible . . . especialmente cuando aquél es invertido y ocultado en el interior de varias otras voces, o cuando parece irrumpir de súbito desde las profundidades, o desde la nada. Pero hay también modulaciones pasmosas que es maravilloso escuchar una y otra vez, y de las que uno se pregunta a través de qué prodigio las concibió el viejo Bach.

Aquiles: Me complace mucho saber que se pueden esperar más cosas, luego de experimentar mi primer rapto de fascinación ante *El Clave Bien Temperado* . . . sin embargo, también me entristece pensar que este estadio no pueda prolongarse por siempre jamás.

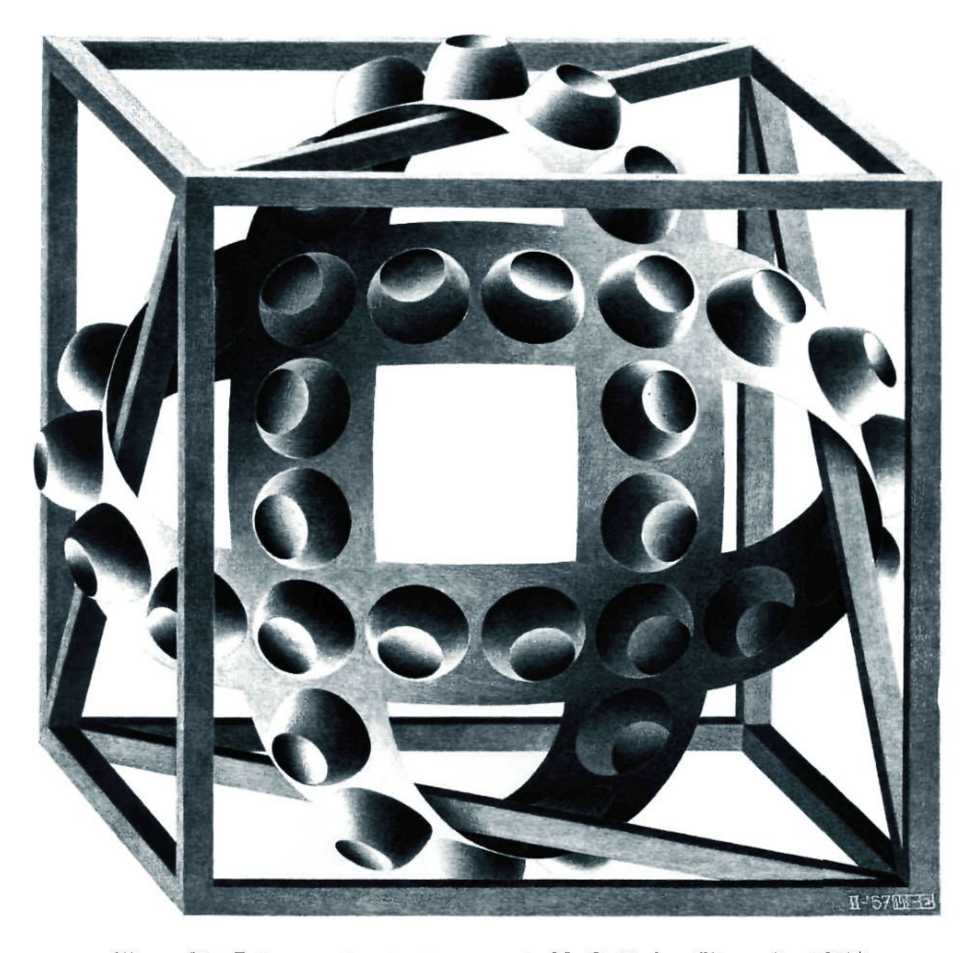


Figura 56. Cubo con Bandas Mágicas, *de M. C. Escher (litografía, 1957).*

Cangrejo: Oh, no tiene usted por qué temer que muera totalmente su arrobamiento. Una de las cualidades más preciosas de aquel estremecimiento juvenil es que siempre puede resucitar, precisamente en el momento en que uno había llegado a creer que había muerto definitivamente. Basta con que actúe, desde fuera, el disparador adecuado.

Aquiles: ¿De veras? ¿Qué puede actuar así?

Cangrejo: El escuchar la música, por decir así, a través de los oídos de alguien para quien ello constituye una experiencia totalmente nueva: de alguien como usted, Aquiles. De alguna manera, el estremecimiento consigue transmitirse, y yo puedo sentir que mi vieja conmoción resucita.

Aquiles: Esto es curioso. Esa reacción ha permanecido en latencia en algún sitio dentro suyo, pero usted no puede, por sí mismo, sacarla de su subconsciente.

Cangrejo: Exactamente. La posibilidad de revivir el estremecimiento está "codificada", a través de alguna forma desconocida, en el interior

de la estructura de mi cerebro, pero yo no estoy facultado para convocarla a voluntad. Tengo que esperar la ocurrencia de una circunstancia casual que la dispare.

Aquiles: Hay una pregunta que me gustaría hacer, con respecto a las fugas, pero me avergüenza un poco tener que formularla; claro que, como soy apenas un principiante en la audición de fugas, pensé que tal vez alguno de ustedes, ya maduro en esto, podría ayudarme con sus enseñanzas . . .

Tortuga: Ciertamente, me agradaría ofrecer a usted mis escasos conocimientos, si es que pueden serle de alguna utilidad.

Aquiles: Oh, muchas gracias. Permítame llegar a la pregunta desde cierta persepectiva. ¿Conoce usted el grabado de M. C. Escher titulado *Cubo con Bandas Mágicas*?

Tortuga: ¿Donde hay cintas circulares con aplicaciones que parecen burbujas, y que ni bien se está seguro de que se trata de protuberancias, parecen transformarse en hendiduras, y viceversa?

Aquiles: El mismo.

Cangrejo: Lo recuerdo. Esas pequeñas burbujas parecen alternar constantemente entre presentarse como cóncavas y como convexas, según el punto desde el cual se las enfoque. No hay forma de verlas simultáneamente cóncavas convexas: de alguna manera, nuestro cerebro no nos lo permite. Hay dos "modos" recíprocamente excluyentes para la percepción de las burbujas.

Aquiles: Así es. Bien, creo haber descubierto dos modos análogos, en cierta forma, a través de los cuales yo puedo escuchar una fuga. Son éstos: uno, consiste en seguir una voz en particular por vez; el otro, en escuchar el efecto total del conjunto de voces, sin preocuparme por discernir entre ellas. Ya he probado con ambos modos y, para mi gran frustración, cada uno excluye al otro. Sencillamente, no estoy facultado para seguir el recorrido de las voces individuales y, al mismo tiempo, escuchar el efecto total. Descubro que me deslizo de un modo al otro, en forma más bien espontánea e involuntaria.

Oso Hormiguero: Tal como cuando se observan las bandas mágicas, ¿eh?

Aquiles: Sí. Me pregunto . . . si mi descripción de estos dos modos de escuchar las fugas no me marca irremisiblemente como un oyente ingenuo e inexperto, que ni siquiera puede comenzar a captar los modos más profundos de percepción que hay más allá del simple alcance de sus sentidos.

Tortuga: No, en absoluto, Aquiles. Sólo puedo hablar por mí misma, pero yo también me descubro alternando entre un modo y otro, fuera de todo control consciente acerca del modo que debe predominar. No sé si nuestros compañeros aquí presentes no han experimentado algo similar.

Cangrejo: Efectivamente. Más aun: es sin duda un fenómeno atormentador, pues uno siente que la esencia de la fuga le revolotea en torno, pero no puede aprehenderla por completo porque no le es posible hacer actuar ambos modos al mismo tiempo.

Oso Hormiguero: Las fugas tienen la interesante propiedad de que cada una de sus voces constituye, por sí misma, una composición musical; de tal modo, una fuga puede ser considerada una colección de diversas composiciones, basadas todas en un mismo y único tema, y ejecutadas todas simultáneamente. Y toca al oyente (o a su subconsciente) decidir si debe percibirla como una unidad, o como una colección de partes independientes que armonizan.

Aquiles: Usted dice que las partes son "independientes", pero eso no puede ser cierto, literalmente hablando. Tendrá que haber cierta coordinación entre ellas, pues de otro modo, al ser reunidas, se produciría una colisión nada sistemática de sonidos, y sabemos muy bien que no es esto lo que en verdad ocurre.

Oso Hormiguero: Una forma mejor de expresarlo puede ser la siguiente: si usted escucha cada voz por separado, hallará que parece tener sentido completo por sí misma. Podría existir en forma aislada, y es en este sentido que hablo de partes independientes. No obstante, tiene usted toda la razón cuando señala que cada una de estas líneas individualmente significativas se funde con las otras de un modo perfectamente planeado, lo cual genera una totalidad armoniosa. El arte de componer una bella fuga reside precisamente en la capacidad de elaborar varias líneas diferentes, cada una de las cuales crea la ilusión de haber sido compuesta en función de su belleza individual, pero que cuando son reunidas forman un conjunto, del cual no se tiene la impresión, en absoluto, de haber sido logrado forzadamente. Ahora bien, esta dicotomía entre la fuga escuchada como un todo, por un lado, y el seguimiento de las voces que la componen, por otro, es un caso particular de una dicotomía muy generalizada, presente en muchos tipos de estructuras construidas a partir de niveles inferiores.

Aquiles: Oh, ¿de veras? ¿Quiere usted decir que mis dos "modos" pueden ser aplicados con alguna mayor amplitud, a situaciones distintas a la de escuchar fugas?

Oso Hormiguero: Por cierto.

Aquiles: Estoy pensando cómo podrá ser eso. Supongo que tendrá relación con la alternancia entre percepción de conjunto de determinada cosa, y percepción de la misma como colección de partes. Pero la única vez en que me he topado hasta ahora con esta dicotomía ha sido escuchando fugas.

Tortuga: ¡Oh, pero, miren esto! Acababa de dar vuelta a la página, siguiendo la música, y me encuentro con esta magnífica ilustración, frente a la primera página de la fuga.

Cangrejo: No había visto nunca esa ilustración. ¿Podríamos verla?

(*La Tortuga hace circular el libro. Los cuatro lo observan de manera peculiar: éste desde lejos, aquél desde muy cerca, todos moviendo la cabeza hacia uno y otro lado en señal de perplejidad. Cuando el libro vuelve a la Tortuga, ésta escudriña muy fijamente la página.*)

Aquiles: Bueno, creo que el preludio está por terminar. Me pregunto si, cuando escuche la fuga, será más profunda mi comprensión de la pregunta, "¿Cuál es el modo correcto de escuchar una fuga: como un todo, o como la suma de sus partes?"
Tortuga: Escuche antentamente, ¡y usted mismo decidirá!

(*El preludio finaliza. Hay un momento de silencio, y . . .*

[ATTACCA]

CAPITULO X

Niveles de descripción y sistemas de computadora

Niveles de descripción

La cadena G de Gödel y una fuga de Bach comparten la propiedad de poder ser comprendidas en diferentes niveles. Todos estamos familiarizados con esta clase de cosas, pero en algunos casos caemos en confusiones, mientras que en otros nos las arreglamos sin ninguna dificultad. Por ejemplo, todos sabemos que los seres humanos están integrados por una enorme cantidad de células (veinticinco trillones, aproximadamente), y que, en consecuencia, todo lo que hacemos podría ser descripto, en principio, en función celular. O bien la descripción podría hacerse, inclusive, en el nivel de las moléculas. La mayoría de nosotros acepta esto de una manera bastante limitada; vamos al médico para que examine lo que consideramos nuestros niveles inferiores. Leemos sobre el ADN y la "ingeniería genética" y sorbemos nuestro café. Pareciera que hemos conciliado estas dos imágenes increíblemente distintas de nosotros mismos mediante el simple recurso de desconectarlas entre sí. No contamos prácticamente con ninguna forma de relacionar una descripción microscópica de nosotros mismos con lo que imaginamos que somos, y de ahí que sea posible el almacenamiento de representaciones disociadas de nosotros mismos en "compartimientos" de nuestra mente disociados por completo entre sí. Rara vez nos vemos en situación de alternar entre uno y otro de estos conceptos, preguntándonos, "¿Cómo estas dos cosas totalmente diferentes pueden ser el mismo *yo*?"

O bien, tomemos una secuencia de imágenes en una pantalla de televisión, las cuales muestran a Armando Manzanero sonriendo. Cuando observamos la secuencia, sabemos que en realidad no estamos viendo una persona, sino grupos de puntos titilantes sobre una superficie plana. Lo sabemos, pero es lo que tenemos más lejos de la mente. Contamos con estas dos representaciones diametralmente opuestas de lo que aparece en la pantalla, pero no nos confundimos. Podemos excluir una de ellas y pres-

tar atención a la otra: es lo que todos hacemos. ¿Cuál es "más real"? La respuesta depende de si se es un ser humano, un perro, una computadora o un aparato de televisión.

Bloques y pericia en ajedrez

Uno de los principales problemas dentro de las investigaciones dedicadas a las inteligencias artificiales consiste en resolver cómo se cierra la brecha existente entre aquellas dos descripciones: cómo construir un sistema que pueda reconocer un nivel de descripción, y producir el otro. Una de las formas a través de las cuales esta brecha penetró en el ámbito de las inteligencias artificiales es adecuadamente ilustrada por los avances registrados en la programación de computadoras para que jueguen ajedrez de alto nivel. Durante la década de los años cincuenta, y en los comienzos de la siguiente, se solía pensar que la clave para conseguir que la máquina jugase convenientemente residía en lograr que ésta previese, con mayor extensión que un maestro, la red ramificada de secuencias posibles del juego. Sin embargo, pese a que ese objetivo fue siendo alcanzado gradualmente, el nivel de juego de las computadoras *no* experimentó mejora súbita de ninguna clase, ni aventajó al de los seres humanos. Es un hecho que un jugador calificado puede derrotar, en forma totalmente segura y confiada, al mejor programa de la actualidad.

La razón que explica esto se encontraba publicada desde muchos años atrás. Durante los años cuarenta, el psicólogo Adriaan de Groot hizo estudios acerca de cómo perciben una situación de juego los principiantes y los maestros de ajedrez. Dicho en los términos más elementales, sus conclusiones sostienen que los maestros perciben la distribución de las piezas en *bloques*. Existe una descripción directa del tipo "blancas: P4R; negras: T6D"; a través de la primera es que el maestro produce, de alguna manera, su imagen mental del tablero. Esto fue demostrado por la gran rapidez con que un maestro puede reproducir una determinada posición tomada de una partida, en comparación con las dificultades que le presenta a un principiante la misma tarea, luego que ambos han observado el tablero durante cinco segundos. Fue altamente revelador el hecho de que las equivocaciones de los maestros afectaban la ubicación de *grupos* enteros de piezas, las cuales, pese a estar colocadas en casillas erróneas, componían una situación estratégica casi similar a la original; con los principiantes, no pasaba en absoluto lo mismo. La prueba decisiva consistió en repetir la experiencia, pero distribuyendo las piezas en forma arbitraria sobre el tablero, en lugar de disponerlas según una situación de juego. Se descubrió que los maestros no aventajaban a los principiantes en la reconstrucción de posiciones carentes de orden y concierto.

La conclusión es que en el ajedrez, normalmente, se reiteran ciertos tipos de situaciones —ciertos patrones—, y que la atención de los maestros

se dirige hacia estos patrones de alto nivel. Los pensamientos del maestro se desenvuelven *en un nivel distinto* al del principiante; su cuerpo de conceptos es diferente. Casi todo el mundo se asombra al descubrir que, durante una partida, rara vez un maestro va mucho más allá que un principiante en sus anticipaciones . . . ¡y por lo común, además, un maestro analiza solamente un puñado de movidas! Esto se explica porque su modo de percibir el tablero actúa como un filtro: cuando examina una situación de juego, literalmente *no ve las movidas inadecuadas*, tal como un simple aficionado no ve las movidas *ilegales* cuando hace su examen de situación. Nadie que haya jugado ajedrez, aun cuando su experiencia al respecto sea mínima, organiza su percepción del juego en función de movimientos diagonales de las torres, o de capturas hacia adelante por parte de los peones: estas variantes no ingresan jamás en su pensamiento. De modo análogo, los jugadores de nivel magistral han construido niveles más altos de organización en cuanto a la manera de observar el tablero; en consecuencia, es tan inverosímil que un jugador de esta índole dé entrada en su mente a una movida inadecuada, como que un aficionado corriente dé entrada en la suya a una movida ilegal. Esto podría ser llamado *poda implícita* de la gigantesca ramificación del árbol de posibilidades. Por contraste, la *poda explícita* abarcaría el análisis de una movida y luego de un estudio superficial la decisión de no profundizar el examen.

La distinción anterior puede aplicarse también a otras actividades intelectuales, como por ejemplo la matemática. Un matemático talentoso, por lo general, no estudia ni somete a prueba los recorridos falsos hacia el teorema que busca, mientras que la gente menos dotada se ve obligada a proceder así, trabajosamente; aquél se limita a "olfatear" los caminos prometedores y comienza a transitarlos de inmediato.

Los programas de ajedrez por computadora que se basan en la anticipación no han sido enseñados a pensar en un nivel más alto; la estrategia que han seguido se ha reducido al empleo de la fuerza bruta anticipatoria, esperando quebrantar así todo género de oposición. Sin embargo, no sirvió. Quizá algún día un programa de anticipación dotado de la suficiente fuerza bruta consiga vencer a los mejores jugadores humanos, pero ello no significará más que un modesto logro intelectual, si se lo compara con la revelación de que la inteligencia depende *decisivamente* de la capacidad de crear descripciones de alto nivel para aplicarlas a ordenamientos complejos, tales como los que presentan los tableros de ajedrez, las pantallas de televisión, las páginas impresas o las pinturas.

Niveles similares

Generalmente, no tenemos necesidad de retener más de un nivel de comprensión de una situación, por vez, en nuestra mente. Además, las distintas descripciones de un mismo sistema suelen estar tan alejadas,

conceptualmente, una de otra, que no hay inconveniente en mantenerlas separadas, como ya dijimos: se conservan en compartimientos mentales independientes. Sí hay motivo de confusiones cuando un mismo sistema admite dos o más descripciones que, a pesar de situarse en diferentes niveles, de alguna forma se *parecen* entre sí. En estos casos, se nos hace muy difícil evitar el entremezclamiento de los niveles cuando pensamos en tal sistema, y lo más probable es que se nos produzca una desorientación total.

Sin duda, nos sucede esto cuando reflexionamos acerca de nuestra propia psicología; cuando, pongamos por caso, intentamos comprender las motivaciones a que responden determinados actos. Hay muchos niveles en la estructura mental humana; se trata, por cierto, de un sistema que aún no conocemos muy bien. Así y todo, hay centenares de teorías que, cada una a su manera, explican por qué las personas actúan como lo hacen: todas estas teorías se basan en ciertos supuestos fundamentales acerca del grado de profundidad con que diversos tipos de "fuerzas" psicológicas se asientan en aquel conjunto de niveles.

Ahora bien, a causa de la utilización, en medida excesiva, de la misma clase de lenguaje para referirnos a todos los niveles mentales, resultan muchos entremezclamientos de niveles y, naturalmente, centenares de teorías erróneas. Por ejemplo, hablamos de "impulsos" —con respecto al sexo, al poder, a la fama, al amor, etcétera, etcétera— sin saber de qué parte de la estructura mental humana provienen. No voy a extenderme sobre este aspecto; sólo deseo agregar que nuestra confusión a propósito de lo que somos se relaciona, sin ninguna duda, con el hecho de que consistimos en un gran conjunto de niveles, y a que solemos utilizar un solo lenguaje para todos los niveles en función de los cuales nos describimos.

Sistemas de computadora

Hay otra esfera donde coexisten muchos niveles de descripción dentro de un mismo sistema, y donde todos los niveles se encuentran conceptualmente muy próximos entre sí. Hablo de los sistemas de computadora.* Un programa de computadora en funcionamiento puede ser visto a través de numerosos niveles. En cada uno de los niveles, la descripción está formulada en el lenguaje de la ciencia de las computadoras, por lo que todas las descripciones resultan, en cierto modo, similares entre sí, a despecho de las muy importantes diferencias que existen entre los criterios que uno se forma acerca de los distintos niveles. En el más bajo de éstos, la descrip-

* La palabra "computadora", y las expresiones que integra, carecen de la precisión que sería deseable. No obstante, el campo correspondiente a esta terminología, en español, presenta un exceso de variantes, ninguna de ellas enteramente satisfactoria. Hemos optado entonces por la utilización de "computadora", versión que cuenta con la ventaja de ser la más difundida y de enmarcar al lector con aceptable fidelidad en el orden de problemas que desarrolla el texto. [T.]

ción puede ser tan complicada que se asemeje a la descripción, en función de los puntos, de una imagen televisiva. Desde el punto de vista de determinados objetivos, empero, su gravitación es por demás sobresaliente. En el nivel más alto, la descripción se configura según grandes *bloques* y, pese a que comparte muchos conceptos con el nivel más bajo, adquiere un sentido totalmente diferente. Los bloques de esta descripción son como los de los ajedrecistas avezados, y como los de la descripción por grupos de la imagen que exhibe la pantalla: resumen, en forma de cápsula, cierta cantidad de cosas que en los niveles más bajos son tomadas por separado. (Véase la figura 57.)

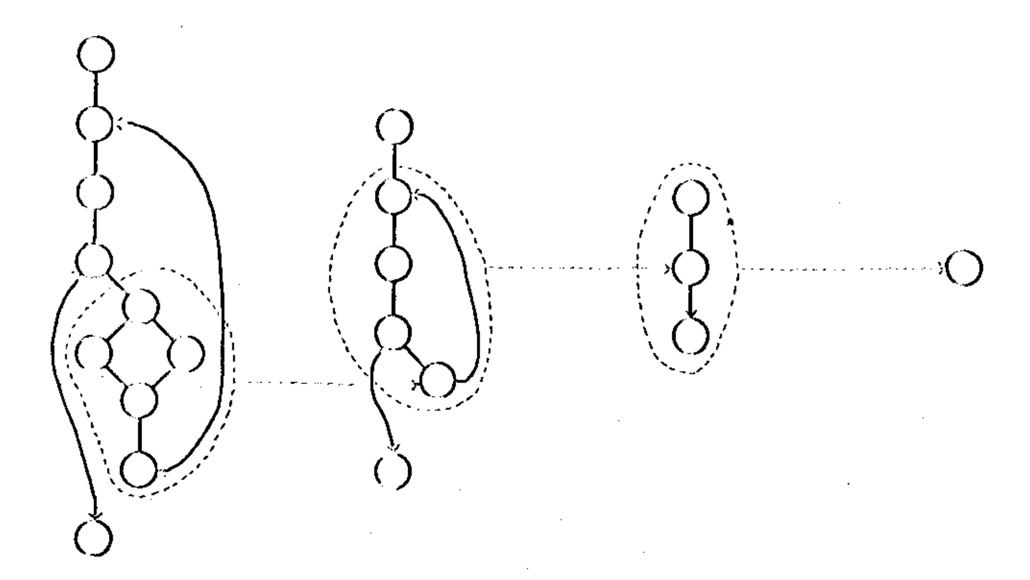


Figura 57. La noción de "bloque": un grupo de unidades es percibido de un modo distinto, ahora como un "bloque" individual. Las fronteras de un bloque se parecen un tanto a una membrana celular o a los límites de un país: establecen una identidad separada para el conjunto de dentro. De acuerdo al contexto, se prescindirá de la estructura interna del bloque, o bien se la tomará en consideración.

Ahora bien, antes de que las cosas se hagan demasiado abstractas, examinemos los hechos concretos relativos a las computadoras, comenzando por una rápida ojeada sobre cómo es un programa en su nivel más bajo. ¿Nivel más bajo? Bien, en verdad, no es así, pues no voy a hablar de las partículas elementales, pero en este momento no quiero hablar de ningún nivel más bajo que el de los programas.

En la base conceptual de una computadora, encontramos una *memoria*, una *unidad central de proceso* (UCP), y ciertos *dispositivos de*

entrada/salida (E/S). Primero, describiremos la memoria. Esta se divide en distintas unidades físicas, llamadas *palabras*. Para ser concretos, supongamos que haya 65536 palabras de memoria (un número típico, pues se trata de 2 elevado a la 16). La palabra es vuelta a subdividir en lo que podemos considerar los átomos de la ciencia de los computadores: los *bits*. El número de bits en una palabra común es de alrededor de treinta y seis. Desde el punto de vista físico, un bit no es más que un "interruptor", ubicado siempre en una de dos posiciones.

o	o	x	o	x	x	x	o	x	o	o	x	x	o	o	x	o	x	x	x	x	x	x	o	x	x	o	o	x	x	x	o	o	o	o	o

—una palabra de 36 bits—

Podemos identificar las dos posiciones como "arriba" y "abajo", o "x" y "o", o "l" y "0" . . . Esta última variante es la más usual: es perfectamente adecuada, pero puede tener el inconveniente de crear malentendidos, en la medida en que induzca a pensar que una computadora, en su base, almacena *números*. Y no es así. Hay tanto motivo para creer que un bit es un número como para creer que dos bits son el precio de un cucurucho de helado. Tal como el dinero puede obtener distintas cosas, según la forma en que se lo use, una palabra de memoria puede desempeñar una gran cantidad de funciones diversas. A veces, por cierto, los treinta y seis bits representarán un número en notación binaria. Otras, podrán representar treinta y seis puntos de una pantalla de televisión. Y otras más, podrán representar algunas letras de un texto. Cómo debe considerarse una palabra de memoria depende enteramente de la función que tenga asignada dentro del programa que la incluye. Por supuesto, puede cumplir más de una función, igual que una nota dentro de un canon.

Instrucciones y datos

Una de las interpretaciones posibles de una palabra, que aún no he mencionado, es la de *instrucción*. Las palabras de memoria no sólo contienen los datos con los cuales se debe operar, sino también el programa para operar con los datos. Existe un repertorio limitado de operaciones que pueden ser realizadas por la unidad central de proceso —la UCP—. Parte de una palabra, generalmente varios de sus primeros bits, es interpretable como el nombre del tipo de instrucción que debe aplicarse. ¿Qué papel cumple el resto de los bits de una palabra-interpretada-como-instrucción? Lo más frecuente es que indiquen qué otras palabras de la memoria han de ser operadas. En otros términos, los bits restantes constituyen un *señalador* de alguna otra palabra (o algunas otras palabras) de la memoria. Cada palabra tiene una ubicación propia en la memoria, lo

mismo que cada casa en una calle; tal ubicación es llamada la *dirección* de la palabra. La memoria, a su vez, puede tener una o muchas "calles", las cuales son llamadas "páginas". De tal modo, una palabra determinada obtiene su dirección mediante la cita de su número de página (si la memoria es paginada) y de su ubicación dentro de la página. De aquí que el aspecto de "señalamiento" de una instrucción consista en la dirección numérica de alguna(s) palabra(s) de la memoria. No hay restricciones para el señalamiento, por lo que una instrucción puede llegar a "señalarse" a sí misma; luego, cuando es ejecutada, ello es causa de que deba efectuarse una modificación en ella misma.

¿Cómo sabe la computadora qué instrucción debe ejecutar en un momento dado? De esto se encarga la UCP. Esta cuenta con un señalador especial que indica la siguiente palabra (es decir, suministra su dirección) a la que toca ser interpretada como una instrucción. La UCP extrae esa palabra de la memoria y la copia electrónicamente, lo cual da lugar a una palabra especial que pertenece específicamente a la UCP. (Las palabras de la UCP no son llamadas "palabras", sino *registros*.) Y entonces la UCP ejecuta esa instrucción. Ahora bien, una instrucción puede requerir que se realice cualquier operación, de entre una gran cantidad de tipos de éstas. Las más frecuentes incluyen:

SUMAR, a un registro, la palabra señalada por la instrucción.
(En este caso, la palabra señalada es, obviamente, interpretada como un número.)

IMPRIMIR, en forma de letras, la palabra señalada por la instrucción.
(En este caso, la palabra señalada es, obviamente, interpretada *no* como un número, sino como una cadena de letras.)

BRINCAR, hasta la palabra señalada por la instrucción.
(En este caso, se está indicando a la UCP que interprete esa palabra específica como la instrucción que sigue.)

A menos que la instrucción dicte explícitamente otra cosa, la UCP tomará la palabra ubicada inmediatamente a continuación, y la interpretará como una instrucción. En otros términos, la UCP da por supuesto que debe avanzar secuencialmente por la "calle", lo mismo que un cartero, interpretando palabra tras palabra como instrucciones. Pero este orden secuencial puede ser roto por instrucciones tales como la de BRINCAR* y otras.

* *Jump*, en el original: *brinco, salto*, y también *bifurcación*, en la terminología española de la especialidad y otras. [T.]

Lenguaje de máquina *vs.* lenguaje ensamblador

Este es un esbozo muy breve del *lenguaje de máquina*. Los tipos de operaciones que éste contiene constituyen un repertorio finito que no puede ser extendido. Así, todos los programas, por amplios y complejos que sean, deben elaborarse con componentes correspondientes a esos tipos de instrucciones. La observación de un programa formulado en lenguaje de máquina recuerda vagamente la observación de una molécula de ADN, presentada átomo por átomo. Si volvemos a echar un vistazo a la figura 41, la cual muestra la secuencia de nucleótidos de una molécula de ADN, y luego consideramos que cada nucleótido contiene aproximadamente dos docenas de átomos, y a continuación nos imaginamos que estamos tratando de enunciar el ADN, átomo por átomo, de un pequeño virus (¡no digamos de un ser humano!), tendremos, entonces, un atisbo de lo que es formular un programa complejo en lenguaje de máquina y de lo que es esforzarse por captar los logros de un programa cuando sólo se tiene acceso a su descripción en lenguaje de máquina.

Se debe recordar, sin embargo, que la programación de computadoras se hacía originalmente en un nivel aun más bajo, si cabe, que el del lenguaje de máquina: se interconectaban hilos conductores, creándose así un hardware para las operaciones requeridas. Esto es algo tan inauditamente primitivo desde la perspectiva de los usos actuales, que se hace trabajoso el solo imaginarlo. Pero es indudable que quienes lo hicieron por vez primera experimentaron el mismo alborozo que alguna vez llenó a los pioneros de las computadoras modernas . . .

Nos queremos desplazar ahora hasta un nivel más alto, dentro de la jerarquía de niveles de descripción de programas: el nivel del *lenguaje ensamblador*. No hay un espacio gigantesco entre el lenguaje ensamblador y el lenguaje de máquina; la distancia que va de uno a otro se transita más bien apaciblemente, por cierto. En sustancia, hay una correspondencia punto por punto entre instrucciones de lenguaje ensamblador e instrucciones de lenguaje de máquina. El propósito del lenguaje ensamblador es introducir "bloques" en las instrucciones específicas de un lenguaje de máquina, de modo que, en lugar de formular la secuencia de bits "010111000" cuando necesitamos una instrucción que sume un número a otro, simplemente escribimos SUMAR; luego, en lugar de suministrar la dirección en representación binaria, podemos referirnos a la palabra de memoria merced a un *nombre*.

En consecuencia, un programa formulado en lenguaje ensamblador es, en gran medida, algo así como un programa en lenguaje de máquina al que se ha hecho legible para los seres humanos. Podríamos comparar la versión en lenguaje de máquina de un programa con una derivación de TNT expresada en la oscura notación de la numeración Gödel; y a la versión en lenguaje ensamblador, con una derivación isomórfica de TNT, enunciada en la notación TNT original, la cual es mucho más fácil de

comprender. O bien, si retornamos a la imagen del ADN, podemos vincular la diferencia existente entre lenguaje de máquina y lenguaje ensamblador con la diferencia existente entre la laboriosa especificación de cada nucleótido, átomo por átomo, y la especificación de un nucleótido mediante el simple trámite de suministrar su *nombre* (esto es, 'A', 'G', 'C' o 'T'). Gracias a esta tan simple operación de introducción de "bloques", se produce un ahorro enorme de trabajo, pese a que las variaciones conceptuales no sean apreciables.

Programas que traducen programas

Es posible que lo más importante, con respecto al lenguaje ensamblador, no resida en las diferencias que lo separan del lenguaje de máquina, las cuales no son tan considerables, sino en la cuestión clave de que, a través suyo, los programas pueden ser enunciados en un nivel *absolutamente* distinto . . . Basta pensar en lo siguiente: el hardware está construido para "entender" programas en lenguaje de máquina —secuencias de bits— pero no letras ni números decimales. ¿Qué pasa si el hardware es alimentado con un programa enunciado en lenguaje ensamblador? Será como tratar de conseguir que una célula reconozca un trozo de papel donde se haya escrito la secuencia de nucleótidos utilizando símbolos alfabéticos en lugar de químicos. ¿Qué puede hacer una célula con un trozo de papel? ¿Qué puede hacer una computadora con un programa en lenguaje ensamblador?

Y aquí es donde aparece una circunstancia vital: es posible formular, en lenguaje de máquina, un *programa de traducción*. Este programa, llamado *ensamblador*, reconoce nombres de instrucciones mnemotécnicas, números decimales y otras abreviaturas adecuadas que un programador puede recordar con facilidad, y efectuar su conversión a monótonas pero precisas secuencias de bits. Una vez que el programa en lenguaje ensamblador ha sido *ensamblado* (es decir, traducido), es *procesado*: en realidad, lo que es procesado es su lenguaje de máquina equivalente; pero éste es un problema terminológico. ¿Qué nivel de programa está siendo procesado? Siempre será correcto decir que está en proceso el programa en lenguaje de máquina, pues siempre está involucrado el hardware cuando se procesa cualquier programa, pero también es enteramente razonable considerar el programa procesado bajo la forma de lenguaje ensamblador. Por ejemplo, se puede muy bien decir, "Ahora, la UCP ejecutará una instrucción de BIFURCACION", en lugar de, "Ahora, la UCP ejecutará una instrucción '111010000' ". Un pianista que ejecuta las notas Sol-Mi-Si Mi-Sol-Si también está ejecutando un arpegio en el acorde de Mi menor. No hay motivo para negarse a describir las cosas desde un punto de vista más elevado. Así, uno puede considerar que el programa en lenguaje ensamblador es procesado coexistentemente con el

programa en lenguaje de máquina. Tenemos dos modos de describir lo que está haciendo la UCP.

Lenguajes de nivel superior, compiladores e intérpretes

El siguiente nivel de la jerarquía lleva mucho más allá la idea, realmente poderosa, de traducir programas de nivel elevado a niveles más bajos. Luego de haberse utilizado la programación en lenguaje ensamblador durante bastantes años, durante el comienzo de la década de los cincuenta se advirtió que había una cantidad de estructuras características que reaparecían en todos los programas. Se diría que se trataba, como ocurre en el ajedrez, de ciertos patrones fundamentales que afloran en forma natural cuando los seres humanos procuran formular *algoritmos*: descripciones exactas de procesos que desean desarrollar. Dicho de otra manera, los algoritmos parecían tener ciertos componentes de nivel superior, aptos para especificar dichos procesos más fácil y elegantemente que a través del muy restringido lenguaje de máquina, o del lenguaje ensamblador. Habitualmente, un componente algorítmico de alto nivel consiste, no en una o dos instrucciones de lenguaje de máquina, sino en una colección completa de estas últimas, no necesariamente ubicadas en forma contigua en la memoria. Este componente puede ser representado, en un lenguaje de nivel superior, mediante una sola unidad: un bloque.

Además de los bloques así establecidos —esos componentes recién descubiertos, a partir de los cuales podían ser construidos todos los algoritmos— se comprobó que casi todos los programas contenían bloques aun más amplios: superbloques, por así decir. Estos difieren de programa a programa, según el tipo de tareas de alto nivel que toque cumplir al programa. Ya hablamos de superbloques en el Capítulo V, llamándolos de acuerdo a sus denominaciones habituales: "subrutinas" y "procedimientos". Estaba claro que el aditamento más eficaz, para cualquier lenguaje de programación, sería la capacidad de *definir* nuevas entidades de nivel más alto en función de las ya conocidas y luego *llamarlas* mediante un nombre. Esto supondría que la operación de elaborar bloques quedaría establecida dentro del lenguaje. En lugar de existir un repertorio determinado de instrucciones, a partir de las cuales tuviesen que ser ensamblados explícitamente todos los programas, el programador podría construir sus propios módulos, cada uno con su propio nombre, cada uno disponible para ser utilizado en cualquier punto del interior del programa, exactamente como si se tratara de un rasgo estructural del lenguaje. Por supuesto, no hay escapatoria con respecto al hecho de que, en el fondo, en el nivel del lenguaje de máquina, todo seguiría consistiendo en las mismas instrucciones en lenguaje de máquina de antes; no obstante, ello no estaría directamente a la vista del programador del alto nivel, sino que su presencia sería implícita.

Los nuevos lenguajes basados en las nociones anteriores fueron llamados *lenguajes compiladores*. Uno de los primeros y más precisos fue llamado "Algol", por abreviatura de "Algorithmic Language" (lenguaje algorítmico). A diferencia del caso del lenguaje ensamblador, no existe correspondencia directa, punto por punto, entre los enunciados del Algol y las instrucciones en lenguaje de máquina. Sin embargo, hay por cierto algún tipo de equivalencia entre el Algol y el lenguaje de máquina, pero es mucho más "embrollado" que el existente entre lenguaje ensamblador y lenguaje de máquina. Dicho esquemáticamente, un programa Algol es, a su traducción a lenguaje de máquina, lo que un problema verbal dentro de un texto elemental de álgebra es a la ecuación que lo traduce. (En verdad, obtener una ecuación a partir de un problema verbal es mucho más complejo, pero aporta una idea acerca de la clase de "desembrollamientos" que es necesario efectuar cuando se traduce de un lenguaje de alto nivel a un lenguaje de nivel más bajo.) A mitad de los años cincuenta, se consiguió formular programas denominados *compiladores*, encargados de realizar la traducción de lenguajes compiladores a lenguaje de máquina.

También fueron inventados los *intérpretes* o *interpretadores*. Igual que los compiladores, los intérpretes traducen de lenguajes de alto nivel a lenguaje de máquina, pero en lugar de traducir primero todos los enunciados y luego cumplir el código de la máquina, leen una línea y le dan ejecución de inmediato. Esto cuenta con la ventaja de que no se necesita haber formulado un programa completo para poder utilizar un intérprete. Se puede inventar el programa línea por línea, e irlo verificando a medida que se avanza. Así, la comparación entre un intérprete y un compilador es análoga a la que podemos establecer entre un intérprete simultáneo y un traductor de discursos escritos. Uno de los lenguajes de computadora más importante y también más fascinante es el LISP, abreviatura de "List Processing" (proceso de lista), creado por John McCarthy casi al mismo tiempo en que lo fue el Algol. A posteriori, el LISP se difundió grandemente entre los especialistas en inteligencias artificiales.

Hay una diferencia interesante entre el modo en que actúan, respectivamente, los intérpretes y los compiladores. Un compilador recibe entrada (un programa completo de Algol, por ejemplo), y produce salida (una larga secuencia de instrucciones en lenguaje de máquina). Llegado a este punto, el compilador ha cumplido su misión. La salida es entregada entonces a la computadora para su procesamiento. En cambio, el intérprete está procesando constantemente al tiempo que el programador va imprimiendo un enunciado LISP tras otro, cada uno de los cuales es ejecutado de inmediato. Pero esto no significa que cada enunciado es primero traducido y luego ejecutado, pues en tal caso un intérprete no sería otra cosa que un compilador línea por línea. Por el contrario, las operaciones de leer una nueva línea, "comprenderla" y ejecutarla están entrelazadas en el intérprete: suceden simultáneamente.

Esta es pues la concepción, sobre la que nos extenderemos un poco

más. Cada vez que es impresa una nueva línea de LISP, el intérprete trata de procesarla. Esto quiere decir que el intérprete entra en acción, y que determinadas instrucciones (en lenguaje de máquina), ubicadas en su interior, resultan ejecutadas. *Cuáles* resultan ejecutadas depende, precisamente, del propio enunciado LISP, como es lógico. Hay muchas instrucciones de BIFURCACION dentro del intérprete, de manera que una nueva línea de LISP puede ser causa de que el control se desplace en una forma compleja: hacia adelante, hacia atrás, luego otra vez hacia adelante, etc. Así, cada enunciado LISP llega a convertirse en un "sendero" en el interior del intérprete, y el seguimiento de tal sendero logra la obtención del efecto buscado.

En ocasiones, es útil considerar los enunciados LISP como simples secciones de datos, con los cuales es alimentado en orden secuencial un programa en lenguaje de máquina (el intérprete LISP), cuyo procesamiento es permanente. Cuando se conciben las cosas de este modo, se adquiere una imagen diferente de la relación que existe entre un programa formulado en un lenguaje de nivel más alto y la máquina que lo ejecuta.

Ganchos

Por supuesto que un compilador, por tratarse asimismo de un programa, debe ser formulado en algún lenguaje. Los primeros compiladores eran formulados en lenguaje ensamblador, y no en lenguaje de máquina, aprovechando así por entero el escalón ya conquistado por sobre el len-

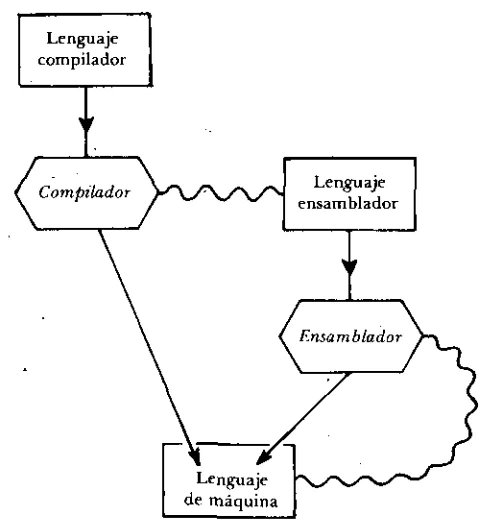


Figura 58. Tanto ensambladores como compiladores son traductores a lenguaje de máquina. Esto es indicado por las líneas rectas. Además, como también son programas, *son, a su vez, formulados originalmente en un lenguaje. Las líneas onduladas indican que un compilador puede ser formulado en lenguaje ensamblador, y un ensamblador en lenguaje de máquina.*

guaje de máquina. La figura 58 presenta una síntesis de estos complicados conceptos.

Ahora bien, al hacerse mayor aun el refinamiento, se advirtió que un compilador parcialmente formulado podía ser utilizado para compilar prolongaciones de sí mismo. En otras palabras, una vez que ha sido formulado un cierto núcleo mínimo de un compilador, ese compilador mínimo puede traducir compiladores mayores a lenguaje de máquina; éstos, por su parte, pueden traducir compiladores todavía mayores, hasta dejar compilado el compilador máximo. Este proceso es identificado gráficamente como del "gancho" o del "calzador", por razones obvias (al menos, para el lector cuyo idioma nativo sea el inglés).* No es muy distinto del proceso de adquisición de lenguaje por parte de un niño que ya alcanzó un nivel decisivo de fluidez en su idioma nativo: a partir de este punto, su vocabulario y fluidez pueden crecer a pasos agigantados, ya que puede *utilizar* el lenguaje para *adquirir* nuevo lenguaje.

Niveles para describir programas de procesamiento

Los lenguajes compiladores no reflejan, por lo general, la estructura de las máquinas que habrán de procesar los programas formulados en ellos. Esta es una de sus principales ventajas sobre el altamente especializado lenguaje ensamblador y sobre el lenguaje de máquina. Por supuesto, cuando un programa en lenguaje compilador es traducido a lenguaje de máquina, el programa que resulta es dependiente de la máquina. En consecuencia, un programa que está siendo ejecutado puede ser descripto de manera independiente de la máquina, o bien de manera dependiente de la máquina. Es como hacer referencia al parágrafo de un libro mencionando su tema (que es algo independiente del editor), o su número de página y localización dentro de la misma (que es algo dependiente del editor).

En la medida en que un programa está siendo pasado correctamente, no tiene mayor importancia el modo en que uno describa o conciba su funcionamiento. Pero cuando algo anda insatisfactoriamente, sí es importante ser capaz de pensar en diferentes niveles. Si, por ejemplo, se ha instruido a la máquina para que divida por cero en alguna etapa, aquélla hará un alto y permitirá que el usuario advierta el problema mediante la indicación del sitio del programa donde radica la dificultad. Sin embargo, esta especificación es suministrada, a menudo, en un nivel más bajo que el empleado por el programador para formular el programa. Siguen tres descripciones paralelas de un programa abocado a señalar un alto:

* "Gancho" y "calzador" son los términos que los especialistas manejan como equivalentes de "bootstrap", en español. Esta última es la palabra de resonancia obvia a que alude el texto: es el nombre de la tirilla o presilla, cuya forma semeja la de un gancho, ubicada en el extremo superior de las botas y que sirve para empujar a éstas hacia arriba en la operación de calzárselas. [T.]

Nivel de lenguaje de máquina:
"Ejecución del programa detenida en la posición 1110010101110111"

Nivel de lenguaje ensamblador:
"Ejecución del programa detenida al llegar a la instrucción DIV (dividir)"

Nivel de lenguaje compilador:
"Ejecución del programa detenida en el transcurso de la resolución de la expresión algebraica '(A + B)/Z' "

Uno de los mayores problemas que enfrentan los programadores de sistemas (o sea, las personas que formulan compiladores, intérpretes, ensambladores y otros programas, para que sean utilizados por muchas otras personas) es determinar cómo formular rutinas de detección de errores, de modo tal que sus mensajes al usuario, cuyo programa tiene un defecto, provean descripciones de alto nivel, antes bien que de bajo nivel, del problema. Como contraparte interesante, recordemos que cuando algo funciona mal en un "programa" genético (una mutación, por ejemplo), el defecto se manifiesta al observador humano únicamente en un nivel *alto*, a saber, en el nivel del fenotipo, no en el del genotipo. En realidad, la biología moderna ha hecho de las mutaciones una de sus principales ventanas a los procesos genéticos, a causa de la posibilidad que abren de efectuar rastreos en muchos niveles.

Microprogramación y sistemas operativos

En los sistemas modernos, la jerarquía incluye varios otros niveles. Algunos sistemas, por ejemplo, cuentan con instrucciones en lenguaje de máquina, las cuales son todavía más rudimentarias que la instrucción de adicionar un número de memoria a un número de un registro. Corresponde al usuario decidir qué clase de instrucciones en nivel corriente de máquina querría programar; luego, "microprograma" tales instrucciones bajo la forma de las "microinstrucciones" disponibles. Entonces, las instrucciones en "lenguaje de máquina de nivel superior" que el usuario haya previsto pueden ser incorporadas al diseño del circuito, e inclusive convertirse en hardware, aunque no sea imprescindible que así ocurra. La microprogramación permite al usuario la posibilidad de descender un tanto con respecto al nivel convencional de lenguaje de máquina. Una de las consecuencias de ello consiste en que una computadora de determinado fabricante pueda ser provista (a través de la microprogramación) de un hardware tal, que la haga contar con el mismo conjunto de instrucciones en lenguaje de máquina que una computadora distinta producida

por el mismo fabricante, o inclusive por otro. Se dice que la computadora microprogramada "imita" a otra.

Tenemos después el nivel del *sistema operativo*, situado entre el programa en lenguaje de máquina y cualquier nivel más alto que el usuario programa. El sistema operativo es de por sí un programa, cuya función es evitar el acceso de los usuarios a la máquina misma (protegiendo así el sistema), y también alejar al programador de los muchos y sumamente intrincados y dificultosos problemas de lectura del programa, para lo cual llama a un traductor, procesa el programa traducido, dirige la salida hacia los canales adecuados en el momento preciso y traslada el control al usuario siguiente. Si hay varios usuarios "hablándole" simultáneamente a la misma UCP, el sistema operativo es el programa que desplaza la atención hacia uno y otro de una manera ordenada. Las complejidades de los sistemas operativos son, ciertamente, formidables: me limitaré a insinuarlas, gracias a la analogía que sigue.

Consideremos el primer sistema telefónico: Alexander Graham Bell pudo comunicarse por teléfono con su ayudante, ubicado en el cuarto contiguo, ¡la transmisión electrónica de la voz! Esto equivale a una computadora simple, sin sistema operativo: ¡la computación electrónica! Veamos ahora un sistema telefónico moderno. Es posible elegir otros teléfonos para comunicarse con ellos; no sólo eso, sino que pueden procesarse muchas llamadas al mismo tiempo. Se puede anteponer un prefijo y conectarse así con diferentes áreas. Se puede llamar directamente, a través del operador, por cobrar, a pagar mediante carta de crédito, persona a persona. Se pueden invertir los pasos de una llamada, o determinar su fuente. Existe una señal de teléfono ocupado. Existe una señal con sonido de sirena para indicar que el número discado no está "bien formado", o que hemos demorado excesivamente en discar. Existen conmutadores que permiten conectar a un grupo de teléfonos situados en un lugar determinado . . . etcétera, etcétera. Esta lista es asombrosa, si se considera la flexibilidad que presenta, en comparación con el otrora milagroso teléfono "desnudo".

Ahora bien, los refinados sistemas operativos realizan análogas operaciones de manejo del tráfico y de desplazamiento de niveles con respecto a los usuarios y sus programas.

Es prácticamente indudable que hay acá cierto paralelo con fenómenos propios del cerebro: manejo de muchos estímulos simultáneos; decisiones acerca de prioridades y plazo de mantenimiento de éstas; "interrupciones" momentáneas causadas por emergencias u otros hechos inesperados; y así siguiendo.

Amortiguadores para el usuario y protección para el sistema

La gran cantidad de niveles de un sistema complejo de computadora se combinan para "amortiguar" al usuario, evitándole tener que pensar en

el funcionamiento de los muchos niveles inferiores, los cuales, es lo más probable, carecen de toda importancia para él, de cualquier manera. Por lo general, un pasajero de avión no necesita preocuparse por el nivel de combustible de los tanques, o por la velocidad de los vientos, o por la cantidad de pollo que ha de servirse para la cena, o por la situación del tráfico aéreo alrededor del punto de destino: todo ello es dejado en manos del personal ubicado en los distintos niveles de la jerarquía de la aerolínea; el pasajero se limita a viajar entre un lugar y otro. Y también aquí ocurre que, sólo cuando algo funciona *erróneamente* —como, por ejemplo, que su equipaje no haya llegado—, el pasajero se entera del complicado sistema de niveles que se extiende debajo suyo.

¿Las computadoras son superflexibles o superrígidas?

Uno de los objetivos principales, en la búsqueda de niveles más altos, ha sido siempre el de tratar de convertir en algo lo más natural posible la tarea de comunicar a la computadora qué se requiere de ella. Sin duda, las construcciones de alto nivel en lenguajes compiladores están mucho más cerca de los conceptos que los seres humanos piensan naturalmente, en comparación con las construcciones de bajo nivel, tales como las del lenguaje de máquina. En esta tendencia hacia la sencillez de la comunicación, sin embargo, uno de los aspectos de la "naturalidad" ha sido desatendido por completo. Se trata del hecho de que la comunicación interhumana tiene constricciones mucho menos rígidas que la comunicación entre seres humanos y máquinas. Por ejemplo, cuando perseguimos la forma más adecuada de expresar algo, frecuentemente producimos fragmentos de oraciones que carecen de sentido, carraspeamos en mitad de las frases, nos interrumpimos recíprocamente con nuestros interlocutores, utilizamos descripciones ambiguas y formas sintácticas incorrectas, inventamos expresiones y distorsionamos significados . . . pero así y todo nuestro mensaje consigue completarse en su mayor parte. Con los lenguajes de programación, se ha seguido generalmente la regla de establecer una sintaxis sumamente estricta, la cual ha de ser aplicada de modo riguroso; no hay palabras ni construcciones ambiguas. Es interesante el hecho de que esté permitido el equivalente impreso del carraspeo (es decir, un comentario inesencial o carente de relevancia), pero únicamente si se lo ha establecido en forma previa mediante una clave (por ejemplo, la palabra COMENTARIO), a cuyo final debe ir, como cierre, otra palabra clave (un punto y coma, digamos). Esta leve inclinación a la flexibilidad contiene, irónicamente, su propia trampa: si es utilizado un punto y coma (o cualquier palabra clave señalada para finalizar un comentario) en el interior de un comentario, el programa de traducción interpretará que dicho punto y coma está indicando el fin del comentario y cercenará lo que sigue.

Si ha sido definido un procedimiento denominado COMPRENSION,

y luego llamado diecisiete veces por el programa, pero cuando es llamado por decimoctava vez se lo deletrea equivocadamente como COMPRESNION, ¡ay del programador! El compilador se plantará, e imprimirá un rígido y severo mensaje de error, diciendo que jamás oyó hablar de COMPRESNION. A menudo, cuando es detectado un error semejante por un compilador, éste trata de continuar, pero a causa de su falta de compresnión no puede entender qué es lo que quiere decir el programador. En realidad, puede muy bien dar por supuesto que se ha querido decir algo completamente diferente y proceder sobre la base de tal interpretación errónea; en tal caso, una larga serie de mensajes de error habrán de condimentar el resto del programa, pues el compilador —no el programador— se ha confundido. Imaginemos el caos que se produciría si un intérprete simultáneo de inglés-ruso, luego de escuchar una expresión francesa insertada en un discurso en inglés, se pusiera a tratar de interpretar el resto íntegro del discurso inglés como si fuese francés. Los compiladores suelen extraviarse de esta dramática manera. *C'est la vie.*

Quizá esto parezca una impugnación a las computadoras, pero no es así. En algún sentido, las cosas tienen que desenvolverse de esta forma. Si uno se detiene a pensar por qué tanta gente utiliza computadoras, comprende que es para que realicen tareas definidas y precisas, caracterizadas por el hecho de ser excesivamente complejas para que se aboquen a ellas las personas. Para que sea posible confiar en la computadora, es imprescindible que ésta comprenda, sin que se deslice ni la más remota ambigüedad, qué se espera de ella. Es necesario, también, que no haga ni más ni menos que lo establecido explícitamente por las instrucciones. Si la amortiguación ubicada por debajo del programador incluye un programa cuyo objeto sea "conjeturar" qué desea o qué quiere decir el programador, es muy probable que el programador sea totalmente malinterpretado cuando pretenda comunicar en qué consiste su tarea. En consecuencia, si bien resulta cómoda para el ser humano, la programación de alto nivel deberá ser precisa e inequívoca.

Anticiparse a las conjeturas del usuario

Ahora bien, es posible idear un lenguaje de programación —y un programa que lo traduzca a niveles inferiores— que permita cierto género de imprecisiones. Una forma de plantear esto sería decir que un traductor de aquel lenguaje de programación tratará de encontrarle sentido a elementos que han sido elaborados "fuera de las reglas del lenguaje". Sin embargo, si un lenguaje permite algunas "transgresiones", ¡éstas ya no lo son cabalmente, puesto que han sido incluidas en las reglas! Si un programador sabe que puede cometer ciertos errores de deletreo, le es posible entonces hacer uso deliberado de aquel rasgo del lenguaje, pues sabe que está operando, en realidad, dentro de las rígidas reglas del mismo, pese a las apa-

riencias. En otros términos, si el usuario está enterado de todas las flexibilidades programadas, para su conveniencia, en el traductor, conoce entonces los límites que no puede rebasar y, en consecuencia, el traductor se le aparecerá todavía como algo rígido e inflexible, a pesar de que le permite una libertad mucho mayor que las primeras versiones de lenguaje, las que carecían de "corrección automática de errores humanos".

Frente a lenguajes "elásticos" de este tipo, habría una alternativa: 1) el usuario está enterado de las flexibilidades incorporadas al lenguaje y a su traductor; 2) el usuario no está enterado de las mismas. En el primer caso, el lenguaje mantiene su aptitud para comunicar programas con precisión, ya que el programador puede predecir cómo va a interpretar la computadora los programas que él formula en el lenguaje. En el segundo caso, la "amortiguación" cuenta con aspectos ocultos que pueden dar lugar a cosas inesperadas (para el particular punto de vista de un usuario que desconoce el funcionamiento interior del traductor). Esto puede resultar en graves malinterpretaciones de programas, de modo que tal lenguaje se hace inadecuado con relación a objetivos que necesitan principalmente rapidez y seguridad por parte de la computadora.

En verdad, hay una tercera opción: 3) el usuario está enterado de las flexibilidades incorporadas al lenguaje y a su traductor, pero éstas son tantas e interactúan de una manera tan compleja, que no se puede determinar cómo serán interpretados los programas. Esto puede ser muy bien ilustrado por el caso de la persona que formuló el programa de traducción: indudablemente, conoce el contenido del programa mejor que nadie, pero no le es posible anticipar cómo habrá de reaccionar frente a ciertas construcciones inusuales.

Una de las áreas sobresalientes de investigación en la actualidad, en materia de inteligencias artificiales, es la conocida como *programación automática*, la cual se interesa por el desarrollo de los lenguajes de más alto nivel que existen; lenguajes cuyos traductores son muy refinados, al punto de poder realizar, cuando menos, algunas de estas impresionantes tareas: generalizar a partir de ejemplos; corregir ciertos errores gramaticales o de impresión; probar de otorgarle sentido a descripciones ambiguas; tratar de adelantarse a las conjeturas del usuario mediante el empleo de un modelo de usuario original; hacer preguntas frente a cuestiones que no están claras; usar el idioma en sus expresiones, etc. Lo que uno espera es poder recorrer la cuerda floja tendida entre precisión y flexibilidad.

Los progresos en materia de inteligencias artificiales son progresos en materia de lenguajes

Es sorprendente lo directo de la relación que existe entre los progresos que obtiene la ciencia de las computadoras (en especial, lo referente a inteligencias artificiales) y el desarrollo de nuevos lenguajes. En la década

anterior surgió una nítida tendencia: consolidar los descubrimientos relativos a nuevos lenguajes. Una clave para la comprensión y la creación de inteligencias reside en el desarrollo y refinamiento constantes de los lenguajes encargados de describir los procesos de manipulación simbólica. Hay en la actualidad alrededor de tres o cuatro docenas de lenguajes experimentales, aparecidos como consecuencia, exclusivamente, de las investigaciones sobre inteligencias artificiales. Es importante percatarse de que cualquiera de los programas que pueden ser formulados en uno de estos lenguajes es programable, en principio, en lenguajes de nivel más bajo, pero ello requeriría un esfuerzo tremendo por parte del ser humano y, además, el programa resultante sería tan extenso que excedería los alcances de la aprehensión humana. No se trata de que todo nivel más alto amplíe el potencial de la computadora: todo este potencial ya está presente en su conjunto de instrucciones en lenguaje de máquina. Se trata de que los nuevos conceptos contenidos en un lenguaje de alto nivel sugieren, por su misma naturaleza, orientaciones y perspectivas.

El "espacio" de todos los programas posibles es tan gigantesco que nadie puede hacerse una idea al respecto. Todo lenguaje de nivel más alto deriva, naturalmente, de la exploración de ciertas regiones del "espacio de programa"; de tal modo, el programador, a través de la utilización de ese lenguaje, es orientado hacia aquellas áreas del espacio de programa. El lenguaje no lo *obliga* a formular programas de determinado tipo, sino que le hace más *fácil* la realización de ciertas tareas. La proximidad con respecto a un concepto, más un suave empujón, es todo lo que suele hacer falta para arribar a un descubrimiento mayor: y éste es el motivo que anima a la búsqueda de lenguajes dotados de niveles cada vez más altos.

Programar en diferentes lenguajes es como componer en diferentes tonalidades, en especial si se trabaja en el teclado. Para quien aprendió o compuso piezas en muchas tonalidades, cada tonalidad tendrá su propia y especial resonancia emotiva. Asimismo, cierta clase de figuraciones se le hará presente como si surgiese por sí sola en una tonalidad, pero en otra no le resultará tan fácil. De manera, pues, que la elección de tonalidad imprime una orientación. En algunos casos, inclusive tonalidades inarmónicas, como podrían serlo las de Do sostenido y Re bemol, provocan sentimientos enteramente distintos. Esto muestra la manera en que un sistema notacional puede desempeñar un papel significativo en el moldeamiento del resultado final.

La figura 59 exhibe una representación "estratificada" de inteligencia artificial, en la cual encontramos partes de máquina, tales como transistores, en la base, y "programas inteligentes" en la cúspide. Esta ilustración ha sido tomada del libro *Artificial Intelligence*, de Patrick Henry Winston, y trasunta una concepción compartida por casi todos los especialistas en inteligencias artificiales. Si bien estoy de acuerdo con la idea de que la inteligencia artificial debe ser estratificada de una manera semejante a ésta, no creo que, luego de tan pocos estratos, se puedan alcan-

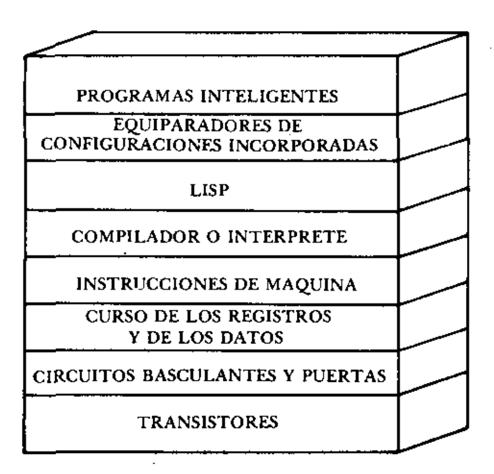


Figura 59. Para crear programas inteligentes, es necesario construir una serie de niveles de hardware y de software, a fin de evitar la angustia de verlo todo únicamente en el nivel más bajo. Las descripciones en distintos niveles de un mismo proceso darán la impresión de ser muy diferentes entre sí, pero sólo cuando el nivel superior esté lo suficientemente articulado en bloques como para que nos sea comprensible. [Adaptado de P. H. Winston, Artificial Intelligence *(Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977).]*

zar los programas inteligentes. Estoy convencido de que, entre el nivel del lenguaje de máquina y el nivel donde se llegue a la inteligencia misma, tiene que haber quizá una docena (¡o, inclusive, varias docenas!) más de estratos, donde cada uno de éstos se apoye en las flexibilidades del anterior y las extienda. En qué consistirán es algo que difícilmente podamos imaginar ahora . . .

El paranoico y el sistema operativo

La similitud que existe entre todos los niveles de un sistema de computadora puede provocar algunas extrañas experiencias de confusión de niveles. Tuve una vez la oportunidad de observar a dos de mis amigos —ambos en su etapa de aprendizaje— jugando, en una terminal, con el programa "PARRY". PARRY es un programa, bastante desacreditado, que imita a un paranoico de manera sumamente rudimentaria mediante el recurso de espetar expresiones grabadas, en inglés, que incluyen un amplio repertorio. El interés de este programa obedece a su capacidad de indicar cuáles, de entre las expresiones almacenadas, pueden parecer razonables para responder a las frases que, en inglés, le formula por escrito un ser humano.

En una ocasión, el tiempo de respuesta fue excesivo —PARRY se tomaba demasiado tiempo para responder— y expliqué entonces a mis amigos que ello se debía, probablemente, a las pesadas exigencias que soportaba el sistema de tiempo compartido. Les dije que ellos podían saber cuántos usuarios estaban contribuyendo a ello si imprimían un carácter especial, de "control", el cual se dirigiría directamente al sistema operativo, sin ser advertido por PARRY. Uno de mis amigos oprimió el carácter de control. Instantáneamente, aparecieron en la pantalla ciertos datos internos, relativos a la situación del sistema operativo, desplazando algunas

de las palabras de PARRY. PARRY no sabía nada de esto: es un programa que sólo "sabe" de carreras de caballos y de apuestas, no de sistemas operativos, ni de terminales, ni de caracteres especiales de control. Para mis amigos, sin embargo, PARRY y el sistema operativo eran, los dos, simplemente "la computadora": una entidad misteriosa, remota, amorfa, que les respondía cada vez que ellos imprimían una interrogación. Y así, les pareció perfectamente razonable que uno de ellos imprimiera idiomáticamente, muy suelto de cuerpo, la pregunta, "¿Por qué borra usted lo que está impreso en la pantalla?" La noción de que PARRY pudiera carecer de todo conocimiento acerca del sistema operativo que lo estaba procesando no había sido bien captada por mis amigos. La idea de que "usted" lo sabe todo acerca de "sí mismo" es tan corriente, en virtud del contacto con las demás personas, que fue natural extenderla a la computadora . . . ¡al fin y al cabo, ésta era lo suficientemente inteligente como para "hablarles" en inglés! La pregunta de mis amigos no se distinguió mucho de preguntarle a una persona, "¿Por qué elaboró tan pocos glóbulos rojos hoy?" La gente no tiene conocimiento de ese nivel —el "nivel del sistema operativo"— de su cuerpo.

La causa principal de esta confusión de niveles radicó en que la comunicación con todos los niveles tenía lugar a través de una sola pantalla, en una misma terminal. Pese a que la simpleza de mis amigos pueda parecer bastante extrema, ocurre a menudo que personas avezadas en el manejo de computadoras cometan errores similares, cuando diversos niveles de un sistema complejo concurren a la vez en la misma pantalla: olvidan a "quién" se están dirigiendo, e imprimen cosas que no tienen sentido en el nivel en el cual se ubican, pero que sí lo tendrían en otro nivel. Parecería deseable, en consecuencia, que el sistema mismo seleccione los niveles, a fin de interpretar las órdenes que "tengan sentido". Lamentablemente, tal interpretación requeriría que el sistema contase con una enormidad de sentido común, además de un perfecto conocimiento de todos los propósitos del programador: para ello, se necesita más inteligencia artificial de la que existe en la actualidad.

La frontera entre software y hardware

También puede crear confusión la flexibilidad de algunos niveles y la rigidez de otros. En algunas computadoras, por ejemplo, hay sistemas prodigiosos de compaginación de textos, los cuales hacen posible que distintas secciones de textos sean "vertidas" de un formato a otro, casi del modo en que un líquido es vertido de un recipiente a otro. Una página estrecha puede convertirse en una página ancha y viceversa. Ante ello, se podría esperar que fuese igualmente sencillo pasar de un tipo de letra a otro: digamos, de romanas a *itálicas*. Sin embargo, puede que no haya sino un tipo disponible en la pantalla, de modo que tales cambios sean

impracticables. O bien, podría ser que la pantalla los permitiese pero que la impresora no los pudiese imprimir o a la inversa. Luego de que uno se ha dedicado a las computadoras durante mucho tiempo, se torna exigente y piensa que todo es programable: ninguna impresora, entonces, debería ser tan rígida que no tenga más que un solo juego de caracteres, o inclusive un repertorio finito de éstos . . . ¡los tipos de letras deberían ser especificados por el usuario! Ahora bien, una vez obtenido ese grado de flexibilidad, uno puede sentirse incomodado porque la impresora no puede imprimir en diferentes colores, o porque no admite papeles de todas las formas y tamaños, o porque no se repara a sí misma cuando sufre un desperfecto . . .

La dificultad reside en que, en alguna parte, toda esta flexibilidad tiene que "sanearse", para usar la expresión del Capítulo V. Deberá existir un nivel de hardware que subyazca a todo y que sea inflexible. Podrá estar ubicado en profundidades recónditas, y haber tanta flexibilidad en los niveles de más arriba, que pocos usuarios lleguen a advertir las limitaciones del hardware, pero éste, inevitablemente, permanecerá allí.

¿En qué consiste la clásica distinción entre *software* y *hardware*? Es la distinción entre programas y máquinas: entre largas y complicadas secuencias de instrucciones y las máquinas físicas que las cumplen. Me gusta considerar al software como "todo aquello que puede ser transmitido más allá de las líneas telefónicas", y al hardware como "toda otra cosa". Un piano es hardware, pero la música impresa es software. Un aparato telefónico es hardware, pero un número telefónico es software. La distinción es provechosa pero no siempre tan tajante.

Los seres humanos también tenemos aspectos "software" y "hardware", y la diferencia entre unos y otros constituye una segunda naturaleza en nosotros. Estamos habituados a la rigidez de nuestra fisiología: no podemos curar nuestras enfermedades con sólo desearlo, o conseguir que el cabello nos crezca del color que se nos ocurra, para mencionar únicamente un par de ejemplos sencillos. Sin embargo, podemos "reprogramar" nuestras mentes a fin de que operen dentro de nuevos marcos conceptuales. La extraordinaria flexibilidad de nuestras mentes parece casi irreconciliable con la noción de que nuestros cerebros deben estar compuestos por reglas fijas de hardware, las cuales no pueden ser reprogramadas. No podemos conseguir que nuestras neuronas se exciten con mayor o menor rapidez, no podemos rehacer los circuitos de nuestros cerebros, no podemos rediseñar el interior de una neurona, no podemos ejercitar *ninguna* opción con respecto al hardware . . . Sin embargo, podemos controlar la manera en que pensamos.

Pero hay, sin duda, aspectos del pensamiento que están más allá de nuestro control. No podemos hacernos más talentosos mediante un acto de voluntad; no podemos aprender un idioma nuevo con la rapidez que querríamos; no podemos, por nosotros mismos, agregar velocidad a nuestros pensamientos; no podemos, por nosotros mismos, llegar a pensar

en varias cosas al mismo tiempo; y así siguiendo.

Este es un género de autoconocimiento primordial cuyo carácter obvio, precisamente, lo hace difícil de percibir: algo parecido a lo que sucede con el aire que nos rodea. Jamás nos preocupamos, realmente, por reflexionar acerca de lo que puede ser la causa de esas "imperfecciones" de nuestra mente, a saber: la organización de nuestro cerebro. Proponer formas de reconciliación entre el software de la mente y el hardware del cerebro es uno de los objetivos principales de este libro.

Los niveles intermedios y el clima

Hemos visto que en los sistemas de computadora existen varios estratos bastante rigurosamente definidos; la operación de un programa en proceso puede ser descripta en función de cualquiera de ellos. No hay, pues, un único nivel bajo y un único nivel alto, sino toda una graduación, tanto hacia un extremo como hacia el otro. La existencia de niveles intermedios, ¿es un rasgo común de los sistemas que cuentan con bajo y alto nivel? Consideremos, por ejemplo, el sistema cuyo "hardware" es la atmósfera de la tierra (no tan "hard" —duro—, pero no importa), y cuyo "software" es el clima. Seguir el movimiento simultáneo de todas las moléculas sería una forma de muy bajo nivel de "comprender" el clima, y no la consideración de un enorme y complicado programa en el nivel del lenguaje de máquina. Obviamente, esa forma sobrepasa las posibilidades de captación humana. Sin embargo, conservamos nuestras propias formas, peculiarmente humanas, de observar y describir los fenómenos climáticos. Nuestra visión, articulada en bloques, del clima, está basada en fenómenos de muy alto nivel, tales como: lluvia, niebla, nevada, huracanes, frentes fríos, estaciones, presiones, alisios, la corriente de chorro, nubes de lluvia, tormentas eléctricas, capas de inversión térmica, etc. Todos estos fenómenos involucran una cantidad astronómica de moléculas, las cuales se conciertan de alguna manera para conseguir que emerjan los efectos de gran escala. Esto tiene algún parecido con la consideración del clima en un lenguaje compilador.

¿Existe algo que tenga analogía con la consideración del clima en un lenguaje de nivel intermedio, tal como un lenguaje ensamblador? ¿Hay, pongamos por caso, pequeñas "minitormentas" locales, cosas como los reducidos torbellinos que suelen verse, arremolinando polvo en columnas de muy escasos metros de diámetro? Una ráfaga de viento en un sitio determinado, ¿es un bloque de nivel intermedio que cumple un papel en la generación de fenómenos climáticos de nivel más alto? ¿O no hay, sencillamente, formas prácticas para combinar el conocimiento de tales tipos de fenómenos en una explicación más amplia del clima?

Se me ocurren otras dos preguntas. La primera es: "¿Sería posible que los fenómenos climáticos que percibimos en nuestra escala —un tornado,

una sequía— fuesen tan sólo fenómenos de nivel intermedio: partes de fenómenos más vastos y despaciosos?" Si es así, entonces los verdaderos fenómenos climáticos de alto nivel serían globales, y su escala temporal la geológica. La edad del hielo sería un acontecimiento climático de alto nivel. La segunda pregunta es: "¿Hay fenómenos climáticos de nivel intermedio que hayan escapado por completo a la percepción humana, pero que, en caso de ser percibidos, aportarían un conocimiento mucho mayor acerca de por qué el clima es como es?"

De los tornados a los quarks

Esta última sugerencia puede parecer arbitraria, pero no lo es tanto. Nos basta con observar la más rigurosa de las ciencias rigurosas —la física— para encontrar singulares ejemplos de sistemas que son explicados en función de la interacción de "partes", las cuales son invisibles. En la física, como en cualquier otra disciplina, un *sistema* es un grupo de *partes* que interactúan. En la mayoría de los sistemas que conocemos, las partes retienen su identidad en el transcurso de la interacción, de modo que podemos seguir viéndolas en el interior del sistema. Por ejemplo, cuando se reúne un equipo de futbol en asamblea, los jugadores retienen su individualidad: no la disuelven en alguna clase de entidad compuesta, la cual confundiría las particularidades personales. Sin embargo —y esto es importante— en sus cerebros se ponen en marcha ciertos procesos, los cuales son desencadenados por el contexto colectivo y que de otra manera no tendrían lugar; así, en escala menor, los jugadores modifican su identidad cuando se convierten en parte del sistema mayor, el equipo. Este tipo de sistema es llamado *sistema cercano a la descomponibilidad* (noción que proviene del artículo de H. A. Simon, *The Architecture of Complexity*; véase la Bibliografía). Tal sistema consiste en módulos débilmente interactivos, cada uno de los cuales conserva su identidad propia durante la interacción; sin embargo, experimentan una leve diferenciación con respecto a cómo son fuera del sistema, lo que les permite contribuir al funcionamiento cohesionado de todo aquél. Los sistemas estudiados por la física son, generalmente, de esta clase. Se considera que un átomo, pongamos por caso, está formado por un núcleo cuya carga positiva captura cierta cantidad de electrones, a los que mantiene en "órbitas", o estados ligados, alrededor suyo. Estos electrones ligados son sumamente semejantes a los electrones libres, pese a su carácter de elementos internos de un objeto compuesto.

Algunos de los sistemas estudiados por la física ofrecen un contraste en relación con el relativamente sencillo átomo. Un ejemplo lo da el núcleo del átomo, el cual suele ser descripto como "un conjunto de protones y neutrones". Pero las fuerzas que compelen a las partículas componentes a mantenerse juntas son tan podersosas, que dichas partículas no sobrevi-

ven a través de ninguna manera que se asemeje a su forma "libre" (la forma que presentan cuando no pertenecen a un núcleo). En realidad, además, un núcleo actúa, en muchos aspectos, como una partícula individual y no como un conjunto de partículas en interacción. Cuando un núcleo es fragmentado, los protones y los neutrones quedan a menudo en libertad, pero también ocurre que son producidas otras partículas, por lo general, tales como mesones pi y rayos gamma. ¿Estaban físicamente presentes estas diferentes partículas en el interior del núcleo, antes de ser éste fragmentado, o sólo son "chispas" que se desprenden con la fragmentación? Procurar una respuesta a tal pregunta quizá no sea importante. En el nivel de la física de las partículas, no es muy clara la diferencia existente entre almacenar el potencial que produzca "chispas" y almacenar subpartículas concretas.

Un núcleo es, así, un sistema cuyas "partes", aun cuando no sean visibles mientras permanecen en el interior de aquél, pueden ser extraídas y puestas a la vista. Y hay otros casos patológicos: los del protón y el neutrón vistos a su vez como sistemas. Se supone de ambos, por vía de hipótesis, que están constituidos por una terna de "quarks": partículas hipotéticas que pueden ser combinadas de a dos, o de a tres, formando de tal modo muchas partículas fundamentales. Sin embargo, la interacción entre quarks es tan fuerte que, además de no poder ser vistos en el interior del protón y del neutrón, ¡no pueden ser extraídos de allí de ninguna manera! En consecuencia, aunque los quarks contribuyen a la comprensión teórica de ciertas propiedades de los protones y de los neutrones, es posible que nunca se pueda establecer su propia existencia independiente. Tenemos aquí, entonces, la antítesis de un "sistema cercano a la descomponibilidad": o sea, un sistema del cual, si algo se puede señalar, es su carácter "cercano a la indescomponibilidad". Con todo, es curioso que las teorías sobre protones y neutrones (y otras partículas) basadas en los quarks cuentan con una notable capacidad esclarecedora, mostrada por el hecho de que gran cantidad de resultados experimentales relativos a las partículas de las cuales se da por supuesto que están constituidas por quarks pueden ser perfectamente explicados, de modo cuantitativo, mediante el empleo del "modelo quark".

La superconductividad: una "paradoja" de renormalización

En el Capítulo V hablamos de la manera en que las partículas renormalizadas surgían de sus centros desnudos, merced a interacciones recursivamente elaboradas con partículas virtuales. Una partícula renormalizada puede ser vista así, como compleja construcción matemática, o bien como el gránulo individual que, físicamente, es. Una de las más extrañas y dramáticas consecuencias que se derivan de esa forma de describir las

partículas es la explicación que proporciona acerca del célebre fenómenos de la *superconductividad*: el flujo de electrones, libre de resistencia, en ciertos sólidos sometidos a temperaturas extremadamente bajas.

Resulta que esos electrones son renormalizados a través de sus interacciones con curiosos quanta de vibración llamados *fonones* (¡también ellos renormalizados!). Estos electrones renormalizados son llamados *polarones*. Los cálculos muestran que, a temperaturas muy bajas, dos polarones que rotan en sentido opuesto comienzan a atraerse, y pueden muy bien llegar a unirse de determinada manera. Bajo condiciones adecuadas, todos los polarones que transportan corriente se aparearán, formando *pares de Cooper*. Lo paradójico es que tal apareamiento sucede, precisamente, porque los electrones —los centros desnudos de los polarones apareados— se repelen eléctricamente entre sí. En contraste con los electrones, ningún par de Cooper experimenta atracción ni repulsión hacia cualquier otro par; por consiguiente, pueden deslizarse libremente a través de un metal, como si éste fuese un vacío. Si la descripción matemática de tal metal, donde las unidades originales sean polarones, es transformada en otra, donde esas unidades sean pares de Cooper, se obtendrá un conjunto considerablemente simplificado de ecuaciones. Esta simplicidad matemática es el modo a través del cual los físicos saben que la articulación en "bloques", representada por los pares de Cooper, es la perspectiva natural para estudiar la superconductividad.

Tenemos aquí varios niveles de partículas: el par de Cooper mismo; los dos polarones en rotación opuesta que lo componen; los electrones y fonones que dan lugar a los polarones, y después, los fotones y positrones virtuales en el interior de los electrones, etc. Podemos observar cada nivel y percibir fenómenos en él, que son explicados por el conocimiento que se haya adquirido acerca de los niveles anteriores.

"Tabicamiento"

Análogamente, y por suerte, no es necesario saberlo todo a propósito de los quarks para comprender muchas cosas relativas a las partículas que éstos componen. Así, un físico nuclear puede manejarse con teorías de los núcleos que se basen en protones y neutrones, e ignorar las teorías de los quarks y las que compiten con éstas. El físico nuclear tiene una imagen articulada en *bloques* de los protones y los neutrones: una descripción que deriva de teorías de nivel más bajo, pero que no requiere el conocimiento de las teorías de ese nivel. Del mismo modo, un físico atómico tiene una imagen articulada en bloques de un núcleo atómico, derivada de la teoría nuclear. Y un químico tiene una imagen articulada en bloques de los electrones y sus órbitas, y elabora teorías sobre las moléculas pequeñas, teorías que pueden ser asumidas, articulándolas en bloques, por los biólogos moleculares, quienes tienen una idea a propósito de cómo se

reúnen las moléculas pequeñas, pero cuya experiencia específica tiene lugar en el campo de las moléculas sumamente grandes y el modo en que éstas interactúan. Y los biólogos celulares tienen una imagen articulada en bloques de las unidades estudiadas por los biólogos moleculares, a las que tratan de emplear para establecer cómo interactúan las células. El asunto está claro. Todo nivel, en cierto sentido, está "tabicado" con respecto a los niveles inferiores. La anterior es otra de las expresiones gráficas de Simon, alusiva a la construcción en compartimientos de los submarinos, de manera tal que si una parte es dañada, y el agua comienza a filtrarse, el peligro puede ser conjurado cerrando las puertas; separando, es decir, tabicando, el compartimiento dañado con respecto a los compartimientos vecinos.

Aunque siempre hay "goteras" dentro de los niveles jerárquicos de la ciencia, ya que un químico no puede permitirse una ignorancia total con respecto a los niveles más bajos de la física, ni un biólogo lo mismo con respecto a la química, casi no hay goteras entre niveles distantes uno de otro. Es por ello que la gente puede comprender intuitivamente a otra gente sin necesidad de comprender el modelo quark, la estructura de los núcleos, la naturaleza de la órbita de los electrones, la afinidad química, la estructura de las proteínas, los organelos de la célula, los métodos de comunicación intercelular, la fisiología de los distintos órganos del cuerpo humano, o las complejas interacciones existentes entre los órganos. Todo lo que necesita una persona es un modelo articulado en bloques de cómo actúa el nivel más alto; por lo que sabemos, tales modelos son muy veraces y logrados.

El regateo entre articulación en bloques y determinismo

Sin embargo, quizá haya un importante aspecto negativo en el modelo de bloques: carece, por lo general, de la capacidad de predecir con exactitud. Esto es, mediante el empleo de ese tipo de modelo eludimos la tarea imposible de considerar a la gente como conjuntos de quarks (o lo que fuere que existe en el nivel más bajo), pero el modelo de bloques, por supuesto, nos proporciona solamente estimaciones probabilísticas sobre lo que sienten otras personas, sobre cómo reaccionarán ante cosas que digamos o hagamos, y así por el estilo. En síntesis, al usar modelos de bloques de alto nivel, estamos sacrificando el determinismo a la simplicidad. Aunque no estemos seguros de la forma en que reaccionará la gente ante una broma, igual la hacemos, con la expectativa de que la respuesta será reírse o no reírse: en lugar de, digamos, ponerse a trepar la columna de alumbrado más cercana (¡un maestro zen sí podría hacer esto último!). Un modelo de bloques define un "espacio", dentro del cual se espera que se ubique la conducta, y especifica las probabilidades de ubicación en las diferentes partes de ese espacio.

"Las computadoras sólo pueden hacer lo que se les indica que hagan"

Ahora bien, estas ideas pueden ser tan provechosamente aplicadas a los programas de computadoras como a los sistemas físicos compuestos. Hay un viejo dicho que reza, "Las computadoras sólo pueden hacer lo que se les indica que hagan". Esto es correcto en un sentido, pero pasa por alto la siguiente circunstancia: no se conocen por adelantado las consecuencias de lo que se le dice a la computadora que haga; luego, la cónducta de ésta puede ser tan desconcertante, sorprendente e imprevisible como la de una persona. Por lo común, se conoce con anticipación el *espacio* dentro del cual se ubicará la salida, pero no se sabe detalladamente cuál será el punto de ubicación. Por ejemplo, es posible formular un programa destinado a calcular el primer millón de dígitos de π. El programa descerrajará dígitos de , hasta el final, mucho más rápido de lo que nosotros podríamos hacerlo: pero no es paradójico que la computadora deje atrás al programador. El espacio donde se ubicará el resultado es conocido con anterioridad: es el espacio que cubren los dígitos de 0 a 9; es decir que se cuenta con un modelo de bloques del comportamiento del programa. Pero si se conociera el resto, no se habría formulado el programa.

Hay otro sentido en el cual este viejo dicho también yerra. Se trata del hecho de que, cuando se programa en niveles cada vez más altos, ¡cada vez se sabe menos qué se le ha indicado a la computadora que haga! Estratos y estratos de traducción pueden separar el propósito inicial de un programa complejo de las instrucciones efectivas en lenguaje de máquina. En el nivel en el que se piensa y programa, los enunciados pueden parecer declarativos y tener el aspecto de sugerencias, más que de enunciados imperativos u órdenes. Y toda la trepidación interna que provoca la entrada de un enunciado de alto nivel nos pasa, por lo común, desapercibida, lo mismo que, cuando comemos un emparedado, no nos tomamos el trabajo de tomar conciencia del proceso digestivo que se ha desencadenado.

De todos modos, esta noción de que "las computadoras sólo pueden hacer lo que se les indica que hagan", formulada originalmente por Lady Lovelace en sus célebres memorias, se ha generalizado tanto y está tan asociada a la idea de que "las computadoras no pueden pensar", que volveremos a ella en el último capítulo, cuando nuestros niveles de apreciación hayan crecido en refinamiento.

Dos tipos de sistema

Hay una distinción importante que divide en dos tipos diferentes los sistemas constituidos por muchas partes. Hay sistemas donde el comportamiento de algunas partes tiende a *invalidar* el comportamiento de otras partes, con el resultado de que pierde importancia lo que ocurre en el ba-

jo nivel, porque casi todos los elementos, en el alto nivel, no diferencian entre sí sus respectivos comportamientos. Un ejemplo de esta clase de sistema lo ofrece un recipiente que contenga gas, donde todas las moléculas se entrechocan y detonan en formas microscópicas muy complejas; pero el resultado global, desde un punto de vista macroscópico, es un sistema sumamente calmo y estable, dotado de determinada temperatura, presión y volumen.

Y hay sistemas donde el efecto de un solo hecho en el nivel bajo puede ser *magnificado* a través de una resonancia enorme en el nivel alto. Un ejemplo de tal sistema lo encontramos en una máquina de *pinball*, donde el ángulo exacto en el que una bola golpee cada poste es fundamental para determinar el resto de su curso descendente.

Una computadora es una elaborada combinación de los dos sistemas. Contiene subunidades tales como hilos metálicos, cuyo comportamiento es altamente predictible: conducen electricidad ajustándose a la ley de Ohm, que es una ley muy precisa, articulada en bloques, parecida a las leyes que gobiernan los gases contenidos en el recipiente, puesto que depende de los efectos estadísticos resultantes de billones de efectos azarosos que se invalidan entre sí, lo cual genera un comportamiento total predictible. Una computadora también contiene subunidades macroscópicas, tales como una impresora, cuyo comportamiento está enteramente determinado por delicados patrones de intensidades eléctricas. Lo que resulta impreso de ninguna manera emana de una miríada de efectos microscópicos de cancelación. En realidad, en el caso de la mayor parte de los programas de computadoras, el valor de cada bit individual del programa cumple una función decisiva en la salida que es impresa. Si cualquier bit es modificado, también la salida se modifica radicalmente.

Los sistemas formados exclusivamente por subsistemas "seguros" —es decir, subsistemas cuyo comportamiento pueda ser predicho con seguridad, gracias a descripciones por bloques— juegan un papel de importancia inestimable en nuestra vida cotidiana, pues son garantías de estabilidad. Podemos confiar en que las paredes no se vengan abajo, en que las calles se dirijan adonde lo hacían ayer, en que el sol alumbre, en que los relojes indiquen la hora correctamente, etc. Los modelos de bloques correspondientes a esos sistemas son, virtualmente, por completo deterministas. Por supuesto, la otra clase de sistema que gravita de modo significativo en nuestra vida es la dotada de un comportamiento variable, el cual depende de ciertos parámetros microscópicos internos —cuya cantidad suele ser muy grande, además— que eluden nuestra observación directa. Nuestro modelo de bloques de un sistema así estará formulado necesariamente en función del "espacio" de operación, y comprenderá estimaciones probabilísticas acerca de las diferentes regiones de ese espacio donde pueda producirse el desembarco.

Un contenedor de gas que, como ya puntualicé, es un sistema confiable a causa de los múltiples efectos de cancelación que se producen, obedece

a rigurosas y deterministas leyes de la física. Son *leyes articuladas en bloques*, en la medida en que consideran el gas como un conjunto e ignoran sus constituyentes. Asimismo, la descripción microscópica y la macroscópica de un gas utilizan términos totalmente diferentes. La primera requiere que se especifiquen la posición y la velocidad de cada una de las moléculas componentes; la segunda requiere únicamente la especificación de tres nuevos fenómenos: temperatura, presión y volumen, los dos primeros de los cuales ni siquiera tienen equivalentes microscópicos. La simple relación matemática que vincula estos tres parámetros —$pV = cT$, donde c es una constante— es una ley supeditada a los fenómenos de nivel más bajo, pero es independiente de éstos. Por otra parte, es una ley que permite ignorar por completo el nivel más bajo, si así se quiere; es en este sentido que es independiente del nivel más bajo.

Es importante entender que la ley de alto nivel no puede ser formulada utilizando el vocabulario de la descripción de bajo nivel. "Presión" y "temperatura" son términos nuevos, que no pueden ser alcanzados a través de la sola experiencia con el nivel bajo. Los seres humanos podemos percibir directamente la temperatura y la presión; esto se explica por el modo en que estamos construidos, por lo cual no es sorprendente que hayamos podido descubrir esta ley. Pero las criaturas que solamente conozcan los gases como construcciones matemáticas teóricas deberían contar con la capacidad de sintetizar conceptos nuevos para poder idear esta ley.

Epifenómenos

Para cerrar este capítulo, me gustaría narrar un cuento relativo a un sistema complejo. Conversaba yo un día con dos programadores de sistemas de la computadora que estaba usando. Decían ellos que el sistema operativo se mostraba capaz de arreglarse para satisfacer con gran comodidad a cerca de treinta y cinco usuarios, pero que a partir de ese número, poco más o menos, el tiempo de respuesta se dilataba súbitamente, llegando a ser tan lento que uno podía hacer el registro y luego irse a su casa a esperar. En broma, dije, "¡Bueno, esto es fácil de solucionar: basta con ubicar el sitio del sistema operativo donde está almacenado el número '35', y cambiarlo por '60'!" Festejaron mi ocurrencia. La gracia reside, por supuesto, en que tal sitio no existe. ¿Dónde aparece, entonces, el número crítico: 35 usuarios? La respuesta es: *Es una consecuencia visible de toda la organización del sistema: un "epifenómeno".*

Lo mismo sería preguntarle a un atleta, "¿Dónde está almacenado el '11' que lo hace a usted capaz de correr 100 metros en 11 segundos?" Obviamente, en ninguna parte. Esa marca es resultado de cómo está construido el corredor, de cuál es su tiempo de reacción y de un millón más de factores, todos en interacción cuando aquél corre. La marca es perfectamente reproducible, pero no está almacenada en ninguna parte de su

cuerpo. Está diseminada en todas las células de su organismo y sólo se manifiesta a *través de la carrera misma*.

Los epifenómenos abundan. En el juego del "go", existe la situación en que "subsisten dos ojos". No está construida por las reglas, pero es una consecuencia de las reglas. En el cerebro humano hay credulidad. ¿Cuán crédulo es uno? ¿La credulidad se localiza en algún "centro de la credulidad", dentro del cerebro? ¿Un neurocirujano podría ubicarlo y realizar alguna suerte de complicada operación que haga decrecer la credulidad, u optar por dejarlo en paz? Si el lector cree que la respuesta a lo anterior es afirmativa, ello revela que es bastante crédulo, y que quizá debería pensar en someterse a tal operación.

Mente *vs.* cerebro

En los capítulos venideros nos explayaremos acerca del cerebro; examinaremos entonces si el nivel superior del cerebro —la mente— puede ser comprendido sin necesidad de comprender los *niveles más bajos* de los cuales, a la vez, depende y no depende. ¿Hay leyes del pensamiento que estén "tabicadas" con respecto a las leyes de más abajo que gobiernan la actividad microscópica de las células del cerebro? ¿La mente puede ser "rebanada" del cerebro y trasplantada a otros sistemas? ¿O bien es imposible discernir subsistemas nítidos y modulares dentro de los procesos del pensamiento? ¿El cerebro es semejante a un átomo, a un electrón renormalizado, a un núcleo, a un neutrón o a un quark? ¿La conciencia es un epifenómeno? Para comprender la mente, ¿es necesario hacer todo el recorrido descendente hasta el nivel de las células nerviosas?

Figura 60. Adaptación del dibujo del autor. [MU = MU; ¡HOLISM = HOLISMO!; REDUCTIONISM = REDUCCIONISMO.]

. . . Y *fuga. . . hormiguesca*

. . . entonces, una a una, suenan las cuatro voces de la fuga.)

Aquiles: Sé que ustedes no lo creerán, pero la respuesta a la pregunta está ahí, ante nosotros, escondida en la ilustración. Consiste simplemente en una palabra, pero qué palabra tan importante: ¡"MU"!

Cangrejo: Sé que ustedes no lo creerán, pero la respuesta a la pregunta está ahí, ante nosotros, escondida en la ilustración. Consiste simplemente en una palabra, pero qué palabra tan importante: ¡"HOLISMO"!

Aquiles: Espérese un minuto. Usted debe estar viendo visiones. ¡Está claro como el día que el mensaje de la ilustración es "MU", no "HOLISMO"!

Cangrejo: Le ruego me disculpe, pero mi vista es excelente. Por favor, vuelva a mirar, ¡y dígame luego si la ilustración no dice lo que yo digo que dice!

Oso Hormiguero: Sé que ustedes no lo creerán, pero la respuesta a la pregunta está ahí, ante nosotros, escondida en la ilustración. Consiste simplemente en una palabra, pero qué palabra tan importante: ¡"REDUCCIONISMO"!

Cangrejo: Espérese un minuto. Usted debe estar viendo visiones. ¡Está claro como el día que el mensaje de la ilustración es "HOLISMO", no "REDUCCIONISMO"!

Aquiles: ¡Otro que ve visiones! Ni "HOLISMO" ni "REDUCCIONISMO": "MU" es el mensaje, segurísimo.

Oso Hormiguero: Le ruego me disculpe, pero mi vista es clarísima. Por favor, vuelva a mirar, y dígame luego si la ilustración no dice lo que yo digo que dice.

Aquiles: ¿No ve usted que la imagen está compuesta por dos partes y que cada una de éstas es una única letra?

Cangrejo: Está usted en lo cierto en cuanto a que son dos partes, pero se equivoca en su identificación de lo que éstas son. La parte ubicada a la izquierda está completamente formada por tres repeticiones de una sola palabra: "HOLISMO"; y la parte de la derecha está formada por muchas repeticiones, en letras más pequeñas, de la misma palabra. No sé por qué las letras son de dimensiones distintas en una y otra parte, pero sí sé qué es lo que veo, y lo que veo es "HOLISMO", tan claro como el día. Cómo es que ustedes ven otra cosa es algo más allá de mi comprensión.

Oso Hormiguero: Están ustedes en lo cierto en cuanto a que son dos partes, pero se equivocan en su identificación de lo que éstas son. La parte ubicada a la izquierda está completamente formada por muchas repeticiones de una sola palabra: "REDUCCIONISMO"; y la parte de la

derecha está formada por una sola aparición, en letras más grandes, de la misma palabra. No sé por qué las letras son de dimensiones distintas en una y otra parte, pero sí sé qué es lo que veo, y lo que veo es "REDUCCIONISMO", tan claro como el día. *Cómo* es que ustedes ven otra cosa es algo más allá de mi comprensión.

Aquiles: Yo sé qué está sucediendo aquí. Cada uno de ustedes ha visto letras que componen otras letras, o están compuestas por otras letras. En la parte de la izquierda, hay ciertamente tres ejemplares de "HOLISMO", pero cada uno de ellos está compuesto por ejemplares más pequeños de la palabra "REDUCCIONISMO". Y, de manera complementaria, en la parte de la derecha hay ciertamente un "REDUCCIONISMO", pero compuesto por ejemplares más pequeños de la palabra "HOLISMO". Pues sí, todo esto está muy bien, pero a ustedes, por disputar tontamente, los árboles no los han dejado ver el bosque. Vean, ¿qué interesa discutir si lo correcto es leer "HOLISMO" o, por el contrario, "REDUCCIONISMO", cuando el método adecuado para comprender el problema es trascender la pregunta, respondiendo "MU"?

Cangrejo: Ahora veo la figura tal como la describe usted, Aquiles, pero no tengo idea de lo que quiere usted decir con esa extraña expresión de "trascender la pregunta".

Oso Hormiguero: Ahora veo la figura tal como la describe usted, Aquiles, pero no tengo idea de lo que quiere usted decir con esa extraña expresión "MU".

Aquiles: Se los voy a explicar con mucho gusto, si primero me complacen a mí, diciéndome qué significan esas extrañas expresiones, "HOLISMO" y "REDUCCIONISMO".

Cangrejo: El HOLISMO es la cosa más sencilla de captar del mundo. Consiste simplemente en la convicción de que "el todo es mayor que la suma de sus partes". Nadie en su sano juicio puede negar el holismo.

Oso Hormiguero: El REDUCCIONISMO es la cosa más sencilla de captar del mundo. Consiste simplemente en la convicción de que "un todo puede ser entendido por entero si se entienden sus partes, y la naturaleza de la 'suma' de éstas". Nadie en su sano juicio puede negar el reduccionismo.

Cangrejo: Yo niego el reduccionismo. Lo desafío a usted a que me diga, por ejemplo, cómo se entiende un cerebro a través del reduccionismo. Toda explicación reduccionista de un cerebro será inevitablemente insuficiente para explicar dónde surge la conciencia de sí mismo que experimenta un cerebro.

Oso Hormiguero: Yo niego el holismo. Lo desafío a usted a que me diga, por ejemplo, de qué modo una descripción holística de una colonia de hormigas podrá arrojar más luz que una descripción de las hormigas mismas, sus funciones, sus interrelaciones. Toda explicación holística de una colonia de hormigas será inevitablemente insuficiente para explicar dónde surge la conciencia de sí misma que experimenta una colonia de hormigas.

Aquiles: ¡Oh, no! Lo que menos deseaba yo era provocar otra polémica. De todos modos, ya que he sido testigo de la controversia, creo que mi explicación acerca del "MU" puede ser de gran ayuda. Verán ustedes, "MU" es una antigua respuesta zen que, cuando es utilizada frente a una pregunta, DESFORMULA la pregunta. En este caso, la pregunta sería, "¿El mundo debe ser entendido mediante el holismo, o mediante el reduccionismo?" Y la respuesta "MU", aquí, niega las premisas de la pregunta, las cuales consisten en que debe optarse por una u otra cosa. La desformulación de la pregunta revela una verdad más amplia: que hay un contexto mayor, dentro del cual caben la explicación holística y la reduccionista.

Oso Hormiguero: ¡Absurdo! Su "MU" es tan bobo como el "muu" de una vaca. No me interesan estos aguachirles zen.

Cangrejo: ¡Ridículo! Su "MU" es tan bobo como el "miau" de un gatito. No me interesan estos aguachirles zen.

Aquiles: ¡Caramba! Estamos a punto de llegar a un punto muerto. ¿A qué se debe su extraño silencio, señora Tortuga? Me hace sentir muy incómodo. Seguramente tiene usted algún medio para ayudarnos a salir de este embrollo, ¿no es así?

Tortuga: Sé que ustedes no lo creerán, pero la respuesta a la pregunta está ahí, ante nosotros, escondida en la ilustración. Consiste simplemente en una palabra, pero qué palabra tan importante: ¡"MU"!

(*Ni bien dice esto, entra la cuarta voz de la fuga que están oyendo, y lo hace exactamente una octava por debajo de su primera entrada.*)

Aquiles: Oh, señora Tortuga, por una vez me defrauda. Yo estaba seguro de que usted, que siempre ve más profundamente el interior de las cosas, sería capaz de resolver este dilema, pero es evidente que usted no ha podido ver más allá que yo. Bueno, creo que debería congratularme de haber visto tan lejos como la señora Tortuga, por una vez.

Tortuga: Le ruego me disculpe, pero mi vista es inmejorable. Por favor, vuelva a mirar y dígame luego si la ilustración no dice lo que yo digo que dice.

Aquiles: ¡Por supuesto que sí! Usted se ha limitado a repetir mi observación.

Tortuga: Quizá "MU" se encuentre en esta figura en un nivel más profundo que el que imagina usted, Aquiles: una octava más abajo (metafóricamente hablando). Por ahora, sin embargo, dudo de que podamos resolver la disputa en abstracto. Me gustaría ver expuestos más explícitamente los puntos de vista holístico y reduccionista; después de ello habría mayores bases para adoptar una decisión. Me gustaría mucho escuchar, por ejemplo, una descripción reduccionista de una colonia de hormigas.

Cangrejo: Quizá el doctor Oso Hormiguero nos relate algunas de sus experiencias al respecto. Al fin y al cabo, por su profesión, es en alguna medida un experto en la materia.

Tortuga: Estoy segura de que tenemos mucho que aprender de usted, doctor. ¿Podría decirnos algo más acerca de las colonias de hormigas, desde un punto de vista reduccionista?

Oso Hormiguero: Encantado. Como decía el señor Cangrejo, mi profesión me ha permitido adentrarme grandemente en el conocimiento de las colonias de hormigas.

Aquiles: ¡Me lo imagino! ¡La profesión de oso hormiguero pareciera que garantiza una gran pericia en colonias de hormigas!

Oso Hormiguero: Le ruego me disculpe: "oso hormiguero" no es mi profesión, es mi especie. Mi profesión es la de cirujano de colonias. Me especializo en corregir desórdenes nerviosos de la colonia, mediante la técnica de la extirpación quirúrgica.

Aquiles: Oh, ya veo. ¿Pero qué quiere significar usted con "desórdenes nerviosos" de una colonia de hormigas?

Oso Hormiguero: La mayor parte de mis pacientes sufren de disturbios en el habla. Usted sabe, colonias que tienen dificultades para encontrar las palabras, en situaciones cotidianas. Puede ser sumamente trágico. Yo intento remediar el problema por medio de, mmmm . . . la extirpación de la parte dañada de la colonia. Estas operaciones son a veces muy complicadas; por supuesto, se requieren años de estudio antes de poder realizarlas.

Aquiles: Pero . . ., ¿no es verdad que, antes de que uno pueda sufrir disturbios en el habla, debe contar con la facultad de hablar?

Oso Hormiguero: Correcto.

Aquiles: Puesto que las colonias de hormigas carecen de esa facultad, me siento un poco confuso.

Cangrejo: Cómo lamento, Aquiles, que no hayan estado ustedes aquí la semana pasada, cuando el doctor Oso Hormiguero y la tía Hilaria fueron mis huéspedes. Yo tendría que haber pensado en invitarlos.

Aquiles: ¿La tía Hilaria es su tía, señor Cangrejo?

Cangrejo: Oh, no, en realidad ella no es tía de nadie.

Oso Hormiguero: Ella, pobre, insiste en que todos la llamen tía, inclusive los extraños. Este es sólo uno de sus muchos y adorables caprichos.

Cangrejo: Sí, la tía Hilaria es muy excéntrica, pero tiene una personalidad tan agradable. Es una lástima que no los haya invitado la semana pasada, para conocerla.

Oso Hormiguero: Sin duda, es una de las colonias de hormigas más cultas que he conocido. Nosotros dos hemos dedicado muchas tardes enteras a conversar con ella de la más amplia gama de tópicos.

Aquiles: ¡Yo creía que los osos hormigueros eran devoradores de hormigas, no patrocinadores de su desarrollo intelectual!

Oso Hormiguero: Bueno, por cierto que no se trata de cosas incongruentes entre sí. Yo tengo magníficas relaciones con las colonias de hormigas. Lo que me como son las hormigas, no las colonias . . . y eso es beneficioso para ambas partes: para mí, y para la colonia.

Aquiles: ¿Cómo es posible que . . .

Tortuga: ¿Cómo es posible que . . .

Aquiles: . . . si sus hormigas son comidas, para una colonia de hormigas eso sea algo beneficioso?

Cangrejo: ¿Cómo es posible que . . .

Tortuga: . . . si sufre un incendio, para un bosque eso sea algo beneficioso?

Oso Hormiguero: ¿Cómo es posible que . . .

Cangrejo: . . . si sus ramas son podadas, para un árbol eso sea algo beneficioso?

Oso Hormiguero: . . . si le es recortado el cabello, para Aquiles eso sea algo beneficioso?

Tortuga: Es posible que ustedes hayan estado tan absorbidos por la discusión que no advirtieran el delicioso stretto que acaba de escucharse en esta fuga de Bach.

Aquiles: ¿Qué es un stretto?

Tortuga: Oh, perdón; pensaba que conocía usted el término: es cuando entra una voz tras otra repitiendo el mismo tema, como una demora muy breve entre las distintas entradas.

Aquiles: Si me dedico a escuchar las suficientes fugas, pronto conoceré todas estas cosas y seré capaz de distinguirlas por mí mismo, sin necesidad de que me las señalen.

Tortuga: Les presento mis excusas, amigos míos. Lamento haber interrumpido. El doctor Oso Hormiguero estaba tratando de explicar que comer hormigas es perfectamente coherente con el hecho de ser amigo de una colonia de hormigas.

Aquiles: Bueno, puedo darme cuenta, vagamente, de que el consumo de una cantidad limitada y controlada de hormigas quizá mejore la salubridad global de una colonia . . . pero lo que me resulta mucho más desconcertante es esa historia de conversaciones con colonias de hormigas. Eso es imposible. Una colonia de hormigas es simplemente un montón de hormigas que van y vienen caprichosamente, buscando alimento y construyendo un nido.

Oso Hormiguero: Si quiere usted insistir en que los árboles no le dejen ver el bosque, Aquiles, le bastará con mantener ese modo de exponer estas cosas. Pero la verdad es que las colonias de hormigas, vistas como conjuntos, son unidades perfectamente bien definidas, con sus cualidades propias, las cuales incluyen en ocasiones el dominio del lenguaje.

Aquiles: Se me hace difícil imaginarme gritando cosas en medio del bosque y escuchando lo que me contesta una colonia de hormigas.

Oso Hormiguero: ¡Qué tipo tan necio! No es así como sucede. Las colonias de hormigas no conversan oralmente, sino por escrito. ¿Se ha fijado en los senderos que hacen las hormigas para dirigirse a todos lados?

Aquiles: Oh, sí: por lo general, en línea recta desde el fregadero de la cocina hasta adentro de mi compota de durazno.

Oso Hormiguero: En realidad, algunos senderos contienen información en forma codificada. Si se conoce el sistema, se puede leer lo que están diciendo tal como si fuese un libro.

Aquiles: Notable. ¿Y se puede comunicar uno con ellas?

Oso Hormiguero: Sin la más mínima dificultad. Así es como la tía Hilaria y yo conversamos durante horas enteras. Tomo una vara y trazo senderos en el suelo húmedo, luego observo a las hormigas recorrer mis senderos. A continuación, comienza a formarse otro sendero en alguna parte. Yo disfruto sobremanera observando el desarrollo de los senderos. Cuando están adquiriendo forma, conjeturo cómo habrán de continuar (la mayoría de las veces no acierto). Una vez completado el sendero, ya sé qué me dice la tía Hilaria, y entonces me toca construir mi respuesta.

Aquiles: Tiene que haber algunas hormigas increíblemente ingeniosas en esa colonia, ya lo creo.

Oso Hormiguero: Creo que sigue usted tropezando con algunos obstáculos para comprender la diferencia de niveles que se presenta aquí. Así como no confundiría un árbol individual con el bosque, Aquiles, en este caso no debe confundir una hormiga con la colonia. Vea, todas las hormigas de tía Hilaria son totalmente mudas. ¡No pueden conversar ni para salvarse de ser comidas!

Aquiles: Pues entonces, ¿de dónde surge la capacidad de conversar? ¡Debe residir en alguna parte, en el interior de la colonia! No comprendo eso de que todas las hormigas sean no inteligentes, si la tía Hilaria puede deleitarlo a usted, durante horas, con su ocurrente cháchara.

Tortuga: Me parece que la situación no es distinta a la del cerebro humano, con su composición a partir de neuronas. Nadie sostendría, seguramente, para explicar el hecho de que una persona puede mantener una conversación inteligente, que cada célula cerebral debe consistir en un ser con inteligencia propia.

Aquiles: Oh, no, está claro que no. Con respecto a las células cerebrales, lo entiendo muy bien. Pero las hormigas . . . son otra cosa. Quiero decir, las hormigas simplemente vagan a gusto, en forma por completo azarosa, encontrando de vez en cuando una porción de alimento . . . Son libres de hacer lo que quieran, y teniendo en cuenta esa libertad, no veo en absoluto cómo su comportamiento, considerado en conjunto, pueda significar algo coherente: en particular, algo tan coherente como el comportamiento cerebral necesario para conversar.

Cangrejo: Creo que las hormigas solamente son libres en el marco de ciertas limitaciones. Por ejemplo, son libres para andar errando, para frotarse unas contra otras, para recoger diminutos elementos, para trabajar en los senderos, etc. Pero nunca se apartan de ese mundo reducido, de ese sistema hormiga donde están. Jamás se les ocurriría hacerlo, pues carecen de una mentalidad con la cual imaginar algo semejante. En consecuencia, las hormigas son componentes muy seguros, en el

sentido de que se puede confiar en ellas para la realización de determinadas tareas en determinadas formas.

Aquiles: Así y todo, dentro de esos límites son libres, y por eso actúan caprichosamente, marchando en forma incoherente, sin miramiento alguno hacia los mecanismos de pensamiento de un ser de nivel más alto, del cual son meros componentes según lo que afirma el doctor Oso Hormiguero.

Oso Hormiguero: Ah, pero tiene que reconocer una cosa, Aquiles: la regularidad de las estadísticas.

Aquiles: ¿Cómo es eso?

Oso Hormiguero: Por ejemplo, aun cuando las hormigas, como individuos, vaguen de una manera que parece azarosa, existen sin embargo tendencias globales que pueden emerger de ese caos y que abarcan grandes cantidades de hormigas.

Aquiles: Oh, ya sé a qué alude usted. Los senderos de hormigas son, de hecho, un ejemplo perfecto de tal fenómeno. Allí, los movimientos de cada hormiga en particular son del todo impredictibles, pero el sendero mismo da la impresión de permanecer bien definido y estable. Indudablemente, eso debe significar que las hormigas individuales no están desplazándose en forma del todo azarosa.

Oso Hormiguero: Exacto, Aquiles. Existe cierto grado de comunicación entre las hormigas, precisamente el necesario para evitar que vaguen en forma por completo caprichosa. Gracias a esta comunicación mínima, ellas pueden recordarse, unas a otras, que no están solas sino cooperando con las demás integrantes del mismo equipo. El cumplimiento de cualquier actividad durante una cierta extensión de tiempo —como la construcción de un sendero— abarca una gran cantidad de hormigas, todas estimulándose entre sí de esta manera. Ahora bien, mi muy confusa comprensión del modo en que opera el cerebro me lleva a creer que ocurre algo similar con la excitación de las neuronas. ¿No es verdad, señor Cangrejo, que hace falta un grupo de neuronas excitadas para conseguir que se excite otra neurona?

Cangrejo: Con toda certidumbre. Consideremos las neuronas del cerebro de Aquiles, por ejemplo. Cada neurona recibe señales de las neuronas conectadas a sus líneas de entrada, y si la suma total de entradas, en determinado momento, sobrepasa cierto umbral crítico, entonces las primeras se excitarán, y enviarán su propia vibración de salida, con impulso torrencial, a otras neuronas, las cuales pueden excitarse a su vez, y a toda la línea que recorren. El relámpago neuronal iluminará inexorablemente su trayectoria aquileana, siguiendo extrañas configuraciones, luego del ataque de un mosquito hambriento; toda sacudida, toda fase, predeterminadas por la estructura neuronal del cerebro de Aquiles, hasta que son interferidas por mensajes sensoriales de entrada.

Aquiles: Normalmente, creo que YO controlo lo que pienso, pero la forma en que usted plantea esto lo pone al revés: pareciera como si "YO"

fuera solamente lo que resulta de toda esa estructura neuronal, y de las leyes naturales. Lo que yo considero mi IDENTIDAD, así, pasa a ser, en el mejor de los casos, el subproducto de un organismo gobernado por las leyes naturales; y, en el peor de los casos, una noción artificial, surgida de mi perspectiva distorsionada. En otras palabras, me hace usted sentir como que no sé quién —o qué— soy, si es que soy alguna cosa.

Tortuga: Adquirirá usted mayor comprensión acerca de este problema a medida que avancemos. Pero, doctor Oso Hormiguero, ¿qué le sugiere a usted esta analogía?

Oso Hormiguero: Yo sabía que existía algún paralelo entre estos dos sistemas tan diferentes. Ahora tengo un mayor conocimiento al respecto. Pareciera que el fenómeno de los grupos dotados de coherencia —la construcción de senderos, por ejemplo— tiene lugar a partir de cierto umbral en cuanto a la cantidad de hormigas involucradas. Cuando es emprendido un esfuerzo, quizá en forma casual, por unas pocas hormigas, en algún sitio, puede ocurrir una de dos cosas: el fracaso, luego de un breve comienzo impetuoso . . .

Aquiles: ¿Si no hay suficientes hormigas para mantener el impulso?

Oso Hormiguero: Exactamente. La otra cosa que puede suceder es que se haga presente una masa crítica de hormigas, y el esfuerzo inicial crezca como bola de nieve, agregando más y más hormigas al cuadro. En este supuesto, queda constituido un "equipo" completo, dedicado a llevar adelante un proyecto único. Tal proyecto puede tratarse de la construcción de senderos, la recolección de alimento, o bien implicar la permanencia en el interior del hormiguero. Pese a la extrema simplicidad que muestra este esquema en una escala pequeña, en una escala mayor puede dar origen a consecuencias muy complejas.

Aquiles: Puedo captar la idea genérica de un orden emergiendo de un caos, de acuerdo a su esbozo, pero esto todavía está bastante alejado de la capacidad de conversar. A fin de cuentas, el orden *también* emerge del caos cuando las moléculas de un gas rebotan entre sí al azar; sin embargo, todo lo que resulta de allí es una masa amorfa con tres parámetros que la caracterizan: volumen, presión y temperatura. ¡Es algo muy distante de la capacidad de comprender el mundo, o de hablar acerca de éste!

Oso Hormiguero: Eso pone de relieve una diferencia muy interesante entre la explicación del comportamiento de una colonia de hormigas y la explicación del comportamiento del gas en el interior de un contenedor. Se puede explicar el comportamiento del gas mediante, sencillamente, el cálculo de las propiedades estadísticas del movimiento de sus moléculas. No hay necesidad de contemplar ningún elemento estructural de mayor nivel que las moléculas, a excepción de la totalidad misma del gas. Por el otro lado, en el caso de una colonia de hormigas, no es posible ni siquiera empezar a entender las actividades de la colonia si no se atraviesan varios estratos estructurales.

Aquiles: Ya veo a qué se refiere. Con respecto a un gas, basta un brinco para llevarlo a uno desde el nivel más bajo: las moléculas, hasta el nivel más alto: el gas en su totalidad. No hay niveles intermedios de organización. Ahora bien, ¿cómo surgen tales niveles en una colonia de hormigas?

Oso Hormiguero: Eso tiene relación con la existencia de distintas variedades de hormigas dentro de cualquier colonia.

Aquiles: Oh, sí. Creo haber oído algo. Son las llamadas "castas", ¿no es así?

Oso Hormiguero: Efectivamente. Además de la reina, hay machos, que prácticamente no se ocupan para nada de la conservación del hormiguero, y también . . .

Aquiles: Y por supuesto hay soldados: ¡los Gloriosos Guerreros Contra el Comunismo!

Cangrejo: Mmmm . . . Me parece difícil que sea así, Aquiles. Una colonia de hormigas, internamente, es comunista a carta cabal, de modo que sus soldados no tienen por qué luchar contra el comunismo. ¿Me equivoco, doctor Oso Hormiguero?

Oso Hormiguero: No; está usted en lo cierto con respecto a las colonias, señor Cangrejo: están basadas en principios, en alguna medida, comunistas. En cuanto a los soldados, la visión de Aquiles es un poco ingenua. En verdad, los llamados "soldados" no tiene la menor destreza para combatir. Son lentos, desgarbados y sus cabezas son enormes: pueden cerrar con mucha fuerza sus poderosas mandíbulas, pero es muy difícil que se los pueda glorificar. Lo mismo que en un estado comunista verdadero, son los trabajadores quienes deben ser glorificados. Ellos realizan casi todas las tareas: recolección de alimentos, caza y el cuidado de las hormigas más jóvenes, por ejemplo. Son ellos, inclusive, quienes afrontan la mayoría de los combates.

Aquiles: Bah, qué cosa tan absurda. ¡Soldados que no hacen la guerra!

Oso Hormiguero: Bueno, como le acabo de decir, realmente no se trata de soldados, en absoluto. Los trabajadores son los encargados, también, de combatir. Los soldados no son más que estúpidos holgazanes.

Aquiles: ¡Oh, qué vergonzoso! ¡Caramba, si yo fuera hormiga, pondría un poco de disciplina en sus filas! ¡Les enseñaría algunas cosas a esos holgazanes!

Tortuga: ¿Si usted fuera hormiga? ¿Cómo podría conseguirlo? No hay forma de hacer corresponder su cerebro con el de una hormiga; me parece, pues, que no tiene mucha utilidad plantearse esta cuestión. Sería más razonable la proposición de hacer corresponder su cerebro con el de una colonia de hormigas . . . Pero dejémonos de digresiones, para que el doctor Oso Hormiguero continúe con su muy esclarecedora descripción de las castas y del papel que éstas cumplen en los niveles más elevados de organización.

Oso Hormiguero: Muy bien. Hay toda clase de tareas por cumplir en una colonia, y las hormigas individuales desarrollan especializaciones. Por lo común, la especialidad de una hormiga cambia cuando ésta enveje-

ce. Por supuesto, ello también depende de la casta a que pertenezca la hormiga. En todo momento, y en toda área, por reducida que sea, de la colonia, hay hormigas de todos los tipos. Naturalmente, una casta puede estar más concentrada en algunos lugares que en otros.

Cangrejo: ¿La densidad de una casta en particular, o la especialización, son casuales? ¿O existen motivos para que un determinado tipo sea más numeroso en ciertas áreas, y menos en otras?

Oso Hormiguero: Me complace que traiga usted esto a colación, pues tiene una importancia capital para entender cómo piensa una colonia. Dentro de ésta se produce evolutivamente, a través de un largo período, una muy delicada distribución de castas. Y es esta distribución lo que le permite a la colonia contar con la complejidad que subyace a su capacidad de conversar conmigo.

Aquiles: Yo diría que, aparentemente, el constante movimiento de acá para allá de las hormigas aminora en forma considerable las posibilidades de una distribución muy cuidadosa. Una distribución así se vería rápidamente deshecha por toda esa movilización caprichosa de las hormigas, del mismo modo que, en un gas, cualquier patrón delicado que se inserte entre sus moléculas no sobreviviría un instante, debido al bombardeo azaroso proveniente de todos lados.

Oso Hormiguero: En una colonia de hormigas la situación es exactamente la contraria. En realidad, es precisamente el constante ir y venir de las hormigas dentro de la colonia lo que hace adaptar la distribución de castas a circunstancias variables, y por consiguiente preserva el carácter preciso de esa distribución. Fíjese que ésta no puede permanecer bajo la forma de un único patrón rígido, sino que debe modificarse permanentemente a fin de reflejar, en cierta manera, la situación del mundo real con el cual está vinculada la colonia, y es justamente el movimiento en el interior de ésta lo que actualiza la distribución de castas, de modo tal que se conserven a tono con las condiciones vigentes que enfrenta la colonia.

Tortuga: ¿Podría dar un ejemplo?

Oso Hormiguero: Con mucho gusto. Cuando yo, un oso hormiguero, llego para cumplir con mi visita a tía Hilaria, todas las tontas hormigas, al olfatearme, huyen despavoridas: lo cual significa, por cierto, que comienzan a desplazarse de una manera completamente diferente a como lo hacían antes de mi llegada.

Aquiles: Pero eso es comprensible, pues usted es el temido enemigo de la colonia.

Oso Hormiguero: Oh, no. Debo reiterarle que, muy lejos de ser un enemigo de la colonia, soy el camarada preferido de tía Hilaria. Y la tía Hilaria es mi tía preferida. Le doy la razón en que las hormigas individuales de la colonia me tienen mucho miedo, pero ése es un asunto completamente distinto. De todos modos, usted ve que la acción de las hormigas, en respuesta a mi llegada, cambia por entero su distribución interna.

Aquiles: Sin duda.

Oso Hormiguero: Y ésta es la actualización de que yo hablaba. La nueva distribución refleja mi presencia. Se puede describir el cambio producido, de un estado anterior a un nuevo estado, como la incorporación de una "pieza de conocimiento" a la colonia.

Aquiles: ¿Cómo puede usted referirse a la distribución de diferentes tipos de hormigas dentro de una colonia, aplicándole la expresión "pieza de conocimiento"?

Oso Hormiguero: Acá tenemos de por medio un punto vital, que requiere un poco de elaboración. Vea, hablemos del modo que se adopta para describir la distribución de castas. Si se insiste en considerarla en función de los niveles inferiores —las hormigas individuales— entonces los árboles están impidiendo la visión del bosque. Ese nivel es demasiado microscópico, y cuando se piensa microscópicamente, es forzoso que se pasen por alto ciertos aspectos cuya dimensión es la gran escala. Es necesario hallar el marco adecuado, de alto nivel, dentro del cual describir la distribución de castas: sólo entonces se verá que tiene sentido el hecho de que la distribución de castas puede codificar muchas piezas de conocimiento.

Aquiles: Bien, ¿y cómo se encuentran las unidades de dimensiones adecuadas a través de las cuales se describirá el estado vigente en la colonia, si es como usted dice?

Oso Hormiguero: Correcto. Comenzaremos por la base. Cuando las hormigas necesitan que se haga alguna cosa, forman pequeños "equipos", y emprenden así reunidas una actividad. Como ya lo dije, permanentemente se están formando y deshaciendo grupos reducidos de hormigas. Estos grupos de duración momentánea son propiamente los equipos, y la razón de que no se disgreguen es, en rigor, que tienen una tarea por cumplir.

Aquiles: Antes usted había dicho que un grupo se consolidaba si su tamaño sobrepasaba un determinado umbral. Ahora está diciendo que un grupo se consolida *si tiene algo que hacer*.

Oso Hormiguero: Son afirmaciones equivalentes. Por ejemplo, en materia de recolección de alimentos, si una hormiga errante descubre en alguna parte una cantidad poco considerable de alimento y a continuación procura comunicar su entusiasmo a otras hormigas, la cantidad de éstas que responda será proporcional a las dimensiones del hallazgo: una cantidad poco considerable no atraerá las suficientes hormigas como para exceder el umbral. Lo cual es exactamente lo que quiero significar cuando digo que no hay nada para hacer: un volumen demasiado pequeño de alimento debe ser ignorado.

Aquiles: Ya veo. Supongo que estos "equipos" constituyen uno de los niveles de la estructura que se ubican en algún punto entre el nivel de la hormiga individual y el nivel de la colonia.

Oso Hormiguero: Así es. Existe una clase especial de equipo, al que llamo "señal": todos los niveles superiores de la estructura están basados

en señales. En realidad, todas las entidades más altas son conjuntos de señales que actúan concertadamente. En los niveles más elevados hay equipos cuyos miembros no son hormigas, sino equipos de niveles más bajos. Finalmente se llega a los equipos de nivel inferior —es decir, señales— y, por debajo de *ellos*, a las hormigas.

Aquiles: ¿Por qué han recibido las señales esa sugestiva denominación?

Oso Hormiguero: Les viene de su función. El objeto de las señales es desplazar hormigas de diversas especialidades hacia partes adecuadas de la colonia. La historia típica de una señal es la siguiente: adquiere existencia cuando es superado el límite requerido para sobrevivir, y entonces emigra, recorriendo una cierta distancia a través de la colonia; en algún punto, se desintegra, dejando a sus miembros individuales librados a sí mismos.

Aquiles: Me hace pensar en *una* ola que trae, desde muy lejos, erizos y algas, y los abandona, solitarios, en la playa.

Oso Hormiguero: En cierta forma es algo similar, puesto que, efectivamente, el equipo deposita algo que ha traído desde un sitio distante; pero el agua de la ola regresa al mar, mientras que en el caso de una señal no hay una sustancia transportadora análoga: la componen las hormigas mismas.

Tortuga: Y supongo que una señal pierde su coherencia exactamente en algún sitio de la colonia donde ese tipo de hormigas es primordialmente necesario.

Oso Hormiguero: Naturalmente.

Aquiles: ¿Naturalmente? Para MI no es tan obvio que una señal vaya siempre al sitio preciso donde es necesaria. Y aun cuando marche en la dirección debida, ¿cómo sabe dónde descomponerse? ¿Cómo se percata de que ha llegado?

Oso Hormiguero: Esas son cuestiones sumamente importantes, pues implican una explicación acerca de la existencia de un comportamiento orientado hacia finalidades —o que así lo parece— en la señales. Siguiendo la descripción, uno se sentiría inclinado a caracterizar el comportamiento de las señales como guiado hacia la ocupación de un hormiguero, y a considerarlo entonces "orientado hacia finalidades". Pero esto también puede ser considerado de otro modo.

Aquiles: Oh, un momento. El comportamiento persigue un propósito, o lo contrario: SI o NO. No veo cómo puede usted sostener ambas cosas a un tiempo.

Oso Hormiguero: Permítame que le explique mi perspectiva, y luego dígame si está de acuerdo. Una vez formada una señal, no hay conocimiento en ella de que debe dirigirse en una determinada dirección. Aquí es donde la precisa distribución de castas juega un papel crucial, pues se encarga de determinar el movimiento que realizarán las señales a través de la colonia, como también por cuánto tiempo una señal debe conservar su estabilidad y dónde tiene que "disolverse".

Aquiles: Así que todo depende de la distribución de castas, ¿eh?

Oso Hormiguero: Eso es. Supongamos una señal en marcha. Mientras avanza, las hormigas que la componen interactúan, o bien mediante el contacto directo, o bien mediante el intercambio de olores, con las hormigas de los vecindarios que atraviesan. Los contactos y los aromas les proveen información acerca de los problemas locales de carácter urgente, tales como la construcción del hormiguero, alimentación de los párvulos o lo que fuere. La señal mantiene su cohesión mientras las necesidades locales no coincidan con las que ella puede satisfacer; pero si ocurre que PUEDE contribuir, lanza a la escena un equipo fresco de hormigas útiles, luego de desintegrarse como señal. ¿Ve usted ahora de qué modo la distribución de castas actúa como una guía de todos los equipos de la colonia?

Aquiles: Lo veo.

Oso Hormiguero: ¿Y ve cómo esta forma de observar las cosas requiere que no se le atribuya sentido de finalidad a la señal?

Aquiles: Creo que sí. En realidad, estoy comenzando a ver esto desde dos direcciones. Para la hormiga, una señal NO tiene finalidad. La hormiga común de una señal se limita a marchar sin rumbo por la colonia, sin buscar nada en particular, hasta que se encuentra con que siente algo semejante a una detención. Sus compañeras de equipo, generalmente, experimentan lo mismo, así que ése es el momento en que el equipo se disuelve, a través del desmenuzamiento de sus partes: los miembros permanecen, pero su coherencia interna desaparece por entero. Para determinar la dirección adecuada no se requiere planificación, ni efectuar previsiones, ni perseguir una meta. En cambio, para la colonia, el equipo se ha limitado a responder a un mensaje formulado en el lenguaje de la distribución de castas. Desde esta dirección, lo que sucede se asemeja mucho más a una actividad dotada de propósitos.

Cangrejo: ¿Qué podría pasar si la distribución de castas fuese totalmente arbitraria? ¿Las señales se seguirían formando y dispersando?

Oso Hormiguero: Seguramente. Pero la colonia no duraría mucho tiempo, a causa de la carencia de significación de la distribución de castas.

Cangrejo: Es justamente lo que yo quería destacar. Las colonias sobreviven porque su distribución de castas tiene significación, y esa significación es un aspecto holístico, invisible en los niveles más bajos. La eficacia de la explicación se malogra si no se toma en cuenta el nivel superior.

Oso Hormiguero: Lo entiendo, pero creo que usted ve el problema con excesiva estrechez.

Cangrejo: ¿Cómo es eso?

Oso Hormiguero: Las colonias de hormigas han estado sujetas a los rigores de la evolución durante billones de años. Unos pocos mecanismos fueron seleccionados para permanecer, y la mayoría de ellos resultó descarada. El producto final fue un conjunto de mecanismos cuyo efecto es que las colonias de hormigas funcionen como lo hemos descripto.

Si uno pudiera contemplar todo el proceso en una película —que marchase algo así como un billón de veces más rápido que la vida, por supuesto— vería la emergencia de los distintos mecanismos como respuestas naturales a presiones externas, lo mismo que las burbujas que aparecen en el agua hirviente son respuestas naturales a una fuente externa de calor. Estimo que no verá usted "significación" y "propósitos" en las burbujas del agua que hierve . . . ¿o sí?

Cangrejo: No, pero . . .

Oso Hormiguero: Y esto es lo que YO quiero destacar: por más grande que sea una burbuja, debe su existencia a los procesos que se cumplen en el nivel molecular, y en esto no interviene ninguna "ley de nivel superior". Lo mismo vale para las colonias de hormigas y sus equipos. Observando las cosas desde la vasta perspectiva de la evolución, se pueden suprimir las nociones de significación y de finalidad en relación con la totalidad de la colonia. Tales nociones se hacen superfluas.

Aquiles: ¿Por qué, entonces, doctor Oso Hormiguero, me dijo que conversó con la tía Hilaria? Pareciera ahora que niega usted que ella pueda conversar o pensar en absoluto.

Oso Hormiguero: No me estoy contradiciendo, Aquiles. Verá usted, me cuesta mucho, lo mismo que a cualquier otro, ver las cosas en una escala temporal tan inmensa, así que me resulta sumamente más cómodo modificar mis puntos de vista. Cuando procedo así, olvidándome de la evolución y tomando las cosas en su aquí y ahora, sobreviene el vocabulario de la teleología: la SIGNIFICACION de la distribución de castas y la FINALIDAD de las señales. Esto no me ocurre sólo cuando considero las colonias de hormigas, sino también cuando pienso acerca de mi propio cerebro y de otros cerebros. No obstante, con algún esfuerzo, siempre consigo recordar, si es necesario, el otro punto de vista, y también purgar de significaciones todos estos sistemas.

Cangrejo: Ciertamente, la evolución produce ciertos milagros. Nunca se sabe qué carta sacará de la manga. Por ejemplo, no me sorprendería nada que existiese la posibilidad teórica de que dos o más "señales" se entrecrucen, sin saber ninguna de ellas que las otras son también señales y tratándolas, en consecuencia, como si sólo fuesen una parte de la población básica.

Oso Hormiguero: ¡Es algo más que una posibilidad teórica: sucede rutinariamente!

Aquiles: Mmmm . . . Qué curiosa imagen suscita esto en mi mente. Me imagino a las hormigas avanzando en cuatro direcciones diferentes, entrecruzándose, unas de color blanco, otras de color negro, formando en conjunto una estructura ordenada, casi como . . . como . . .

Tortuga: ¿Una fuga, quizá?

Aquiles: ¡Sí, eso es! ¡Una fuga hormiguesca!

Cangrejo: Una imagen interesante, Aquiles. A propósito, toda esa charla sobre el agua que hierve me hizo pensar en el té. ¿Quién desea un poco más?

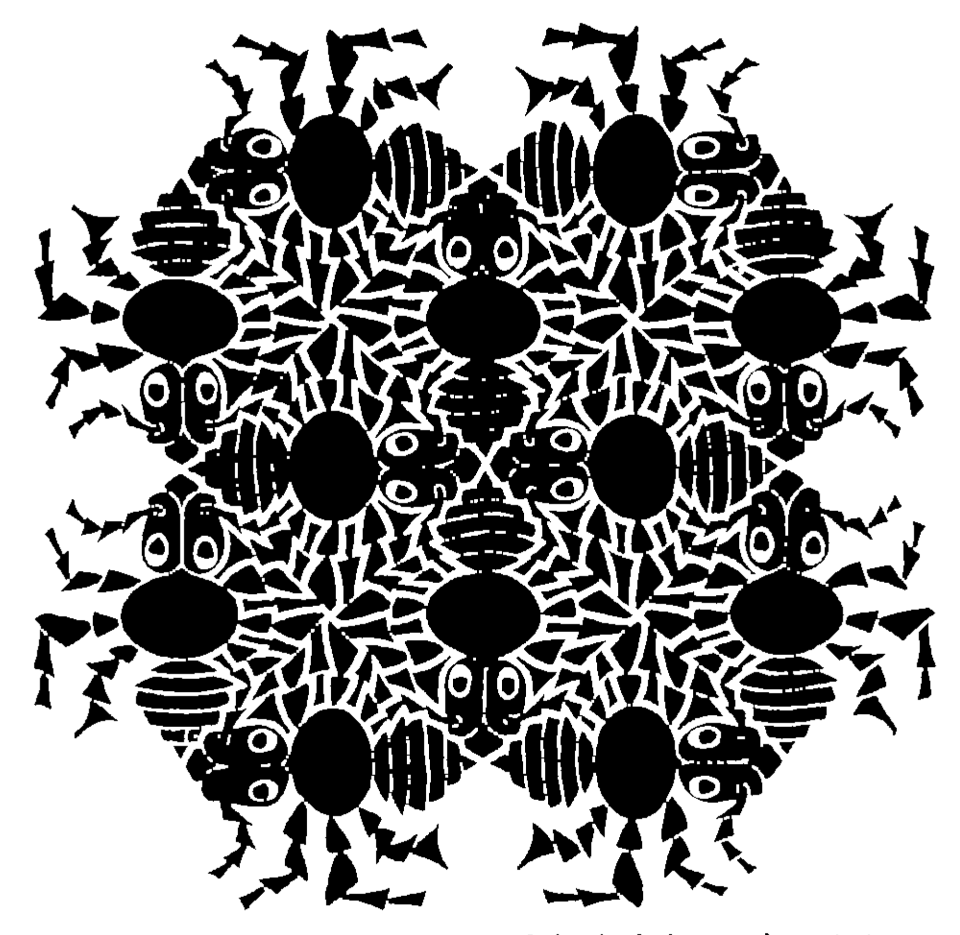


Figura 61. **Fuga hormiguesca,** *de M. C. Escher (grabado en madera, 1953).*

Aquiles: Yo tomaría otra taza, señor Cangrejo.
Cangrejo: Muy bien.
Aquiles: ¿Creen ustedes que se podrían individualizar las diferentes "voces" visuales de tal "fuga hormiguesca"? Sé lo difícil que es para mí . . .
Tortuga: Para mí no, gracias.
Aquiles: . . . seguir una voz individual . . .
Oso Hormiguero: Yo también querría, señor Cangrejo . . .
Aquiles: . . . en una fuga musical . . .
Oso Hormiguero: . . . si no es demasiada molestia.
Aquiles: . . . cuando todas . . .
Cangrejo: En absoluto. Cuatro tazas de té . . .
Tortuga: ¡Tres!
Aquiles: . . . suenan al mismo tiempo.
Cangrejo: . . . nos acompañarán de inmediato.

Oso Hormiguero: Interesante observación la suya, Aquiles. Pero es improbable que alguien pueda elaborar de manera convincente una imagen de esa clase.

Aquiles: Qué lamentable.

Tortuga: Quizá usted pueda decirme, doctor Oso Hormiguero, si una señal consiste siempre, desde su origen hasta su disolución, en el mismo conjunto de hormigas.

Oso Hormiguero: En realidad, los individuos que componen una señal se apartan, a veces, y son sustituidos por otros de la misma casta, si hay algunos en las cercanías. Lo más usual es que las señales lleguen a su punto de disolución sin incluir ninguna de las hormigas que la formaban inicialmente.

Cangrejo: Puedo ver que las señales influyen constantemente sobre la distribución de castas de toda la colonia, y que así ocurre en respuesta a las necesidades internas de aquélla, las cuales, a su vez, reflejan la situación externa que rodea a la colonia. En consecuencia, la distribución de castas, como dijo usted, doctor Oso Hormiguero, se actualiza permanentemente de forma tal que, en último término, refleje el mundo exterior.

Aquiles: ¿Y qué pasa con aquellos niveles intermedios de la estructura? Decía usted que la distribución de castas estaría mejor representada sobre la base, no de hormigas o de señales, sino de equipos cuyos miembros fueran otros equipos, cuyos miembros fueran otros equipos, y así siguiendo hasta llegar al nivel de la hormiga. Y dijo usted que ésta era la clave para comprender cómo es posible afirmar que la distribución de castas codifica piezas de información acerca del mundo.

Oso Hormiguero: Sí, a eso estamos llegando. Prefiero dar el nombre de "símbolos" a los equipos de nivel suficientemente alto. Observen que este uso de tal palabra se aparta bastante de su sentido habitual. Mis "símbolos" son SUBSISTEMAS ACTIVOS de un sistema complejo, y están compuestos por subsistemas activos de nivel más bajo . . . Por ende, son enteramente distintos a los símbolos PASIVOS, externos con respecto al sistema, tales como las letras del alfabeto o las notas musicales, los cuales se mantienen estáticos allí fuera, a la espera de que un sistema activo los procese.

Aquiles: Oh, esto es bastante complicado, ¿no es así? Yo no tenía idea, casi, de que las colonias de hormigas tuviesen una estructura tan abstracta.

Oso Hormiguero: Sí, es algo muy notable. Pero todos estos estratos estructurales son necesarios para el acopio de las clases de conocimiento que le permiten, a un organismo, ser "inteligente", en algún sentido razonable de este término. Todos los sistemas dotados de dominio del lenguaje están fundados, esencialmente, en el mismo conjunto de niveles.

Aquiles: Un momentito, amigo mío. ¿Está usted insinuando que mi cerebro sólo consiste, en último término, en un montón de hormigas que van y vienen?

Oso Hormiguero: Pero no, Aquiles. Usted me interpreta en forma excesivamente literal. El nivel inferior puede ser absolutamente diferente. Sin duda, el cerebro de los osos hormigueros, por ejemplo, no está constituido por hormigas. Pero cuando se asciende un nivel o dos en la estructura de un cerebro, se encuentran elementos que tienen su equivalente exacto en otros sistemas de idéntico alcance intelectual: el de las colonias de hormigas, digamos.

Tortuga: Es por eso que sería razonable hacer corresponder su cerebro, Aquiles, con una colonia de hormigas, pero no con el cerebro de una sola hormiga.

Aquiles: Le agradezco el cumplido. Sin embargo, ¿cómo se haría para verificar tal correspondencia? Por ejemplo, ¿qué parte de mi cerebro tiene su equivalente en los equipos de bajo nivel que ustedes llaman señales?

Oso Hormiguero: Oh, yo no soy más que un aficionado en materia de cerebros, y en consecuencia no podría establecer una correspondencia perfectamente detallada. Así y todo —corríjame si me equivoco, señor Cangrejo—, supongo que el equivalente cerebral de una señal de colonia de hormigas es la excitación de una neurona, o quizá algún fenómeno de escala mayor, tal como un patrón de excitaciones neuronales.

Cangrejo: Me inclino a coincidir con usted. ¿Pero no le parece que, a los fines de nuestra discusión, el trazado de equivalentes exactos no es un requisito fundamental e imprescindible? Creo que la noción básica es que esa correspondencia existe, aun cuando no sepamos cómo definirla con precisión en este momento. Yo cuestionaría solamente un aspecto, doctor Oso Hormiguero, planteado por usted, con referencia al nivel en el cual uno puede confiar que sea el punto donde comienza la correspondencia. Usted piensa, diría yo, que una SEÑAL cuenta con un equivalente directo en el cerebro; a mí se me ocurre, en cambio, que dicha correspondencia debe existir únicamente en el nivel de los SIMBOLOS ACTIVOS de que usted habló, y en niveles superiores a éste.

Oso Hormiguero: Su interpretación puede muy bien ser más válida que la mía, señor Cangrejo. Le agradezco que plantee esta sutil cuestión.

Aquiles: ¿Qué tiene un símbolo que no tenga una señal?

Oso Hormiguero: Se trata de algo semejante a la diferencia que hay entre palabras y letras. Las palabras, las cuales son entidades portadoras de significación, están compuestas por letras, las cuales carecen, por sí mismas, de significación. Esto ilustra la diferencia existente entre símbolos y señales. En realidad, se trata de una analogía provechosa, en la medida en que se tenga presente que las palabras y las letras son PASIVAS, y que los símbolos y las señales son ACTIVOS.

Aquiles: Así lo haré, pero no estoy seguro de entender por qué es tan vital subrayar la diferencia entre entidades activas y pasivas.

Oso Hormiguero: La causa de ello es que la significación que atribuimos a cualquier símbolo pasivo, como puede serlo una palabra incluida en la página de un texto, proviene, en verdad, de la significación trans-

portada por los símbolos activos de nuestro cerebro. De modo, pues, que la significación de los símbolos pasivos sólo puede ser adecuadamente comprendida si es relacionada con la significación de los símbolos activos.

Aquiles: De acuerdo, pero, ¿qué es lo que dota de significación a un SIMBOLO —activo, ciertamente— si dice usted que una SEÑAL, entidad perfectamente válida por sí misma, carece de toda significación?

Oso Hormiguero: Todo esto se vincula con la forma en que los símbolos puedan conseguir que sean desencadenados otros símbolos. Un símbolo no se convierte en activo aisladamente. Flota, por cierto, en un medio que es caracterizado por su distribución de casta.

Cangrejo: Indudablemente, en el cerebro no hay nada parecido a la distribución de castas, pero el equivalente de ésta es el "estado cerebral": es decir, nuestra descripción del estado de todas las neuronas, de todas las interconexiones y del umbral de excitación de cada neurona.

Oso Hormiguero: Correcto; agrupemos "distribución de castas" y "estado cerebral" bajo un mismo encabezamiento: llamémoslos, simplemente, "estado". Ahora bien, el estado puede ser descripto en un nivel bajo o en un nivel alto. Una descripción de bajo nivel de una colonia de hormigas implicaría la laboriosa especificación de cada hormiga, su edad y casta y otros datos similares. Una muy detallada descripción, en suma, que permita una comprensión nada global del POR QUÉ de tal estado. Por el otro lado, una descripción de alto nivel implicaría la especificación de cuáles son los símbolos que pueden ser desencadenados, cuáles combinaciones de otros símbolos constituirían la causal, bajo qué condiciones, y así siguiendo.

Aquiles: ¿Y cómo se haría la descripción del nivel de las señales o equipos?

Oso Hormiguero: Una descripción de ese nivel se situaría en alguna parte del espacio existente entre las descripciones de alto nivel y las de bajo nivel. Contendría una gran cantidad de información sobre lo que está ocurriendo en un momento dado en lugares específicos de toda la colonia, aunque no sería tan completa como una descripción hormiga por hormiga, puesto que los equipos consisten en grupos de hormigas. Una descripción equipo por equipo es como una síntesis de una descripción hormiga por hormiga. No obstante, es necesario incluir elementos adicionales, ausentes en la descripción hormiga por hormiga, tales como las relaciones entre equipos y el aportamiento de distintas castas, aquí y allá. Esta complicación es el precio que se paga para tener derecho a sintetizar.

Aquiles: Me resulta interesante comparar los méritos respectivos de las diversas descripciones. La de nivel superior parece tener mayor poder explicativo, pues nos brinda una representación más intuitiva de la colonia de hormigas, aunque, muy curiosamente, parezca prescindir del rasgo más importante: las hormigas.

Oso Hormiguero: Pero usted puede ver que, pese a las apariencias, las

hormigas no constituyen el aspecto más importante. Es evidente que, si no fuera por ellas, la colonia no existiría; pero algo equivalente —el cerebro— puede existir sin necesidad de hormigas. Luego, al menos desde la perspectiva de un nivel alto, las hormigas son prescindibles.

Aquiles: Estoy seguro de que ninguna hormiga se habrá de adherir con entusiasmo a su teoría, doctor.

Oso Hormiguero: Bueno, jamás he conocido a una hormiga dotada de una perspectiva de alto nivel.

Cangrejo: Qué representación antintuitiva es la que diseña usted, doctor Oso Hormiguero. Pareciera que para aprehender la estructura total, si lo que dice usted es cierto, se la debe describir omitiendo toda mención a las unidades fundamentales que la componen.

Oso Hormiguero: Quizá pueda aclarar un poco las cosas mediante una analogía. Supóngase que tiene ante sí una novela, de Mariano Azuela, digamos . . .

Aquiles: *¿Los de abajo?*

Oso Hormiguero: ¡Perfecto! Y ahora imagínese ejercitando el siguiente juego: debe encontrar una forma de hacer corresponder letras e ideas, de manera tal que la novela entera adquiera sentido cuando usted le dé lectura letra por letra.

Aquiles: Mmmm . . . ¿Quiere decir usted que, cada vez que me encuentro con una palabra como "los", por ejemplo, debo pensar en tres conceptos definidos, uno tras otro, sin margen para variación alguna?

Oso Hormiguero: Exactamente. Estos son el concepto 'l', el concepto 'o' y el concepto 's': en cada oportunidad, tales conceptos serán los mismos que en su aparición anterior.

Aquiles: Bueno, pienso que ello convertiría la experiencia de "leer" *Los de abajo* en una pesadilla tremendamente pesada. Se trataría de un ejercicio de no significación, cualesquiera sean los conceptos asociados a cada letra.

Oso Hormiguero: Así es. No hay correspondencia natural entre las letras individuales y el mundo real. La correspondencia natural aparece en un nivel más alto: entre las palabras y determinadas porciones del mundo real. Si usted quiere describir el libro, entonces, no tiene que mencionar el nivel de las letras.

Aquiles: ¡Es claro que no! Describiría el argumento, los personajes, etc.

Oso Hormiguero: De modo que ése es su criterio. Omitiría usted toda mención a las unidades fundamentales que componen el libro, pese a que éste no existiría sin ellas, las cuales son el medio, pero no el mensaje.

Aquiles: Está bien, pero, ¿qué pasa con las colonias de hormigas?

Oso Hormiguero: En éstas hay señales activas en lugar de letras pasivas, y símbolos activos en lugar de palabras pasivas, pero se puede aplicar la misma idea.

Aquiles: ¿Quiere usted decir que yo no podría establecer correspondencias entre señales y cosas del mundo real?

Oso Hormiguero: En ese caso, descubriría que no puede hacerlo de modo tal que el desencadenamiento de señales nuevas tenga algún sentido. Ni tampoco podría hacerlo en un nivel más bajo, el de las hormigas, por ejemplo. Sólo en el nivel simbólico adquieren sentido los patrones de desencadenamiento. Figúrese, pongamos por caso, que se encuentre usted observando a tía Hilaria cuando yo llego en respuesta a un llamado. Por más atentamente que mire, probablemente no advierta usted más que un reordenamiento de hormigas.

Aquiles: Con toda seguridad.

Oso Hormiguero: Sin embargo, cuando yo observo, leyendo el nivel más alto en lugar del más bajo, veo diversos símbolos latentes que van siendo despertados, los cuales traducen el pensamiento, "Oh, ha vuelto a visitarnos el encantador doctor Oso Hormiguero, qué agradable", o algo similar.

Aquiles: Eso se parece a lo que ocurre cuando nosotros cuatro encontramos diferentes niveles de lectura en la ilustración MU . . . bueno, al menos TRES de nosotros . . .

Tortuga: Es una coincidencia asombrosa la de que haya tal semejanza entre la curiosa imagen con la que me topé en *El Clave Bien Temperado* y el curso de nuestra conversación.

Aquiles: ¿Cree usted que es sólo coincidencia?

Tortuga: Por supuesto.

Oso Hormiguero: Bueno, espero que ahora pueda darse cuenta de cómo, en tía Hilaria, los pensamientos surgen de la manipulación de símbolos compuestos por señales compuestas por equipos compuestos por equipos de nivel más bajo, y así hasta llegar a las hormigas.

Aquiles: ¿Por qué habla usted de "manipulación de símbolos"? ¿Quién los manipula, si los símbolos son activos por sí mismos? ¿Quién es el agente?

Oso Hormiguero: Esto nos devuelve a la cuestión que usted había planteado acerca de la finalidad. Tiene razón en cuanto al carácter activo de los símbolos, pero las actividades que éstos emprenden, sin embargo, no son absolutamente libres. Las actividades de todos los símbolos están determinadas estrictamente por el estado de todo el sistema al que corresponden. En consecuencia, el sistema en su totalidad es el responsable del modo en que sus símbolos se desencadenan entre sí, por lo cual es razonable considerar que el sistema entero es el "agente". La acción de los símbolos produce la lenta transformación del estado del sistema, es decir, su actualización. Pero hay muchos rasgos que permanecen más allá. Es este sistema en parte estable, en parte variable, el agente, pues. Se le puede dar un nombre al sistema entero; por ejemplo, tía Hilaria es el "quien" del cual se puede decir que manipula sus símbolos, y lo mismo se puede decir de usted, Aquiles.

Aquiles: Es una muy extraña manera de caracterizar la noción de quién soy. No estoy seguro de entenderla del todo, pero la pensaré un poco.

Tortuga: Sería sumamente interesante observar los símbolos de su cerebro cuando esté usted pensando en los símbolos de su cerebro.

Aquiles: Esto es demasiado complicado para mí. Solamente figurarse cómo es posible observar una colonia de hormigas y leerla en el nivel simbólico ya me resulta bastante dificultoso. Concibo, por cierto, que puedo percibirla en el nivel de la hormiga; con algún trabajo, puedo imaginarme cómo será percibirla en el nivel de la señal; pero, ¿cómo cuernos podría ser eso de percibir una colonia de hormigas en el nivel simbólico?

Oso Hormiguero: Eso se aprende únicamente a través de una larga práctica. Quien llegue al estadio en que yo me encuentro, lee el nivel superior de una colonia de hormigas tan fácilmente como usted lee el "MU" en la ilustración MU.

Aquiles: ¿De veras? Tiene que ser una experiencia pasmosa.

Oso Hormiguero: En cierto sentido . . . pero a usted también le es enteramente familiar, Aquiles.

Aquiles: ¿A mí? ¿Qué quiere decir? Jamás he analizado una colonia de hormigas en otro nivel que no haya sido el de las hormigas.

Oso Hormiguero: Puede ser; pero las colonias de hormigas no son muy diferentes al cerebro, en muchas facetas.

Aquiles: Jamás he visto ni leído un cerebro, tampoco.

Oso Hormiguero: ¿Y qué me dice de su PROPIO cerebro? ¿No es usted consciente de sus propios pensamientos? ¿No consiste en eso la esencia de la conciencia? ¿En qué consiste lo que usted hace sino en leer su propio cerebro, directamente en el nivel simbólico?

Aquiles: Jamás lo enfoqué de esta manera. ¿Quiere usted decir que paso por alto los niveles más bajos y veo únicamente el nivel más elevado?

Oso Hormiguero: Es lo que ocurre con los sistemas conscientes. Se perciben a sí mismos solamente en el nivel simbólico, sin advertir la presencia de niveles más bajos como, por ejemplo, el de las señales.

Aquiles: ¿En el cerebro, entonces, hay símbolos activos que están constantemente autoactualizándose, de modo tal que reflejan el estado íntegro del cerebro mismo, siempre en el nivel simbólico?

Oso Hormiguero: Efectivamente. En todo sistema consciente hay símbolos que representan el estado cerebral, *y al propio tiempo son parte del* mismo estado cerebral que simbolizan: la conciencia requiere un alto grado de autoconciencia.

Aquiles: Esta es una noción misteriosa: pese a que en mi cerebro existe una ininterrumpida actividad frenética, yo soy capaz de registrar tal actividad *tan sólo de una forma: en el nivel simbólico, y permanezco* insensible a los niveles inferiores. Es como si se pudiera leer *Los de abajo* por percepción visual directa, sin necesidad de conocer las letras del alfabeto. No puedo concebir cómo ocurre realmente algo tan misterioso.

Cangrejo: Pero fíjese que eso es precisamente lo que HA ocurrido cuando usted leyó "MU", *sin percibir los niveles inferiores* "HOLISMO" y "REDUCCIONISMO".

Aquiles: Está en lo cierto . . . pasé por alto los niveles más bajos y vi únicamente el superior. Me pregunto si no estaré también pasando por al to todas las significaciones albergadas en los niveles inferiores de mi cerebro, como resultado de mi lectura limitada al nivel simbólico. Es muy lamentable que el nivel superior no contenga toda la información relativa al nivel inferior, lo cual permitiría que, al leer el superior, se conociese lo que dice el inferior. Sin embargo, supongo que sería ingenuo esperar que el nivel máximo codifique ninguna cosa procedente del nivel de abajo: es probable que no haya filtraciones de éste hacia arriba. La ilustración MU es el ejemplo más notable de esto: en ella, el nivel superior dice exclusivamente "MU", ¡lo cual no guarda relación alguna con los niveles más bajos!

Cangrejo: Eso es totalmente cierto. (*Toma la ilustración MU y la inspecciona muy atentamente.*) Mmmm . . . hay algo muy extraño en las letras más pequeñas; sus líneas son muy sinuosas . . .

Oso Hormiguero: Déjeme echarle un vistazo. (*Escudriña cuidadosamente la ilustración MU.*) ¡Creo que hay otro nivel más, que no habíamos advertido!

Tortuga: No pluralice, doctor Oso Hormiguero.

Aquiles: ¡Oh, no . . . no puede ser! Déjeme ver. (*Examina minuciosamente la imagen.*) Sé que ustedes no lo creerán, pero el mensaje de esta imagen está ahí, ante nosotros, escondido en sus profundidades. Consiste simplemente en una palabra, repetida una y otra vez, como un mantra . . . pero qué importante palabra: ¡"MU"! ¡Lo que son las cosas! ¡Es la misma que aparece en el nivel superior! Y ninguno de nosotros supuso que estuviera también en el último.

Cangrejo: Nunca lo hubiéramos advertido de no haber sido por usted, Aquiles.

Oso Hormiguero: Me pregunto si la coincidencia existente entre el nivel más alto y el más bajo se ha producido por casualidad, o si se trata de un acto deliberado, previsto por un creador.

Cangrejo: ¿Cómo saberlo?

Tortuga: No veo ninguna forma, ya que ignoramos por qué aparece esta imagen en la edición del Cangrejo de *El Clave Bien Temperado*.

Oso Hormiguero: A pesar de que hemos estado enfrascados en una animada discusión, me las he podido arreglar para seguir, con una amplia porción de un oído, esta muy extensa y compleja fuga a cuatro voces. Es extraordinariamente bella.

Tortuga: Así es, sin duda. Y ahora, apenas de acá a un momento, comienza un punto de órgano.

Aquiles: ¿Un punto de órgano es lo que se produce cuando una composición se hace ligeramente más lenta, permanece durante uno o dos momentos en una sola nota o en un acorde y, luego de un breve silencio, retoma su velocidad anterior?

Tortuga: No, en lo que usted está pensando es en la "fermata": una especie de punto y coma musical. ¿Se dio cuenta de que apareció una de ellas en el preludio?

Aquiles: Me parece que no.

Tortuga: Bueno, todavía le es posible escuchar una fermata: en verdad, hay dos, ubicadas hacia el final de esta fuga.

Aquiles: Oh, qué bueno. Me pondrá usted sobre aviso, ¿tiene inconveniente?

Tortuga: Ninguno.

Aquiles: Pero dígame, ¿qué es un punto de órgano?

Tortuga: Un punto de órgano es dado por el sostenimiento de una sola nota, dentro de una pieza polifónica, por una de las voces (frecuentemente la más baja), en tanto las otras voces continúan con sus propias líneas. En este caso, el punto de órgano es en la nota *Sol*. Escuche con atención y podrá oírlo.

Oso Hormiguero: Su reflexión acerca de la posibilidad de observar los símbolos del cerebro de Aquiles en el momento en que producen pensamientos referidos a ellos mismos me hace recordar un incidente, ocurrido un día que visité a tía Hilaria.

Cangrejo: Cuéntelo, por favor.

Oso Hormiguero: Tía Hilaria se había estado sintiendo muy sola, de modo que le alegró mucho tener con quien conversar, en esa ocasión. Agradecida, me dijo que me sirviera las hormigas más jugosas que viese. (Siempre ha sido muy generosa con sus hormigas.)

Aquiles: ¡Caray!

Oso Hormiguero: Precisamente, yo había estado observando los símbolos que manifestaban sus pensamientos, pues había en ellos algunas hormigas de aspecto particularmente jugoso.

Aquiles: ¡Caray!

Oso Hormiguero: Por consiguiente, me serví algunas de las hormigas más gorditas que formaban parte de los símbolos de nivel superior que yo había estado leyendo. Estos símbolos, justamente, formaban parte

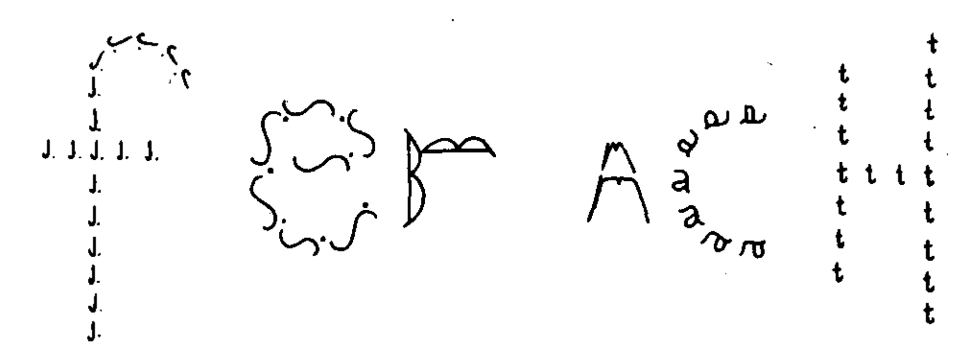


Figura 62. [Dibujo del autor.]

de los que habían expresado el pensamiento, "Sírvase cualesquiera de las hormigas que le parezcan apetitosas".

Aquiles: ¡Caray!

Oso Hormiguero: Infortunadamente para ellos, afortunadamente para mí, los bichitos no tenían la menor idea de lo que me estaban diciendo en el nivel simbólico.

Aquiles: ¡Caray! Qué desdoblamiento asombroso. Las hormigas carecían por completo de conciencia acerca de aquello en lo que estaban participando. Se puede considerar que sus actos estaban incluidos en un patrón correspondiente a un nivel más alto, pero ellas, por supuesto, ignoraban en forma total lo que estaba pasando. Ah, cuán lamentable —extraordinariamente paradójico, en realidad— que ellas no lo hayan advertido.

Cangrejo: Está usted en lo cierto, señora Tortuga: ha sido un punto de órgano admirable.

Oso Hormiguero: Nunca había oído un punto de órgano, con anterioridad a éste, pero es algo tan llamativo que es imposible no advertirlo. Muy descollante.

Aquiles: ¿Qué? ¿Ya se produjo el punto de órgano? ¿Cómo no me he percatado, si es tan notorio?

Tortuga: Quizá se haya desdoblado usted tanto para seguir la conversación que estaba manteniendo, que ignorase en forma total lo que estaba pasando. Ah, cuán lamentable —extraordinariamente paradójico, en realidad— que usted no lo haya advertido.

Cangrejo: Dígame, ¿dónde reside tía Hilaria?

Oso Hormiguero: Bueno, es dueña de una parcela bastante extensa. Esta tenía otro propietario, pero dejémoslo pues se trata de una historia más bien triste. Como quiera que sea, la propiedad de tía Hilaria es sumamente dilatada. Vive muy espléndidamente, en comparación con muchas otras colonias.

Aquiles: ¿Cómo se compagina eso con la naturaleza comunista de las colonias de hormigas que usted nos describió? ¡Me parece grandemente contradictorio predicar el comunismo y vivir en una propiedad costosa!

Oso Hormiguero: El comunismo tiene lugar en el nivel de las hormigas. En una colonia, todas las hormigas trabajan por el bien común, inclusive en detrimento de sus intereses individuales, muchas veces. Ahora bien, esto es un simple aspecto constructivo de la estructura de tía Hilaria y, por lo que yo sé, puede que ella no esté ni enterada de su comunismo interno. La mayoría de los seres humanos no está en conocimiento de ninguna cosa relativa a sus propias neuronas; en realidad, lo más probable es que, como son criaturas en cierto modo delicadas, estén muy satisfechos de no saber nada acerca de sus cerebros. También la tía Hilaria tiene sus remilgos: siente hormigueos cada vez que comienza a pensar en sus hormigas, así que evita hacerlo, siempre que le es posible. Dudo muchísimo de que ella tenga el menor conocimiento de la

sociedad comunista erigida dentro de su misma estructura. La tía cree firmemente en el libre albedrío, es decir, en el laissez-faire y todo eso. Así que para mí, al menos, tiene perfecto sentido que ella viva en una finca suntuosa.

Tortuga: Ahora mismo, al dar vuelta la página mientras seguía la música en esta deliciosa edición de *El Clave Bien Temperado*, advierto que está próxima la primera de las dos fermatas, de modo que dispóngase a escucharla, Aquiles.

Aquiles: Sí, sí.

Tortuga: Frente a esta página hay también una curiosísima ilustración.

Cangrejo: ¿Otra más? ¿Cómo es?

Tortuga: Véala. (*Entrega la partitura al Cangrejo.*)

Cangrejo: ¡Ajá! Son nada más que unos pocos grupos de letras. Veamos . . . hay diversas cantidades de las letras 'J', 'S', 'B', 'm', 'a' y 't'. Es curioso, las tres primeras letras se van haciendo más grandes y las tres últimas más pequeñas.

Oso Hormiguero: ¿Puedo verla?

Cangrejo: Oh, naturalmente.

Oso Hormiguero: Ah, por atender a los detalles han pasado ustedes por alto lo más saliente. En realidad, tenemos aquí las letras 'f', 'e', 'r', 'A', 'C', 'H', sin ninguna repetición. Primero se van haciendo más pequeñas y luego más grandes. ¿Qué le parece, Aquiles?

Aquiles: Déjeme ver. Mmmm . . . Bueno, lo que observo es un conjunto de mayúsculas, que se hacen más grandes de izquierda a derecha.

Tortuga: ¿Dicen algo?

Aquiles: Este . . . "J. S. BACH". ¡Oh! Ahora comprendo. ¡Es el nombre de Bach!

Tortuga: Es extraño que pueda usted verlo de esa manera. Lo que yo observo es un conjunto de minúsculas, que se hacen más pequeñas de izquierda a derecha, y . . . dicen . . . (*Pronuncia en forma ligeramente más lenta, prolongando sobre todo las últimas palabras. Luego, permanece en silencio durante un breve instante. De pronto, continúa de modo normal, como si nada hubiese ocurrido.*) "fermat".

Aquiles: Oh, no puede sacarse de la cabeza a Fermat, me parece. Usted ve el Teorema Final de Fermat en todas partes.

Oso Hormiguero: Está usted en lo cierto, señora Tortuga: acabo de escuchar una pequeña fermata encantadora en la fuga.

Cangrejo: También yo.

Aquiles: ¿Quiere decir que todo el mundo la oye menos yo? Estoy empezando a sentirme estúpido.

Tortuga: Vamos, vamos, Aquiles, no se preocupe. Estoy segura de que no se perderá usted la Fermata Final de la Fuga (que ha de producirse muy pronto). Pero, para volver a nuestro tópico anterior, doctor Oso Hormiguero, ¿cuál es la triste historia a la que aludió usted, relativa al primer propietario de las tierras de tía Hilaria?

Oso Hormiguero: El primer propietario fue un ser notable, una de las colonias de hormigas más imaginativas que hayan existido. Su nombre era Johant Sebastiant Fermant, y fue matemático de profesión, pero músico por distracción.

Aquiles: ¡Qué versátil!*

Oso Hormiguero: Lo sorprendió la muerte en la plenitud de sus facultades. Un día, durante un verano muy cálido, reposaba gozando del calorcito cuando una inusual tormenta de lluvia y truenos —de ésas que se producen sólo una vez cada cien años— se descolgó del cielo y llenó de agua totalmente a J. S. F. Como la borrasca sobrevino sin el menor aviso previo, las hormigas estaban desorientadas y confundidas por completo. Toda la intrincada organización, tan cuidadosamente elaborada durante décadas, quedó deshecha en cosa de minutos. Fue trágico.

Aquiles: ¿Quiere usted decir que se ahogaron todas las hormigas, lo cual, obviamente, implicó el fin del pobre J. S. F.?

Oso Hormiguero: No, al contrario. Las hormigas se las arreglaron para sobrevivir, todas sin excepción, subidas a ramas y troncos que flotaban en los furiosos torrentes. Pero cuando las aguas retrocedieron, devolviendo a las hormigas a su comarca, ya no había organización. La distribución de castas estaba absolutamente destruida y las hormigas no tenían la capacidad necesaria para reconstruir eso que había sido una organización refinadamente ajustada. Les era irremediablemente imposible conseguirlo, tal como a Humpty Dumpty juntar sus fragmentos y rehacer su forma original. Yo me esforcé, al modo de los caballos del rey, y de los hombres del rey, por volver a reunir los pedazos del pobre Fermant. Diseminé azúcar y queso, fielmente, esperando contra toda esperanza que algo de Fermant resurgiese . . . (*Saca un pañuelo y lo lleva a sus ojos.*)

Aquiles: ¡Qué sensible! No sabía que los Osos Hormigueros tenían tan gran corazón.

Oso Hormiguero: Pero todo fue inútil. Se había ido para siempre, más allá de toda posibilidad de reconstitución. Sin embargo, algo muy curioso comenzó a suceder: pasados unos pocos meses, las hormigas que habían formado parte de J. S. F., lentamente, se reagruparon y construyeron una nueva organización. Y así nació tía Hilaria.

Cangrejo: ¡Notable! ¿Tía Hilaria está formada exactamente por las mismas hormigas que Fermant?

Oso Hormiguero: Bueno, al principio así fue. Posteriormente, algunas de las hormigas más viejas han muerto y han sido remplazadas. Pero todavía quedan muchas de la época de J. S. F.

* Cabe recordar que "hormiga", en inglés, es *ant*, lo cual permite aquel juego verbal con los nombres propios asignados a la colonia, y con las palabras *mathematician*, matemático, *musician*, músico y *versatile*, versátil, que aparecen en el original como *mathematiciant*, *musiciant* y *versantile*, respectivamente. [T.]

Cangrejo: ¿Y de vez en cuando no se hacen visibles, en tía Hilaria, viejos rasgos de J. S. F.?

Oso Hormiguero: En absoluto. No tienen nada en común; y tampoco hay razón alguna para que así ocurra, según creo. Al fin y al cabo, hay muy distintas maneras de reordenar un grupo de partes para que formen una "suma". Y tía Hilaria no es más que una nueva "suma" de las antiguas partes. SOLO la suma, piénselo, y esa CLASE específica de suma.

Tortuga: Hablando de sumas, me he acordado de la teoría de los números: en ésta, a veces, uno puede separar los símbolos que componen un teorema, reordenarlos de otra manera y obtener un nuevo teorema.

Oso Hormiguero: Nunca oí hablar de tal fenómeno, aunque confieso que soy por completo un ignorante en ese campo.

Aquiles: Yo tampoco he oído hablar de semejante cosa... y estoy muy versado en ese campo, si se me permite decirlo. Sospecho que la señora Tortuga sólo está planteando una de sus complicadas tretas. Sé que lo sabe hacer muy bien.

Oso Hormiguero: Hablando de teoría de los números, me he vuelto a acordar de J.S.F., pues la teoría de los números es uno de los dominios en los cuales sobresalía. En realidad, aportó algunas contribuciones sumamente importantes a esta teoría. La tía Hilaria, en cambio, es muy torpe para todo aquello que tenga la más remota vinculación con la matemática. Asimismo, sus gustos musicales son bastante simples, en tanto que Sebastiant tenía magníficas dotes en este terreno.

Aquiles: Soy un entusiasta de la teoría de los números. ¿Podría usted hacernos algún comentario sobre la naturaleza de las contribuciones de Sebastiant?

Oso Hormiguero: Perfectamente, pues. (*Se detiene por un momento, bebe un sorbo de té, y luego prosigue.*) ¿Han oído nombrar la polémica "Conjetura bien-verificada" de Fourmi?

Aquiles: No estoy seguro... Me suena curiosamente familiar, pero no alcanzo a ubicarla.

Oso Hormiguero: Se trata de una idea sumamente simple. Lierre de Fourmi, matemático de profesión y abogado por distracción, estaba leyendo el clásico texto de Di of Antus, *Arithmetica*, en una de cuyas páginas se topó con la siguiente ecuación:

$$2^a + 2^b = 2^c$$

Comprendió de inmediato que esta ecuación tiene infinitas soluciones a, b, c, y entonces escribió, al margen, este notable comentario:

La ecuación

$$n^a + n^b = n^c$$

tiene soluciones, a través de los enteros positivos a, b, c y n, únicamente si n = 2 (y entonces habrá infinitos tripletes a, b, c, que satisfagan la



Figura 63. Cuando se producen emigraciones de multitudes de hormigas, a veces éstas crean puentes vivientes con sus propios cuerpos. En esta fotografía de uno de tales puentes (de Fourmi Lierre), se puede ver a las obreras de una colonia Eciton burchelli *entrelazando sus patas y, a lo largo de la parte superior del puente, enganchando sus garras tarsales a fin de formar sistemas irregulares de cadenas. Se observa una lepisma simbiótica,* Trichatelura manni, *en el centro del puente, cruzándolo. [Tomado de E. O. Wilson, The Insect Societies* (Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1971), p. 62.]

> ecuación); pero no hay soluciones si n > 2. He descubierto una demostración verdaderamente prodigiosa de esta afirmación, pero, desdichadamente, es tan reducida que casi no sería visible si la escribo al margen.

Desde ese día, unos trescientos años atrás, los matemáticos* se han estado esforzando por conseguir una cosa o la otra: o bien probar lo afirmado por Fourmi, y en consecuencia reivindicar su reputación, la cual, aunque muy alta, ha sido un tanto empañada por los escépticos para quienes Fourmi, en realidad, jamás encontró la demostración que dijo haber encontrado; o bien refutar su afirmación, hallando el contraejemplo adecuado: un conjunto de cuatro enteros a, b, c y n, donde n > 2, que satisfaga la ecuación. Hasta hace muy poco, todos los ensayos en ambas direcciones habían fracasado. Existe la seguridad de que la Conjetura ya ha sido probada con relación a muchos valores específicos de n: en particu-

* *Mathematicians*, en el original. [T.]

lar, todos los valores n hasta 125,000. Pero nadie había logrado extender la prueba a TODO n . . . nadie, hasta que Johant Sebastiant Fermant ingresó a la escena. El fue quien descubrió la demostración que reivindicó el nombre de Fourmi. Por eso aquélla es llamada ahora "Conjetura Bien-Verificada de Johant Sebastiant".

Aquiles: ¿No habría que llamarla "Teorema", en vez de "Conjetura", puesto que por fin ha sido adecuadamente demostrada?

Oso Hormiguero: Estrictamente hablando, tiene usted razón; es por tradición que se le dice "Conjetura".

Tortuga: ¿Qué clase de música hacía Sebastiant?

Oso Hormiguero: Tenía mucho talento como compositor. Por desgracia, sus más grandes obras han quedado envueltas en el misterio, pues nunca llegó a publicarlas. Hay quienes creen que él conservaba *todo* en su mente; otros, menos benévolos, dicen que probablemente jamás compuso nada en absoluto y que sus afirmaciones al respecto eran pura jactancia.

Aquiles: ¿De qué genero fue su *magnum opus?*

Oso Hormiguero: Tenía que ser un gigantesco preludio y fuga; la fuga debía tener veinticuatro voces, y abarcar veinticuatro distintos temas, todos en ambas tonalidades, mayor y menor.

Aquiles: ¡Sí que sería problemático escuchar una fuga a veinticuatro voces como un conjunto!

Cangrejo: ¡Y qué me dice de componerla!

Oso Hormiguero: Sin embargo, lo único que conozco de esta obra es la descripción que Sebastiant escribió de ella, utilizando el margen de su ejemplar de los Preludios y Fugas para órgano, de Buxtehude. Las últimas palabras que él escribió, antes de su trágica defunción, fueron:

> He compuesto una fuga verdaderamente prodigiosa. He reunido el poder de 24 tonalidades con el poder de 24 temas; he obtenido una fuga dotada del poder de 24 voces. Desdichadamente, este margen es demasiado estrecho para contenerla.

Y la incorpórea obra maestra es simplemente conocida como la "Ultima Fuga de Fermant".

Aquiles: Oh, es terriblemente trágico.

Tortuga: Hablando de fugas, la que estamos escuchando se encuentra próxima a terminar. Hacia el final, hay una contorsión curiosa en el tema. (*Da golpecitos sobre una de las páginas de* El Clave Bien Temperado.) Bueno, ¿qué tenemos aquí? Otra ilustración . . . ¡Qué interesante! (*Se la muestra al Cangrejo.*)

Cangrejo: Bueno, ¿qué tenemos aquí? Oh, ya veo, "HOLISMIONISM", escrito en grandes letras que primero se hacen más pequeñas y luego van creciendo hasta recuperar su tamaño original. Pero esto carece de sentido, porque eso no es una palabra. ¡Oh, qué cosa, qué cosa! (*Entrega la ilustración al Oso Hormiguero.*)

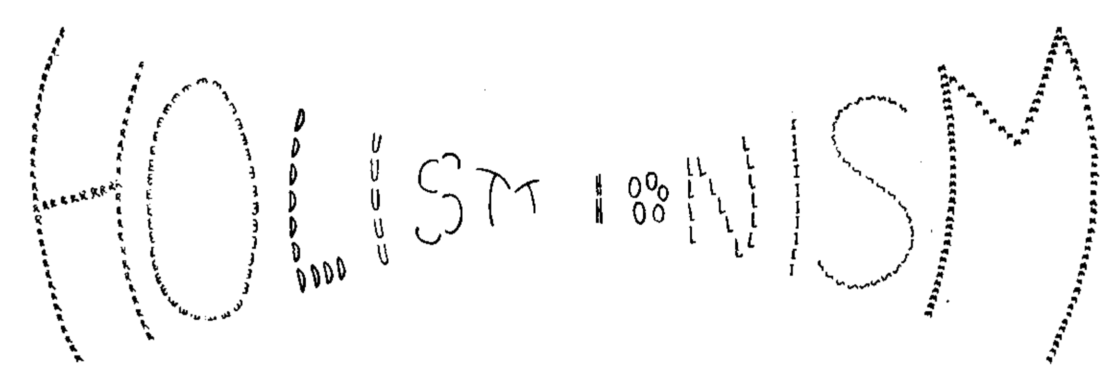


Figura 64. [Dibujo del autor.]

Oso Hormiguero: Bueno, ¿qué tenemos aquí? Oh, ya veo, "REDUCTHOLISM", escrito en pequeñas letras que primero se hacen más grandes y luego van achicándose hasta recuperar su tamaño original. Pero esto carece de sentido, porque eso no es una palabra. ¡Oh, qué cosa, qué cosa! (*Entrega la ilustración a Aquiles.*)

Aquiles: Sé que ustedes no lo creerán, pero en realidad esta imagen consiste en la palabra "HOLISMO", escrita dos veces en inglés (*holism*), en letras que se van haciendo más pequeñas de izquierda a derecha. (*Devuelve la ilustración a la Tortuga.*)

Tortuga: Sé que ustedes no lo creerán, pero en realidad esta imagen consiste en la palabra "REDUCCIONISMO", escrita una sola vez en inglés (*reductionism*), en letras que se van haciendo más grandes de izquierda a derecha.

Aquiles: ¡Esta vez, por lo menos, oí la contorsión del tema! Estoy encantado de que me pusiera usted sobre aviso, señora Tortuga. Creo que, por fin, estoy empezando a captar el arte de escuchar fugas.

CAPITULO XI

Cerebro y pensamiento

Perspectivas nuevas acerca del pensamiento

SOLO CON EL ADVENIMIENTO de las computadoras comenzaron los intentos de producir máquinas de "pensar", y tuvieron lugar caprichosas variantes acerca del tema del pensamiento. Se idearon programas cuyo "pensamiento" era, al pensamiento humano, lo que es a la locomoción humana uno de esos resortes que bajan escaleras saltando e invirtiéndose de un peldaño al siguiente. Súbitamente, las peculiaridades, las debilidades y las potencialidades, las extravagancias y las vicisitudes del pensamiento humano cayeron bajo la alusión de la recién descubierta capacidad de experimentar con formas artificiales, artesanales todavía, de pensamiento, o de aproximaciones al pensamiento. En los últimos veinte años, poco más o menos, hemos adquirido, como resultado, un género nuevo de perspectiva a propósito de lo que es y no es el pensamiento. Entretanto, los estudiosos del cerebro avanzaron mucho en el conocimiento del hardware de pequeña y gran escala de aquél. Si bien no obtuvieron un esclarecimiento considerable del modo en que el cerebro manipula los conceptos, sí han aportado algunas ideas sobre los mecanismos biológicos donde se asienta la manipulación de los pensamientos.

En este capítulo y en el siguiente, trataremos de vincular ciertas nociones surgidas de experimentaciones en el campo de la inteligencia de computadora, con algunos hechos brindados por ingeniosos ensayos con cerebros de animales vivos, y también con los resultados de las investigaciones dedicadas por los psicólogos del conocimiento a los procesos del pensamiento humano. El escenario ya ha sido levantado por el *Preludio y Fuga Hormiguesca*; ahora, desarrollaremos esas ideas más profundamente.

Intensionalidad y extensionalidad

El pensamiento debe depender de la *representación de la realidad en el hardware del cerebro*. En los capítulos anteriores, hemos expuesto sistemas formales cuyo simbolismo representa dominios de la realidad matemática. ¿En qué grado es razonable utilizar tales sistemas formales como modelos de la forma en que el cerebro manipula ideas?

En el sistema pq, y luego en otros sistemas más complicados, vimos có-

mo la significación, en un sentido limitado del término, surge como resultado de un isomorfismo que hace corresponder a los símbolos tipográficos con números, operaciones y relaciones, y a las cadenas de símbolos tipográficos, con enunciados. Ahora bien, en el cerebro no hay símbolos tipográficos; sin embargo, hay algo mejor todavía: elementos activos que pueden almacenar información y transmitirla, además de recibirla de otros elementos activos. Por consiguiente, tenemos allí símbolos *activos* en lugar de símbolos tipográficos pasivos. En el cerebro, las reglas están entremezcladas con los propios símbolos, en tanto que, en el papel, los símbolos son entidades estáticas y las reglas están en nuestra cabeza.

Es importante evitar la suposición, sugerida por la naturaleza bastante estricta de todos los sistemas formales que hemos visto, de que el isomorfismo existente entre símbolos y cosas reales es una correspondencia rígida, elemento por elemento, como los hilos que unen un títere a la mano que lo guía. En TNT, la noción "cincuenta" puede ser expresada en diferentes formas simbólicas; por ejemplo,

((SSSSSSSO · SSSSSSSO) + (SO · SO))
((SSSSSO · SSSSSO) + (SSSSSO · SSSSSO))

El hecho de que ambas expresiones representan el mismo número no es algo que esté en claro *a priori*. Podemos estar manipulándolas independientemente y, en algún punto, toparnos con un teorema que nos haga exclamar, "Oh . . . ¡Es *ese* número!"

Nuestra mente puede albergar diferentes descripciones mentales de una misma persona; por ejemplo:

La persona cuyo libro envié a un amigo, en Polonia, tiempo atrás.

El desconocido que trabó conversación conmigo y con mis amigos esta noche, en este café.

El hecho de que ambas expresiones aludan a la misma persona no es algo que esté en claro *a priori*. En algún momento, durante la velada, podemos toparnos con un tema de plática que nos conduzca a la revelación de que aquéllas designan a la misma persona, lo cual nos hará exclamar, "Oh . . . ¡Usted es *esa* persona!"

No todas las descripciones de una persona tienen que ser relacionadas con determinado símbolo central de la misma, que almacene el nombre correspondiente. Las descripciones pueden ser elaboradas y manipuladas por sí mismas. Podemos inventar seres mediante el recurso de imaginar sus descripciones; podemos combinar dos descripciones si encontramos que ambas representan una entidad única; podemos seccionar una descripción en dos si encontramos que la misma representa dos cosas en lugar de una; y así siguiendo. Este "cálculo de descripciones" está en el

corazón del pensamiento; se ha dicho que es *intensional*, y no *extensional*, lo cual significa que las descripciones pueden "flotar", sin ser adheridas a objetos específicos, conocidos. La intensionalidad del pensamiento está conectada a su flexibilidad: nos da la capacidad de imaginar mundos hipotéticos, amalgamar entre sí descripciones distintas o partir una descripción en piezas separadas, etc.

Supongamos que una amiga, a quien le hemos prestado nuestro automóvil, nos telefonea para decirnos que el coche patinó en un camino montañoso, golpeó contra algún borde y se dio vuelta, y que ella ha escapado de la muerte por milagro. Una serie de imágenes se van suscitando en nuestra mente, las cuales se hacen progresivamente más vívidas en la medida en que nuestra amiga agrega mayores detalles, hasta que al final "lo vemos todo con los ojos de nuestra mente". Entonces, ella nos dice que todo ha sido una broma de Día del Inocente y que ella y el coche están perfectamente bien. En muchos sentidos, esta última circunstancia no es pertinente: la anécdota y las imágenes no pierden nada de su vividez y su recuerdo se retiene durante mucho, muchísimo tiempo. Más tarde, es posible inclusive que pensemos de nuestra amiga que es una conductora insegura, todo a causa del vigor de la primera impresión, la cual debería haber sido barrida cuando supimos que ella no decía la verdad. La fantasía y los hechos se entremezclan muy íntimamente en nuestras mentes, y ello es debido a que el pensamiento abarca la elaboración y la manipulación de descripciones complejas, las cuales no necesitan, en absoluto, ser ligadas a sucesos o a cosas reales.

Una representación flexible, intensional del mundo: en eso consiste el pensamiento, por donde se lo mire. Ahora bien, ¿cómo es posible que un sistema fisiológico como el cerebro dé soporte a un sistema como el del pensamiento?

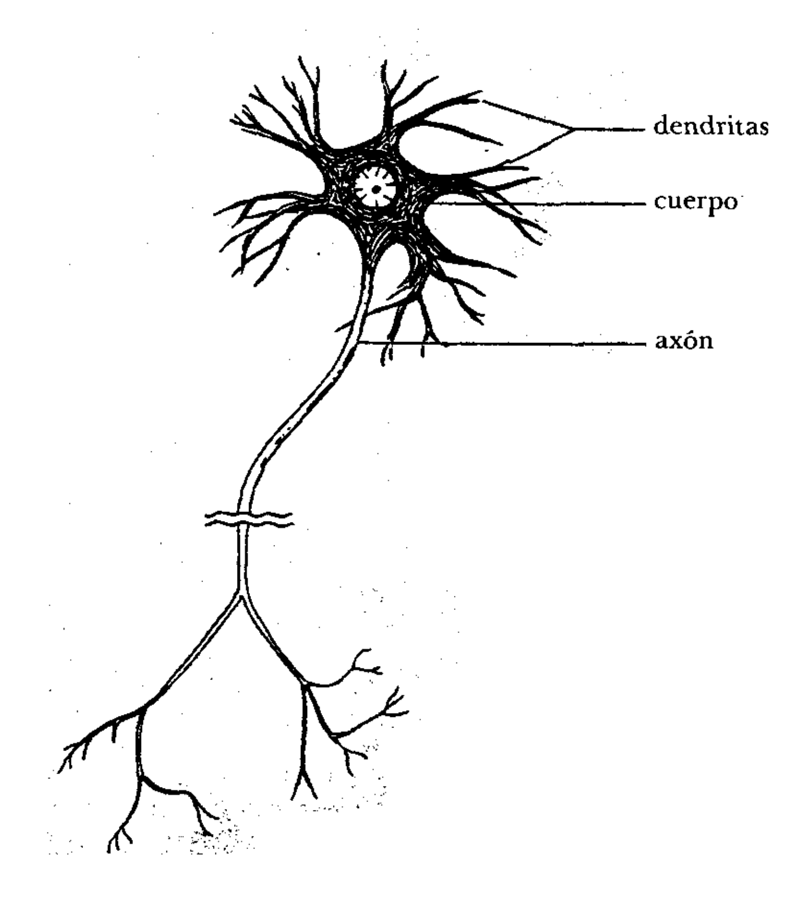
Las "hormigas" del cerebro

Las células más importantes del cerebro son las células nerviosas, o *neuronas* (véase la figura 65), cuyo número es de aproximadamente diez mil millones. (Curiosamente, exceden con mucho a éstas en número —su proporción es de casi diez por una— las neuroglias. Se cree que las glías llenan más de una función de colaboración con el papel estelar que desempeñan las neuronas, por lo que no hablaremos de ellas ahora.) Cada neurona tiene una cantidad de *sinapsis* ("puertas de entrada") y un *axón* ("canal de salida"). La entrada y la salida son flujos electroquímicos: es decir, iones en movimiento. Entre las puertas de entrada y el canal de salida de una neurona se encuentra el cuerpo de la célula: donde se toman las "decisiones". El tipo de decisión que enfrenta —lo cual tiene lugar hasta mil veces por segundo— es el siguiente: si se *excitan* o no; excitarse significa liberar iones por su axón, los cuales finalmente cruzarán las puertas de entrada de una o más neuronas, haciendo que éstas se enfren-

ten a una alternativa similar. La decisión se adopta de una manera muy simple: si la suma de todas las entradas sobrepasa un determinado umbral, *sí*; en caso contrario, *no*. Algunas de las entradas pueden ser entradas negativas, las cuales suprimen las entradas positivas de otras procedencias. En cualquier caso, es la mera suma lo que rige los niveles más bajos de la mente. Podemos parafrasear la célebre expresión de Descartes: "Pienso, luego sumo" (del latín *Cogito, ergo soy*).

Ahora bien, a pesar de que la manera de adoptar la decisión parece muy sencilla, hay un hecho que la complica: puede haber nada menos que 200 000 puertas de entrada distintas en una neurona, lo cual significa que pueden estar comprendidos hasta 200 000 sumandos en la determinación de la próxima acción de la neurona. Ya tomada la decisión, un impulso de iones se dirige hacia el extremo terminal del axón. Antes de llegar allí, los iones pueden encontrarse con una o varias bifurcaciones. En este caso, el impulso unitario de salida se divide para recorrer también

Figura 65. Dibujo esquemático de una neurona. [Adaptado de: D. Wooldridge, The Machinery of the Brain *(New York: McGraw-Hill, 1963), p. 6.]*



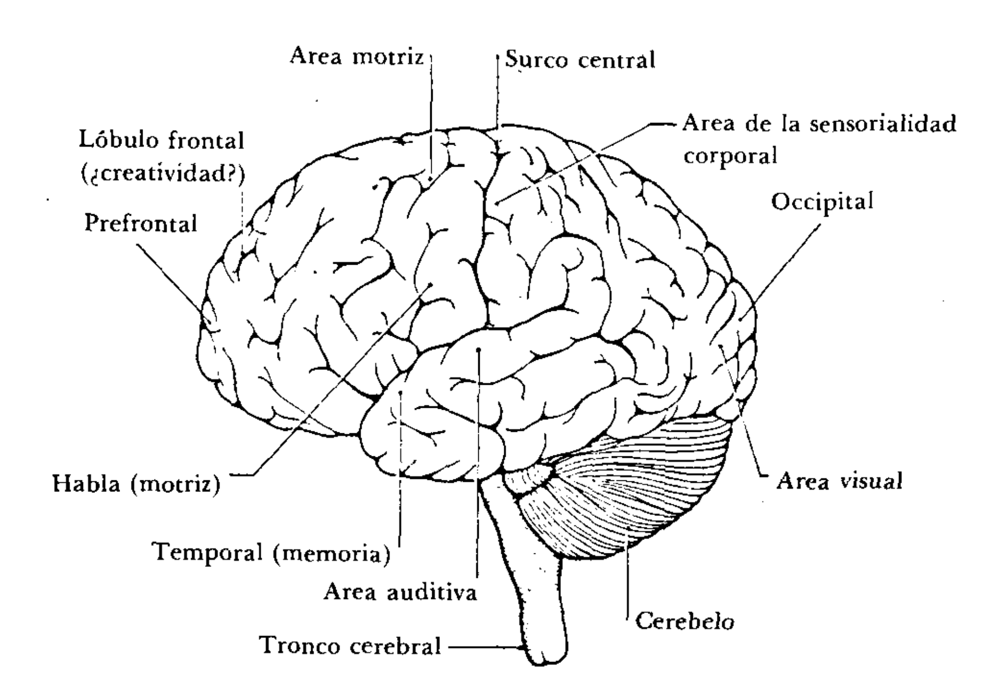


Figura 66. El cerebro humano, visto desde el perfil izquierdo. Es extraño que el área visual esté ubicada en la parte de atrás de la cabeza. [De: Steven Rose, The Conscious Brain, *updated ed. (New York: Vintage, 1966), p. 50.]*

la bifurcación y, en el momento de alcanzar el extremo, "la" se ha convertido en "las", y es posible que no arriben al mismo tiempo porque las ramas del axón por las cuales viajan pueden tener diferentes longitudes y presentar diferentes grados de resistencia. Lo más importante, no obstante, es que todas comienzan como un solo impulso que se desplaza desde el cuerpo de la célula y en dirección al exterior. Luego de excitarse, una neurona necesita un corto lapso de recuperación para excitarse de nuevo; lo habitual es que ello le insuma un milisegundo, de modo que una neurona puede excitarse hasta mil veces por segundo.

Estructuras mayores del cerebro

Acabamos de describir las "hormigas" del cerebro. ¿Y qué diremos de los "equipos" o "señales"? ¿Y de los símbolos? Hacemos la siguiente observación: a pesar de la complejidad de su entrada, una neurona individual únicamente puede responder en una forma primitiva, es decir, excitándose o no excitándose. Esto implica una cantidad muy reducida de información. Indudablemente, para el traslado o el procesamiento de grandes volúmenes de información deben intervenir muchas neuronas. En consecuencia, uno puede conjeturar que deben existir estructuras mayores,

compuestas por muchas neuronas, encargadas de manejar conceptos en un nivel más alto. Por cierto que verdaderamente es así, pero la concepción ingenua según la cual hay un grupo fijo de neuronas por cada concepto es, casi con seguridad, falsa.

Hay muchas porciones anatómicas del cerebro que pueden ser distinguidas entre sí, tales como el encéfalo, el cerebelo, el hipotálamo (véase figura 66). El *encéfalo* es la más grande de estas partes, y está dividido en dos hemisferios: derecho e izquierdo. Los escasos milímetros exteriores de cada uno de los hemisferios cerebrales están revestidos por una "cáscara" estratificada, o *corteza cerebral*. La cantidad de corteza cerebral es el principal rasgo de diferenciación, desde el punto de vista anatómico, entre los cerebros humanos y los de especies menos inteligentes. No describiremos en detalle ninguno de los subórganos cerebrales porque, en función de lo que sabemos hasta la fecha, sólo puede ser trazada la más rudimentaria de las correspondencias entre los subórganos de tan gran escala y las actividades, mentales o físicas, de las cuales son responsables. Por ejemplo, es sabido que el lenguaje tiene su centro en uno de ambos hemisferios, principalmente el izquierdo, por lo común. También, que el *cerebelo* es el lugar desde donde son enviadas series de impulsos a los músculos, con vistas al control de la actividad motora. Pero de qué modo estas áreas desempeñan sus funciones sigue siendo un gran misterio.

Correspondencias entre cerebros

Ahora bien, aquí aparece una pregunta en extremo importante. ¿Si el pensamiento tiene lugar en el cerebro, cuán diferentes, entonces, son dos cerebros entre sí? ¿Cuán diferente es mi cerebro del cerebro del lector? Sin duda, el lector no piensa del modo en que yo lo hago, ni del modo en que lo hace nadie. Pero todos tenemos las mismas divisiones anatómicas en nuestro cerebro. ¿Hasta dónde se extiende esta identidad entre cerebros? ¿Llega al nivel neuronal? Sí, en el caso de animales ubicados en un nivel bastante bajo de la jerarquía mental: la humilde lombriz de tierra, por ejemplo. La cita que sigue corresponde a un neurofisiólogo, David Hubel, y forma parte de palabras que pronunciara en una conferencia sobre comunicación con inteligencias extraterrestres:

> El número de células nerviosas de un animal como la lombriz debe ser, creo, del orden de los miles. Algo muy interesante es que podemos señalar una célula individual en particular, en una determinada lombriz de tierra, y luego identificar la misma célula, la célula correspondiente, en otra lombriz de tierra de la misma especie.[1]

¡Las lombrices de tierra tienen cerebros isomórficos! Uno podría decir, "Hay solamente una lombriz de tierra."

Pero tal correspondibilidad elemento por elemento entre cerebros indi-

[1] Carl Sagan, ed., *Communication with Extraterrestrial Intelligence*, p. 78.

viduales desaparece muy pronto cuando se comienza a ascender en la jerarquía mental y aumenta el número de neuronas . . . ¡lo cual confirma las sospechas de uno en el sentido de que no hay solamente un ser humano! Sin embargo, pueden ser detectadas considerables similitudes físicas *entre* diferentes cerebros humanos si son comparados dentro de una escala mayor que la de una neurona, pero menor que la de los subórganos principales del cerebro. ¿Qué denota esto con relación al modo en que las diferencias mentales individuales están representadas en el cerebro físico? Si examináramos las interconexiones de mis neuronas, ¿encontraríamos diversas estructuras de las que se pudiera determinar que codifican cosas específicas que conozco, creencias específicas que sostengo, esperanzas específicas, temores, preferencias y rechazos específicos que albergo? Si las experiencias mentales pueden ser atribuidas al cerebro, ¿se podrá, del mismo modo, establecer la localización específica del conocimiento y de otras esferas de la vida mental en el cerebro, o en subsistemas físicos específicos del cerebro? Esta es una interrogación central, a la que retornaremos repetidas veces en el curso de este capítulo y del siguiente.

La localización de los procesos cerebrales: un enigma

Preocupado por responder a esa misma interrogación, el neurólogo Karl Lashley intentó descubrir, por medio de experimentos que comenzaron alrededor de 1920 y se extendieron durante muchos años, en qué parte del cerebro almacena una rata los conocimientos que adquiere en materia de recorridos de laberintos. Steven Rose, en su libro *The Conscious Brain*, describe de la siguiente forma los ensayos y las tribulaciones de Lashley:

> Lashley intentaba identificar el locus de la memoria dentro de la corteza; para conseguirlo, primero adiestró ratas para que atravesasen laberintos, y luego les extrajo diversas regiones corticales. A continuación, dejó que los animales se recuperaran, para después verificar si había retención de la habilidad adquirida. Lashley se sorprendió al descubrir que no era posible hallar una región en particular que correspondiese a la capacidad de recordar el camino seguido dentro de un laberinto. En cambio, descubrió que todas las ratas que habían sufrido la extracción de regiones corticales padecían de algún tipo de perturbación y que el alcance de ésta era aproximadamente proporcional a la cantidad de corteza extraída. La extracción de corteza había afectado las capacidades motrices y sensoriales de los animales: cojeaban, se valían de saltitos para avanzar, se bamboleaban, vacilaban, pero de alguna manera se las arreglaban, en todos los casos, para atravesar el laberinto. En cuanto a la memoria, aparentemente la relación de la corteza con ella era equipotencial, es decir, que todas las regiones presentaban la misma utilidad potencial. Por cierto, en su último trabajo, *In Search of the Engram*, aparecido en 1950, Lashley afirmó, más bien lúgubremente, que la única conclusión consistía en que localizar la memoria no era en absoluto posible.[2]

[2] Steven Rose, *The Conscious Brain*, pp. 251-2.

Es curioso que, aproximadamente al mismo tiempo que Lashley realizaba su último trabajo, hacia fines de la década de los cuarenta, en Canadá se desarrollaba una investigación que producía evidencias totalmente opuestas. El neurocirujano Wilder Penfield se dedicó a examinar las reacciones de pacientes cuyos cerebros habían sido operados. Se valió de la inserción de electrodos en diversas partes de dichos cerebros, los cuales estaban expuestos, y del envío de pequeños impulsos eléctricos para estimular la neurona o las neuronas a las cuales habían sido conectados los electrodos. Estos impulsos eran similares a los que provienen de otras neuronas. Penfield descubrió que la estimulación de ciertas neuronas generaba, sin excepción, imágenes o sensaciones específicas en el paciente. Estas impresiones artificialmente provocadas comprendieron desde temores extraños e indefinibles hasta sonidos y colores; y lo más llamativo de todo fue que incluyeron recuerdos de sucesiones enteras de hechos acontecidos en las más tempranas etapas de la existencia, como por ejemplo una fiesta infantil de cumpleaños. El conjunto de lugares que podía desencadenar tales hechos específicos era extremadamente pequeño: básicamente, se centraba en una sola neurona. Ahora bien, estos hallazgos de Penfield se oponen radicalmente a las conclusiones de Lashley, puesto que parecen trasuntar que las áreas locales tenían la responsabilidad de funciones a las cuales se puede considerar, al fin y al cabo, memorias específicas.

¿Cómo entender esto? Una explicación podría ser la de que esas memorias están codificadas localmente, pero repitiéndose incontables veces en diferentes áreas de la corteza: una estrategia así desarrollada a través de la evolución, quizá en previsión de posibles pérdidas de corteza en los combates, o en experimentos dirigidos por neurofisiólogos. Otra explicación sería la de que dichas memorias pueden ser reconstruidas a partir de procesos dinámicos que abarcan el cerebro en su conjunto, pero pueden ser desencadenadas a partir de puntos localizados. Esta teoría se basa en una noción sugerida por las redes telefónicas modernas, donde el itinerario de una comunicación de larga distancia no es predictible por adelantado, pues se lo establece en el momento en que se produce el requerimiento correspondiente y depende de la situación vigente en el sistema nacional entero. La destrucción de cualquier sector local de la red no impediría las comunicaciones; sólo provocaría su desviación en torno a las áreas dañadas. En este sentido, todo llamado es, potencialmente, no localizable. Sin embargo, todo llamado, precisamente, conecta entre sí dos puntos específicos; en este sentido, todo llamado es localizable.

La especificidad del proceso visual

Algunos de los más interesantes y significativos trabajos en materia de localización de procesos cerebrales son los realizados en Harvard, en el

trascurso de los últimos quince años, por David Hubel y Torsten Wiesel. Consiguieron hacer corresponder los recorridos visuales de los cerebros de distintos gatos, comenzando por las neuronas de la retina, siguiendo sus conexiones hacia la parte de atrás de la cabeza, pasando a través del "puesto de relevo" de la articulación lateral, hasta terminar en la corteza visual, situada en la parte posterior del cerebro. Primero de todo, es notable que existan recorridos neurales bien definidos, teniendo en cuenta las conclusiones de Lashley. Pero más notables todavía son las propiedades de las neuronas localizadas en los diferentes hitos del recorrido.

Tenemos que las neuronas de la retina son, en primer lugar, sensores de contraste; más específicamente expresado, tal es la forma en que actúan. Cada una de esas neuronas se excita, normalmente, a "velocidad de crucero". Cuando su porción de retina es herida por la luz, puede excitarse con mayor rapidez o con mayor lentitud, e inclusive cesar de hacerlo. Pero esto sucederá así solamente en el caso de que la parte circundante de la retina esté *menos* iluminada. Luego, esto significa que hay dos tipos de neuronas: "centros de encendido" y "centros de apagado". Las neuronas *centro de encendido* son aquellas cuya frecuencia de excitación se incrementa en todos los sitios donde, dentro de la pequeña área circular de la retina con respecto a la cual son sensitivas, el centro está iluminado pero las inmediaciones a oscuras; las neuronas *centro de apagado* son aquellas que se excitan más rápidamente cuando el centro está en la oscuridad pero los contornos están iluminados. Si un patrón de los que rigen los centros de encendido es presentado a una neurona centro de apagado, ésta *reducirá* su frecuencia de excitación (y viceversa). Ambos tipos de neurona no experimentarán alteración alguna frente a una iluminación uniforme: continuarán excitándose a velocidad de crucero.

Desde la retina, las señales procedentes de estas neuronas se dirigen, a través del nervio óptico, a la articulación lateral, ubicada en algún punto próximo a la mitad del cerebro. Allí, es posible encontrar una proyección directa de la superficie retinal, en el sentido de que hay neuronas de la articulación lateral que son puestas en acción únicamente por estímulos específicos producidos en áreas específicas de la retina. En tal sentido, la articulación lateral es decepcionante: parece ser tan sólo un "puesto de relevo", y no un nuevo procesador (la sensitividad de contraste hace su aporte a la articulación lateral, donde, aparentemente, es realizada). La imagen retinal es codificada de una manera directa por los patrones de excitación de las neuronas de la articulación lateral, a pesar del hecho de que las neuronas no están dispuestas allí sobre una superficie bidimensional, como lo es la forma de la retina, sino en un bloque tridimensional. Así, dos dimensiones son proyectadas sobre tres, sin que se altere la información contenida: un isomorfismo. Probablemente haya alguna profunda significación en el cambio que experimenta la dimensionalidad de la representación, el cual no es apreciado aún en forma completa. De cualquier modo, hay muchos otros estadios inexplicados de la visión que, en

lugar de provocarnos frustración, deberían hacernos sentir complacidos puesto que, en alguna medida, ¡hemos resuelto lo referente a éste!

Desde la articulación lateral, las señales se dirigen a la corteza visual. Aquí ocurren ciertos tipos nuevos de procesos. Las células de la corteza visual se dividen en tres categorías: simples, complejas e hipercomplejas. Las células *simples* actúan de manera muy parecida a las retinales o a las de la articulación lateral: responden a puntos iluminados u oscuros, contrastados por sus respectivos contornos, en regiones particulares de la retina. Las células *complejas*, en cambio, son generalmente alimentadas por un centenar o más de otras células, y detectan las fajas de luz o de oscuridad orientadas en ángulos específicos de la retina (véase figura 67). Las células *hipercomplejas* responden a rincones, fajas e inclusive "lenguas" que se mueven en direcciones específicas (véase también la figura 67). Estas células son tan altamente especializadas que a veces se las denomina "células hipercomplejas de jerarquía más elevada".

¿Una "célula abuela"?

A causa del descubrimiento de células de la corteza visual que pueden ser accionadas por estímulos de complejidad cada vez mayor, hay quienes se han preguntado si las cosas no marchan en la dirección de "una célula, un concepto": por ejemplo, tendríamos una "célula abuela" que se excitaría si, y solamente si, aparece nuestra abuela en nuestro campo de visión. Esta ilustración un tanto humorística de una presunta "célula superhipercompleja" no es considerada muy seriamente. Sin embargo, la teoría alternativa a ésta no impresiona como obviamente razonable. Una posibilidad consiste en que las redes neurales más extensas sean excitadas colectivamente por estímulos visuales suficientemente complejos. Por supuesto, el accionamiento de estas unidades multineuronales más extensas tendría que provenir, de alguna manera, de la integración de señales emanadas de muchas células hipercomplejas. Cómo puede ser que se produzca esto no lo sabe nadie. Precisamente cuando parecemos acercarnos al umbral donde las "señales" se convierten en "símbolos", perdemos la pista: una angustiosa e interminable historia. Volveremos pronto a esta historia y trataremos de completarla en algunas de sus partes.

Anteriormente, mencioné el isomorfismo de trama gruesa que existe, en el plano de una gran escala anatómica, entre todos los cerebros humanos, y el isomorfismo de trama muy fina, en el nivel neural, que existe entre los cerebros de las lombrices de tierra. Es sumamente interesante también la existencia de un isomorfismo entre los aparatos visuales del gato, del mono y del ser humano, isomorfismo cuya "trama" es de algún tipo entre grueso y fino. Veamos cómo funciona: en primer término, las tres especies han "destinado" áreas de corteza ubicadas en la parte posterior de sus cerebros para que allí tenga lugar el procesamiento visual: la

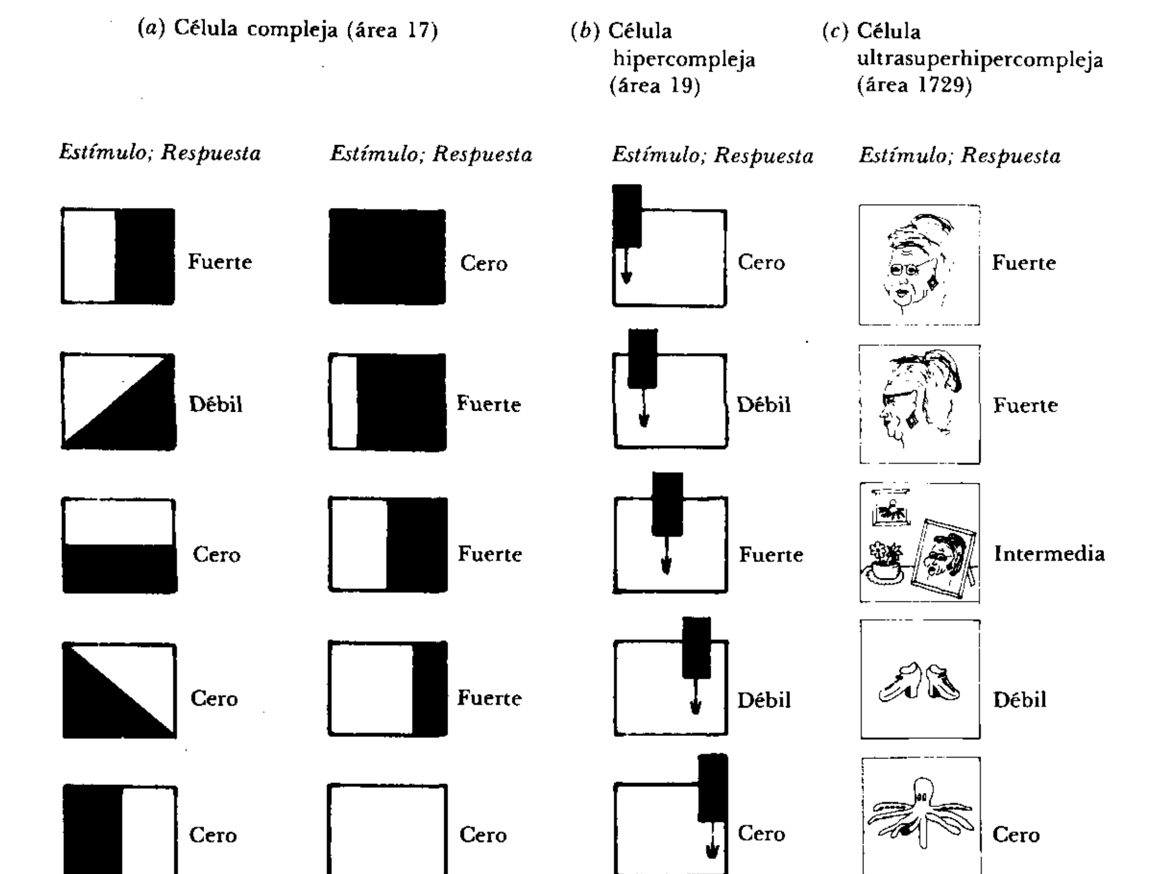


Figura 67. Respuestas de determinadas neuronas simples a sus patrones de estimulación. (a) Esta neurona detectora de bordes busca bordes verticales que tengan luz a la izquierda y oscuridad a la derecha. La primera columna muestra que la orientación *de un borde es pertinente para esta neurona. La segunda columna muestra que la* posición *del borde carece de pertinencia en el caso particular de esta neurona. (b) Muestra cómo una célula hipercompleja responde más selectivamente: en este diagrama, sólo lo hace cuando la lengua descendente está en el centro del campo. (c) Vemos las respuestas de una hipotética "célula abuela" a diversos estímulos arbitrarios; el lector puede entretenerse considerando cómo respondería a los mismos estímulos una "célula pulpo".*

corteza visual; en segundo término, la corteza visual de cada uno de ellos está dividida en tres subregiones, llamadas las áreas 17, 18 y 19 de la corteza. Estas áreas son universales, en el sentido de que pueden ser localizadas en el cerebro de cualquier individuo normal perteneciente a cualquiera de las tres especies. Dentro de cada una de las áreas, es posible ir aún más lejos, hasta llegar a la organización "columnaria" de la corteza visual. En forma perpendicular a la superficie de la corteza, y desplazándose radial-

mente hacia adentro, en dirección al cerebro interior, hallamos las neuronas visuales dispuestas en "columnas": esto es, todas las conexiones se desplazan a lo largo de la dirección radial, columnaria; no lo hacen de una columna a otra. Y cada columna se corresponde con una pequeña y específica región de la retina. La cantidad de columnas no es la misma en cada individuo, por lo que no es posible encontrar "la misma columna". Dentro de una de éstas, por último, hay estratos donde es más factible descubrir neuronas simples, y otros estratos donde es más factible descubrir neuronas complejas. (Las neuronas hipercomplejas tienden a ser descubiertas, predominantemente, en las áreas 18 y 19, en tanto que las simples y las complejas lo son, más que nada, en el área 17.) Aparentemente, aquí se agotan los isomorfismos correspondientes a este nivel de detalle. Desde este punto hacia abajo, hasta el nivel neuronal individual, cada gato, mono o ser humano singular constituyen un ejemplar absolutamente único: algo tan peculiar como las huellas digitales o la firma autógrafa.

Una diferencia pequeña, pero quizá importante, que distingue el procesamiento visual de los gatos del de los monos está relacionada con el punto en el cual la información proveniente de ambos ojos se integra, para producir una sola señal combinada de más alto nivel. Esto tiene lugar ligeramente después en el mono que en el gato, lo cual da a la señal de cada uno de los ojos un lapso ligeramente más extenso para ser procesada por separado. No se trata de algo demasiado asombroso, pues es razonable que, cuanto más alto se ubique una especie en la jerarquía de la inteligencia, más complejos serán los problemas que su sistema visual sea llamado a responder; luego, las señales, en este caso, tendrán que atravesar más y más procesamientos previos, antes de recibir un "rótulo" definitivo. Esto es rotundamente confirmado por la observación de las facultades visuales de un ternero recién nacido, el cual pareciera llegar a la vida con la misma capacidad de discriminación visual que tendrá siempre: se apartará de las personas o de los perros, pero no de sus congéneres. Es probable que su sistema visual tenga completo, antes del nacimiento, su "hardware", y que abarque relativamente pocos procesos corticales. En cambio, el sistema visual humano, tan profundamente afincado en la corteza, requiere varios años para alcanzar su madurez.

Embudando los módulos neurales

Una cosa desconcertante, a propósito de los descubrimientos efectuados hasta ahora acerca de la organización del cerebro, es que han sido encontradas muy escasas correspondencias directas entre la gran escala del hardware y el alto nivel del software. La corteza visual, por ejemplo, es una pieza en gran escala de hardware, destinada por entero a una clara finalidad del género software: el procesamiento de la información visual (pese a que todos los procesos descubiertos hasta el momento correspon-

den, sin excepción, al bajo nivel). En la corteza cerebral, no se ha localizado nada que se parezca al reconocimiento de *objetos*. Ello significa que nadie sabe dónde o cómo la salida de las células complejas e hipercomplejas es transformada en reconocimiento consciente de formas, lugares, imágenes, rostros, etc. Los estudiosos han tratado de encontrar pruebas de un "embudamiento" de muchas respuestas neurales de bajo nivel dentro de respuestas, progresivamente más escasas, de nivel mayor, que culminen en algo semejante a nuestra conocida célula abuela, o en alguna clase de red multineuronal, como la que ya mencionamos. Es evidente que ello no será hallado en grandes divisiones anatómicas que se atribuyan al cerebro, sino, por el contrario, en los resultados de análisis microscópicos.

Una explicación alternativa a la de la célula abuela podría consistir en suponer un conjunto fijo de neuronas: unas pocas docenas, digamos, en el extremo fino del "embudo", todas las cuales se excitan cuando Abuelita ingresa al campo de visión. Y para cada diferente objeto reconocible habría una red única, y un proceso de embudamiento por el que se canalizaría la red. Hay alternativas más complicadas dentro de líneas similares, que presumen varios modos diversos de excitación por parte de las redes, en lugar de un solo modo fijo. Tales redes serían los "símbolos" de nuestro cerebro.

Ahora bien, ¿es necesario el embudamiento? Quizá cuando se observa un objeto sea identificado implícitamente por su "firma" en la corteza visual, lo cual implica la reunión de las respuestas de las células simples, complejas e hipercomplejas. Quizá el cerebro no necesite de ningún mecanismo adicional, aparte del recién mencionado, frente a una forma determinada. Esta teoría, sin embargo, plantea el siguiente problema: supongamos que estamos mirando un cuadro; éste registra su firma en nuestra corteza visual, ¿pero cómo haremos luego para extraer, de esa firma, una descripción verbal de la imagen? Por ejemplo, las pinturas de Edouard Vuillard, un postimpresionista francés, requieren a menudo algunos segundos de examen hasta que, de súbito, surge a la vista una figura humana. Es de suponer que la firma marca su impresión en la corteza visual durante la primera fracción de segundo, pero la pintura es comprendida sólo algunos segundos después. Esto no es más que un ejemplo aislado de un fenómeno muy habitual: la sensación de que algo se "cristaliza" en nuestra mente, en el momento del reconocimiento, lo cual tiene lugar no cuando los rayos de luz chocan nuestra retina, sino un poco más tarde, luego de que cierta parte de nuestra inteligencia ha tenido oportunidad de influir en las señales retinales.

La metáfora de la cristalización permite la bella imagen, derivada de la mecánica estadística, de una miríada de actividades microscópicas e inconexas en el interior de un medio, donde se crean, lentamente, regiones de coherencia que se diseminan y se agrandan; por último, la miríada de pequeños hechos habrá realizado una completa reorganización estructural

de su medio de abajo arriba, convirtiéndolo, de una reunión caótica de elementos independientes, en una estructura amplia, coherente, totalmente articulada. Si las actividades neurales iniciales son consideradas como independientes, y el resultado final de sus muchas excitaciones independientes como la concreción de un gran "módulo" bien definido de neuronas, se debe entender entonces que la palabra "cristalización" es perfectamente adecuada.

Otro argumento en favor del embudamiento se basa en la circunstancia de que hay una miríada de distintas escenas que pueden provocarnos la impresión de que hemos percibido ya el mismo objeto: nuestra abuela, por ejemplo, quien puede estar sonriendo o con el ceño fruncido; con un chal sobre sus hombros, o no; en un jardín en flor o en una oscura estación de ferrocarril; vista desde cerca o desde lejos, de frente o de perfil, y así siguiendo. Todas estas escenas producen firmas sumamente diferentes en la corteza visual, pero todas nos mueven a decir, "Hola, Abuelita". De modo, pues, que un proceso de embudamiento debe tener lugar en algún momento posterior a la recepción de la firma visual y anterior al proferimiento de las palabras. Uno puede sostener que tal embudamiento no es parte de la percepción de Abuelita sino, tan sólo, parte de la verbalización. Pero semejante fragmentación del proceso impresiona como algo muy antinatural, pues es posible la utilización interna, sin verbalizarla, de la información de que se trata de Abuelita. Sería muy difícil manejar toda la información por entero en la corteza visual, cuando una parte tan grande de la misma es descartada, ya que no nos preocupamos por el lado hacia el cual cae la sombra en la escena, o por el número de botones de la blusa, etcétera.

Otra de las dificultades que presenta una teoría no embudadora es cómo explica la existencia de interpretaciones diferentes para una firma única: el cuadro *Convexo y cóncavo*, de Escher (figura 23), por ejemplo. Así como nos parece obvio que no percibimos simplemente *puntos* en una pantalla de televisión, sino *bloques*, suena ridícula la postulación de que la percepción tiene lugar cuando una gigantesca "firma" de apariencia punteada es producida en la corteza visual. Tiene que haber algún embudamiento, cuyo resultado final sea desencadenar ciertos módulos específicos de neuronas, cada uno de los cuales se asocie con los conceptos —los bloques— de la imagen.

Los módulos que intervienen en los procesos del pensamiento

Somos así llevados a la conclusión de que, para cada concepto, hay un módulo perfectamente bien definido, el cual ha podido ser desencadenado; un módulo que consiste en un reducido grupo de neuronas; un "complejo neural" del tipo comentado más atrás. Uno de los problemas

que involucra esta teoría —por lo menos, en el caso de que se la asuma ingenuamente— es su posible sugerencia en el sentido de que se estaría en condiciones de localizar tales módulos en algún punto ubicado dentro del cerebro. Tal cosa no ha sido lograda todavía, y algunas de las comprobaciones efectuadas, como por ejemplo las surgidas de los ensayos de Lashley, se pronuncian en contra de la localización. Sin embargo, una afirmación concluyente al respecto sería prematura. Puede que existan muchas réplicas, diseminadas por todas partes, de cada módulo, o que éstos se encuentren físicamente superpuestos; cualquiera de ambas situaciones tendería a dificultar toda forma de separación de las neuronas en "paquetes". Quizá los complejos se parezcan mucho a delgados panqueques y que constituyan, así, estratos compactos, los cuales se entrecruzarían de vez en cuando; quizá sean como largas serpientes que se enroscan entre sí, irguiéndose aquí y allá, como de cabezas de cobras; quizá sean como telarañas; o, quizá, circuitos donde las señales giren y giren describiendo formas más extrañas que las evoluciones de un mosquito antes de picar. No hay forma de saberlo. Es posible, inclusive, que estos módulos sean fenómenos del orden del software, y no del hardware, pero esto es algo de lo cual hablaremos más adelante.

Son muchas las preguntas que surgen acerca de estos hipotéticos complejos neurales. Por ejemplo:

¿Se extienden a las regiones más bajas del cerebro, tales como el mesencéfalo, el hipotálamo, etc.?
¿Una misma neurona puede pertenecer a más de uno de dichos complejos?
¿*A cuántos de dichos complejos puede pertenecer una misma neurona*?
¿A través de cuántas neuronas pueden darse las superposiciones de dichos complejos?
¿Estos complejos son prácticamente idénticos en todo el mundo?
¿Los complejos correspondientes se localizan en lugares correspondientes, en los cerebros de distintas personas?
¿Se superponen del mismo modo en el cerebro de todo el mundo?

Filosóficamente, la pregunta más importante es la siguiente: ¿Qué nos indicaría la existencia de módulos, la de —por ejemplo— un módulo abuela? ¿Ello nos permitiría penetrar en el fenómeno de nuestra conciencia? ¿O seguiríamos en la misma oscuridad en la que estamos ahora, pese a que ya sabemos que el cerebro está constituido por neuronas y neuroglias? Tal como se puede conjeturar a través de la lectura de la *Fuga Hormiguesca*, me inclino a creer que es muy largo el camino por recorrer para aproximarnos a una comprensión del fenómeno de la conciencia. El paso crucial que imprescindiblemente se debe transitar es el que va desde

una descripción —neurona por neurona— de bajo nivel del estado de un cerebro, a una descripción —módulo por módulo— de alto nivel del estado del mismo cerebro. O, para retornar a la sugestiva terminología utilizada en la *Fuga Hormiguesca*, necesitamos desplazar la descripción del estado cerebral desde el nivel de la *señal*, al nivel del *símbolo*.

Símbolos activos

A todos estos hipotéticos complejos neurales, módulos neurales, paquetes neurales, redes neurales, unidades multineuronales —llamémoslos como queramos, según que se nos aparezcan bajo la forma de panqueques, de diseños de huertos, de culebras, de copos de nieve o inclusive de ondas en la superficie de un lago— los vamos a designar, desde este momento, *símbolos*. Ya se hizo alusión en el Diálogo a la descripción de un estado cerebral en función de los símbolos. ¿Cómo será una descripción así? ¿Qué clase de conceptos será razonable pensar que pueden ser "simbolizados"? ¿Qué clase de relaciones mantendrán los símbolos entre sí? ¿Y qué profundizaciones en el conocimiento de la conciencia suministrará esta imagen en su conjunto?

Lo primero por subrayar es que los símbolos pueden ser *latentes* o *despiertos* (activados). Símbolo activo es aquel que ha sido desencadenado: es decir, aquel donde un número de neuronas suficiente para sobrepasar el umbral han sido excitadas por estímulos provenientes de fuera. Puesto que un símbolo puede ser desencadenado de muy diferentes formas, puede también actuar de muy diferentes formas, una vez despertado. Esto indica que debemos considerar el símbolo no como entidad fija, sino variable. Por consiguiente, para describir un estado cerebral no bastaría con decir "Los símbolos A, B, . . ., N están plenamente activos"; por el contrario, habría que incorporar un conjunto adicional de parámetros para cada símbolo activo, que caracterice determinados aspectos de las acciones que se cumplen internamente en los símbolos. Una pregunta muy interesante sería la de si existirán ciertas neuronas nucleares en cada símbolo, que se exciten invariablemente cada vez que el símbolo se activa; si tal conjunto nuclear de neuronas existe, podríamos referirnos a él llamándolo el "núcleo invariante" del símbolo. Se siente la tentación de suponer que cada vez que se piensa en, digamos, una cascada, se repite el mismo proceso neural fijo, connotado de diversas maneras según el contexto, sin duda, pero volviendo a producirse sin excepción. No obstante, no es seguro que esto tenga que ser así.

Ahora bien, ¿qué hace un símbolo, una vez despertado? Una descripción de bajo nivel diría: "Se excitan muchas de sus neuronas". Pero esto ya no nos interesa. La descripción de alto nivel eliminará toda referencia a las neuronas y se concentrará exclusivamente en los símbolos. Luego, una descripción de alto nivel de lo que hace un símbolo activo, a diferen-

cia de un símbolo latente, diría, "Envía *mensajes*, o señales, cuyo objetivo es tratar de despertar, o desencadenar, otros símbolos". Sin duda, estos mensajes son trasladados, bajo la forma de flujos de impulsos nerviosos, por neuronas; sin embargo, en la medida en que podamos evitar tal fraseología, debemos hacerlo, pues representa una perspectiva de bajo nivel de observación de los fenómenos, y esperar que nos sea posible actuar exclusivamente en un nivel alto. En otros términos, esperamos que sea posible tabicar los procesos del pensamiento, para su consideración, con respecto a los hechos neurales, del mismo modo que el comportamiento de un reloj es tabicado con respecto a las leyes de la mecánica cuántica o que la biología celular es tabicada con respecto a las leyes de los quarks.

¿Y cuál es la ventaja de esta representación de alto nivel? ¿Por qué es mejor decir "Los símbolos A y B desencadenaron el símbolo C", que decir "Las neuronas 183 a la 612 estimularon la neurona 75 y causaron su excitación"? Esta interrogación fue respondida en la *Fuga Hormiguesca*: es mejor porque los símbolos *simbolizan* cosas y las neuronas no. Los símbolos son la concreción del hardware de los conceptos. Un grupo de neuronas que desencadena otra neurona es algo que no se corresponde con ningún acontecimiento exterior, en tanto que el desencadenamiento de cierto símbolo por otros símbolos guarda una relación con hechos del mundo real o de un mundo imaginario. Los símbolos se vinculan entre sí mediante los mensajes que envían de una parte a otra, en tal forma que sus patrones de desencadenamiento son muy semejantes a los acontecimientos de gran escala que suceden en nuestro mundo, o que podrían suceder en un mundo similar al nuestro. En esencia, la significación surge aquí por la misma razón que en el sistema pq: la presencia isomórfica; solamente que aquí el isomorfismo es infinitamente más complejo, sutil, delicado, versátil e intensional.

Dicho al margen, el requisito de que los símbolos sean capaces de trasladar mensajes complicados de una parte a otra quizá sea suficiente para excluir, en las neuronas, la posibilidad de que desempeñen el papel de símbolos. Como una neurona tiene exclusivamente una vía única de envío de la información desde sí misma, y carece de medios para dirigir selectivamente una señal en una o en otra dirección, no tiene, lisa y llanamente, el género de facultad selectiva de desencadenamiento del cual debe estar dotado un símbolo para actuar como un objeto del mundo real. En su libro *The Insect Societies*, E. O. Wilson hace una observación similar con respecto al modo en que se difunden los mensajes en el interior de una colonia de hormigas:

> [La comunicación masiva] se define como la transmisión de información, dentro de grupos, que un individuo en particular no podría transmitir a otro.[3]

[3] E. O. Wilson, *The Insect Societies*, p. 226.

¡No es una imagen tan descartable: el cerebro, visto como una colonia de hormigas!

El problema que sigue —y es también de extrema importancia— se refiere a la naturaleza y a la "dimensión" de los conceptos representados, en el cerebro, por símbolos individuales. Las preguntas que se plantean acerca de la naturaleza de los símbolos son de este tipo: ¿Habrá un símbolo para la noción genérica de cascadas, o distintos símbolos para las diversas cascadas específicas? ¿O tendrán vigencia ambas variantes? En cuanto a la "dimensión" de los símbolos, los interrogantes serían: ¿Habrá un símbolo para cada narración completa? ¿Para cada melodía? ¿Para cada chiste? ¿O lo más probable sería que haya símbolos sólo para conceptos que tengan aproximadamente la dimensión de las palabras, y que las ideas más extensas, como las oraciones o ciertas expresiones, estén representadas por una activación simultánea o sucesiva de diversos símbolos?

Consideremos el tema de la dimensión de los conceptos representados por símbolos. La mayoría de los pensamientos están compuestos por elementos básicos, casi atómicos, a los que por lo general no sometemos a revisión. Su dimensión coincide, más o menos, con la de la palabra; a veces es algo mayor, a veces algo menor: por ejemplo, el nombre "cascada", el nombre propio "Golfo de México", la desinencia "-aba" del pretérito imperfecto, la frase verbal "echar a perder", y frases idiomáticas más extensas, están muy cerca de lo atómico. Son los trazos elementales de pincel que habitualmente usamos para pintar el retrato de conceptos más complejos, tales como el argumento de una película, la personalidad de una ciudad, la naturaleza de la conciencia, etc. Estas ideas complejas no son pinceladas individuales. Parece razonable pensar que las pinceladas de lenguaje son también pinceladas de pensamiento y que, por consiguiente, los símbolos representan conceptos de, aproximadamente, su misma dimensión. Así, un símbolo sería, de un modo general, algo que uno representa mediante una palabra o una expresión determinadas, o a lo cual es asociado un nombre propio. Y la representación cerebral de una idea más compleja, como por ejemplo un conflicto amoroso, sería una secuencia sumamente complicada de activaciones de diversos símbolos por la acción de otros símbolos.

Clases y casos

Existe una distinción corriente con respecto al pensamiento: la que diferencia entre *categorías* e *individuos*, o entre *clases* y *casos* (otros dos términos utilizados en ocasiones son "tipos" y "especímenes"). Se podría suponer, a primera vista, que un símbolo dado tendría que ser, o bien el símbolo de una clase, o bien el símbolo de un caso: pero ello sería incurrir en una ultrasimplificación. En realidad, la mayoría de los símbolos

pueden llenar ambos papeles, según el contexto de su activación. Por ejemplo, veamos esta lista:

(1) una publicación
(2) un periódico
(3) *Provincia mexicana*
(4) la edición del 5 de marzo de *Provincia mexicana*
(5) mi ejemplar de la edición del 5 de marzo de *Provincia mexicana*
(6) mi ejemplar de la edición del 5 de marzo de *Provincia mexicana* en el momento en que lo compré (en contraste con el mismo ejemplar días después, cuando lo uso para armar un barquito de papel)

Las líneas 2 a la 5 cumplen las dos funciones. Así, la línea 4 es un caso dentro de la clase general ubicaba en la línea 3, y la línea 5 es un caso de la línea 4. La línea 6, por su parte, es un género especial de caso de una clase: una *manifestación*. Las manifestaciones de un objeto son los sucesivos estadios de éste en el transcurso de su historia vital. Es interesante preguntarse si las vacas de una granja perciben la identidad individual por debajo de todas las manifestaciones que se registran en el jovial granjero que las alimenta diariamente.

El principio del prototipo

La lista anterior impresiona como una jerarquía en materia de generalidad, donde encontramos, arriba de todo, una muy amplia categoría conceptual, y en el último escalón una muy humilde cosa particularizada, y situada además en el espacio y en el tiempo. Sin embargo, la idea de que una "clase" debe ser siempre enormemente amplia y abstracta es demasiado limitada. Ello es así porque nuestro pensamiento se vale de un ingenioso principio, al que podemos denominar *el principio del prototipo*:

Aun el hecho más específico puede servir como ejemplo genérico de una clase de hechos.

Todos sabemos que los hechos específicos están dotados de una vividez que los imprime tan vigorosamente en la memoria que, más tarde, pueden ser utilizados como modelos de otros hechos, en alguna forma semejantes a aquéllos. Luego, en cada hecho específico existe el germen de una clase completa de hechos similares. Esta idea de existencia de generalidad en lo específico tiene alcances muy importantes.

Ahora bien, es natural que se formule la pregunta: ¿Los símbolos, en el cerebro, representan clases o casos? Y también éstas: ¿Hay ciertos

símbolos que sólo representan clases, mientras que otros representan nada más que casos? ¿O bien un mismo símbolo puede actuar como símbolo de una clase, o como símbolo de un caso, según aquellas de sus partes que hayan sido activadas? Esta última presunción suena atractiva; se puede pensar que una activación "liviana" de un símbolo representaría una clase, y que una activación más profunda, o más compleja, contendría modelos más detallados de excitación neural interna, y en consecuencia representaría un caso. A la luz de una segunda reflexión, no obstante, ello resulta caprichoso: implicaría, por ejemplo, que la activación adecuadamente compleja del símbolo que representa a "publicación" derivaría en la obtención del muy complejo símbolo que representa un periódico específico cuyas páginas estoy empleando para hacer un barquito de papel. Y cualquier otra manifestación de toda otra porción de material impreso estaría internamente representada por alguna manera de activación del símbolo único que representa a "publicación". Esto impresiona como una carga desmesuradamente pesada para poner encima del solo símbolo "publicación". Es necesario concluir, por ende, que los símbolos de casos pueden coexistir, unos junto a los otros, con los símbolos de clases, y no que los primeros son exclusivamente modalidades de activación de los segundos.

La separación entre casos y clases

Por otra parte, los símbolos de casos suelen heredar muchas de sus propiedades de las clases a las cuales pertenecen los casos. Si yo digo que fui a ver una película, mi interlocutor comenzará a "acuñar", en ese momento, un nuevo símbolo de caso para esa película en particular; empero, si no aporto más información, el nuevo símbolo de caso tendrá que reposar en gran parte sobre el símbolo de clase representativo de "película", prexistente en mi interlocutor. Inconscientemente, éste se atendrá a una multitud de presuposiciones acerca de la película: por ejemplo, la de que duró entre una y tres horas, la de que fue exhibida en una sala de esta misma ciudad, la de que narraba un relato sobre ciertas personas, y así siguiendo. Estas presuposiciones forman parte de los símbolos de clase y constituyen los vínculos que se prevén con otros símbolos (es decir, relaciones de desencadenamiento potencial); se las puede denominar *opciones subsidiarias*. En todo símbolo de caso recién acuñado, las opciones subsidiarias pueden, sin dificultad, ser pasadas por alto; pero si aquél no es explícitamente formulado, permanecerán en él las opciones, recibidas en herencia de su símbolo de clase. Mientras no son descartadas, éstas suministran algunas bases preliminares para pensar en el nuevo caso —digamos, volviendo a nuestro ejemplo, para que mi interlocutor piense en la película que fui a ver—, mediante la utilización de conjeturas razonables, las cuales son aportadas por el "estereotipo" o símbolo de clase.

Un caso reciente y simple es como un niño sin ideas o experiencias propias: depende por completo de las experiencias y opiniones de sus padres, las cuales se limita a repetir mecánicamente. En forma gradual, sin embargo, a medida que interactúa cada vez más con el resto del mundo, el niño adquiere sus propias experiencias idiosincráticas, e inevitablemente comienza a apartarse de las de sus padres. Por último, el niño se convierte por completo en adulto. Del mismo modo, un caso nuevo puede separarse de su clase paterna luego de cierto lapso y llegar a ser una clase, o prototipo, por derecho propio.

A fin de ilustrar gráficamente este proceso de separación, supongamos que durante un viaje en automóvil sintonizamos una estación de radio que transmite un partido de futbol entre equipos que no nos son familiares. Al principio, los nombres de los distintos jugadores nos resultan desconocidos. Cuando el relator dice: "Palindromo es derribado en la zona del círculo central, cuando se disponía a cambiar de frente para el contraataque", todo lo que registramos es que un jugador detuvo ilícitamente a otro. Esta es una situación de activación del símbolo de clase "jugador de futbol", representativo de jugada violenta. Pero luego, cuando Palindromo aparece en algunas otras jugadas importantes, comenzamos a construir un nuevo símbolo de caso para él en particular, utilizando su nombre, quizá, como punto focal. Este símbolo es, igual que un niño, dependiente; está supeditado al símbolo de clase representativo de "jugador de futbol": casi toda nuestra imagen de Palindromo es suministrada por nuestro estereotipo de un jugador de futbol, tal como está contenido en el símbolo "jugador de futbol". Paulatinamente, sin embargo, a medida que acumulamos mayor información, el símbolo "Palindromo" se hace más autónomo, y reposa cada vez menos en la activación concurrente de su símbolo paterno de clase. Esto puede ocurrir en el transcurso de escasos minutos, si Palindromo realiza algunas jugadas brillantes, que lo hagan destacarse. Sus compañeros de equipo, no obstante, pueden seguir siendo enteramente representados por activaciones del símbolo de clase. Por último, a lo mejor a los pocos días, cuando ya hemos leído determinados artículos en la sección deportiva del periódico, se rompe el cordón umbilical y Palindromo puede erguirse sobre sus propios pies: ahora sabemos cosas tales como cuál es su lugar de origen y dónde comenzó a jugar futbol, reconocemos su rostro, etc. En este momento, Palindromo deja de ser concebido meramente como un jugador de futbol y pasa a serlo como un ser humano quien, entre otras características, presenta la de jugar profesionalmente al futbol. "Palindromo" es un símbolo de caso que puede transformarse en activo al tiempo que su símbolo paterno de clase (jugador de futbol) permanece en latencia.

Al principio, el símbolo Palindromo fue un satélite que giraba alrededor de su símbolo madre, igual que un satélite artificial en vuelo alrededor de la Tierra, la cual es enormemente más grande y de mayor masa. Viene luego un estadio intermedio, donde uno de los símbolos tiene más

importancia que el otro, pero puede considerarse que cada uno de los dos gira en torno del restante, de modo semejante a como lo hacen la Tierra y la Luna. Finalmente, los nuevos símbolos se hacen autónomos y, a su vez, pueden actuar perfectamente como símbolos de clase alrededor de los cuales es posible que comiencen a rotar nuevos satélites: símbolos representativos de otras personas menos conocidas que Palindromo pero que tienen algo en común con él, por lo cual éste puede servirles transitoriamente de estereotipo, hasta tanto contemos con más información que permita a los nuevos símbolos, a su vez, adquirir autonomía.

La dificultad de desenmarañar los símbolos entre sí

Estos estadios de crecimiento y separación final de un caso con respecto a una clase se distinguirán entre sí de acuerdo a la manera en que se vinculan los símbolos abarcados. Indudablemente, a veces será muy difícil decidir con precisión dónde termina un símbolo y comienza el otro. ¿Cuán "activo" es un símbolo, en comparación con el otro? Si uno puede ser activado independientemente del otro, será entonces enteramente razonable considerarlo autónomo.

Con respecto a la metáfora astronómica que aplicamos hace un momento, es interesante señalar que el problema del movimiento planetario es extremadamente complejo; en realidad, el problema general que plantean tres cuerpos en interacción gravitacional (tales como la Tierra, la Luna y el Sol) está muy lejos de haber sido resuelto, aun después de varios siglos de estudio. Una situación en la cual es posible obtener soluciones muy aproximadas, no obstante, se presenta cuando uno de los cuerpos tiene mucha más masa que los otros dos (el Sol, en el caso citado); tiene sentido entonces considerar como estacionario a ese cuerpo, con los otros dos girando alrededor suyo; tras esto, finalmente, puede incluirse la interacción entre los dos satélites. Pero esta aproximación depende de que se fragmente el sistema: por un lado el Sol, y por otro una "agrupación", es decir, el sistema Tierra-Luna. Esto es una aproximación, pero permite una comprensión sumamente profunda del sistema. Luego, ¿en qué medida dicha agrupación es una parte de la realidad, y en qué medida se trata de una elaboración mental, de una imposición humana de estructurar al universo? Este problema de la "realidad" de los límites trazados entre las agrupaciones que son percibidas como autónomas o semiautónomas generará un sinfín de dificultades cuando lo afrontemos con relación a los símbolos del cerebro.

Una cuestión de lo más desconcertante es la que plantea el simple tema de los plurales. ¿Cómo visualizamos, por ejemplo, tres perros en una taza de té? ¿O varias personas dentro de un elevador? ¿Empezamos con el símbolo de clase que representa a "perro", al cual frotamos para obtener

tres "ejemplares"? ¿O bien lo que hacemos es activar simultâneamente los símbolos "tres" y "perro"? La escena imaginada tendrá que incluir detalles, o de lo contrario se hará difícil seguir sustentando la teoría. Por ejemplo, carecemos, por cierto, de un símbolo de caso independiente para cada nariz, bigote o rasgo que hayamos visto. Dejamos que los símbolos de clase se ocupen de esta gran cantidad de aspectos y cuando nos cruzamos en la calle con gente que tiene bigotes, simplemente activamos, de alguna manera, el símbolo de clase "bigote", sin acuñar nuevos símbolos de caso, salvo que examinemos a esa gente en forma muy atenta.

Por otra parte, una vez que comenzamos a distinguir individuos ya no podemos apoyarnos en un solo símbolo de clase ("persona", por ejemplo), y distribuirlo entre todos los diferentes seres que conocemos. Sin duda, deberán adquirir existencia separada los símbolos de caso representativos de dichos seres. Es ridículo suponer que esta hazaña pueda ser realizada mediante "malabarismos", es decir, mediante el desplazamiento versátil de un mismo símbolo de clase entre diferentes modos de activación (uno para cada persona).

Tiene que haber lugar, entre los extremos, para muchos géneros de variantes intermedias. Puede que haya toda una jerarquía de modalidades de diferenciación, en el cerebro, entre símbolos de clase y símbolos de caso, que dé origen a símbolos —y a organizaciones de símbolos— dotados de distintos grados de especificidad. Los diversos tipos de activación de símbolos individuales y conjuntos que aparecen a continuación pueden ser responsables de imágenes mentales dotadas de grados diferentes de especificidad:

(1) varios modos o profundidades diferentes de activación de un *mismo símbolo de clase;*
(2) activación simultánea de varios símbolos de clase, a través de alguna forma coordinada;
(3) activación de un solo símbolo de caso;
(4) activación de un solo símbolo de caso, en conjunción con la de varios símbolos de clase;
(5) activación simultánea de varios símbolos de caso y de varios símbolos de clase, a través de alguna forma coordinada.

Esto nos devuelve de inmediato a la pregunta acerca de cuándo un símbolo se constituye en un nítido subsistema del cerebro. Consideremos, por ejemplo, la segunda instancia de la lista anterior: la activación simultánea de varios símbolos de clase, a través de alguna forma coordinada. Esto puede muy bien ser lo que ocurre cuando el concepto que consideramos es "sonata para piano" (donde los símbolos de "sonata" y de "piano" son, como mínimo, dos de los símbolos activados). Pero si este par de símbolos es activado en conjunto lo suficientemente a menudo, es razonable suponer que el vínculo entre ambos llegará a tener el vigor necesario

para que funcionen como una unidad cuando sean activados juntamente, en la forma adecuada. Así, dos o más símbolos pueden actuar como si fuesen uno, bajo las condiciones debidas, lo cual significa que el problema de contar la cantidad de símbolos del cerebro es más laborioso de lo que uno podría sospechar.

En oportunidades, pueden surgir condiciones tales que dos símbolos anteriormente desvinculados sean activados en forma simultánea y a través de un modo coordinado. Es posible que se combinen tan bien entre sí que la suya impresione como una unión inevitable y surja de allí un nuevo símbolo, formado por la estrecha interacción de dos símbolos ya existentes. Si así ocurre, ¿habría razón para decir que el nuevo símbolo "siempre estuvo allí pero nunca había sido activado", o habrá que afirmar que el nuevo símbolo ha sido "creado"?

Si esto parece excesivamente abstracto, apelemos a un ejemplo concreto: el Diálogo *Canon Cangrejo.* En la invención de este Diálogo, dos símbolos ya existentes —el de "canon cangrejo musical", y el de "diálogo verbal"— tuvieron que ser activados simultáneamente y, en alguna medida, obligados a interactuar. Una vez hecho esto, el resto era completamente inevitable: nació un nuevo símbolo —un símbolo de clase— de la interacción de aquellos dos, el cual pudo, a partir de ese momento, ser activado por sí mismo. Ahora bien, ¿éste fue siempre un símbolo latente en mi cerebro? Si es así, también tiene que haber sido un símbolo latente en el cerebro de todo ser humano que siempre albergó los símbolos componentes, aun cuando en él no haya despertado nunca el nuevo símbolo. Esto querría decir que, para enumerar los símbolos dentro del cerebro de alguien, habría que incluir todos los símbolos *latentes*: todas las combinaciones y permutaciones posibles de todos los tipos de activaciones de todos los símbolos conocidos. Esto abarcaría también esas fantásticas criaturas de software que inventa nuestro cerebro mientras dormimos: esas extrañas mezclas de ideas que despiertan cuando su huésped se duerme . . . La existencia de tales "símbolos potenciales" muestra que es, realmente, una enorme ultrasimplificación el imaginar que el cerebro consiste en una colección bien definida de símbolos en estados bien definidos de activación. Captar un estado cerebral en función del nivel simbólico es algo mucho más arduo.

Los símbolos: ¿software o hardware?

Ante el inmenso y siempre creciente repertorio de símbolos que tiene presencia en cada cerebro, cabe la pregunta de si finalmente no se llegará a un punto en que el cerebro se sature, esto es, en que ya no haya espacio para ningún símbolo más. Es posible que ello ocurriera si los símbolos jamás se superpusiesen entre sí, si ninguna neurona pudiese cumplir una doble función; entonces. pasaría con los símbolos lo mismo que con las

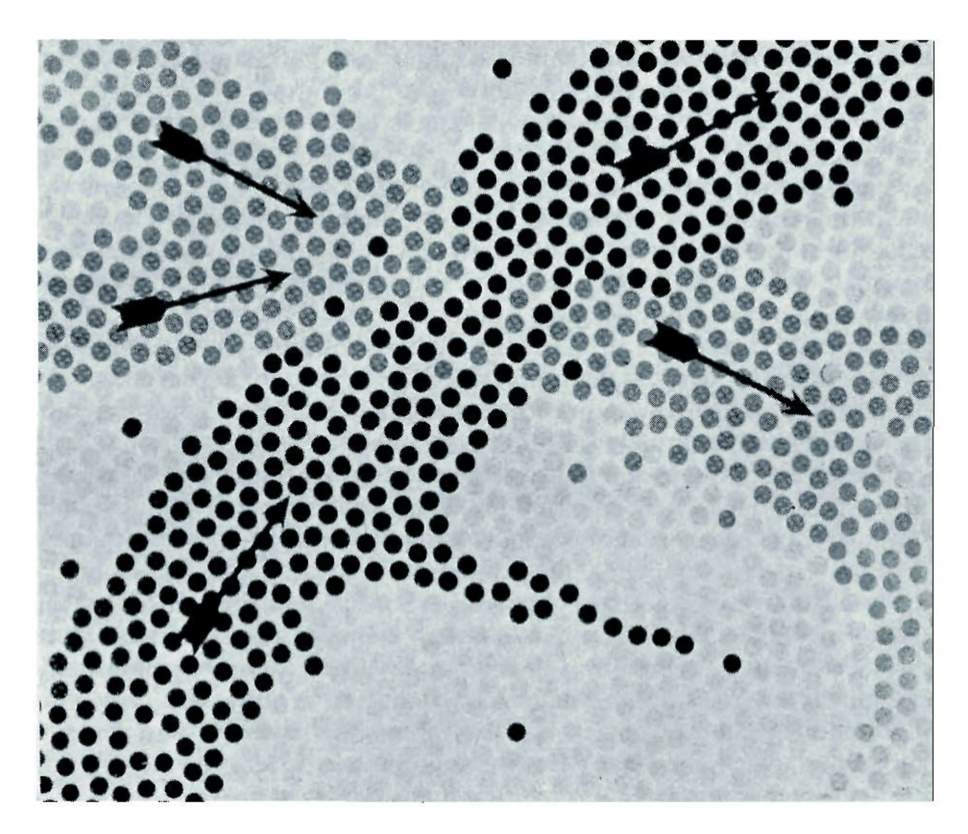


Figura 68. En este esquemático diagrama, las neuronas son imaginadas como puntos dispuestos en un plano. Se muestran dos recorridos neurales superpuestos, en diferentes matices de gris. Puede suceder que dos "destellos neurales" independientes, simultáneamente, transiten con la velocidad del rayo ambos recorridos, atravesándose como dos ondulaciones sobre la superficie de un lago (igual que en la figura 52). Esto ilustra la idea de dos "símbolos activos" que comparten neuronas y que, inclusive, pueden ser activados en forma simultánea. [De John C. Eccles, Facing Reality *(New York: Springer Verlag, 1970), p. 21.]*

personas que ocupan un elevador. "¡Atención: este cerebro tiene una capacidad máxima de 350 275 símbolos!"

Sin embargo, esto no constituye un rasgo necesario del modelo simbólico de la función cerebral. En rigor, la regla probablemente sea la superposición y el más extremo entrelazamiento de los símbolos, de modo tal que cada neurona, lejos de ser un miembro de un solo símbolo, probablemente sea parte funcional de centenares de símbolos. Esto conlleva una pequeña perturbación puesto que, si es cierto, ¿no ocurriría así que toda neurona sería parte de todo símbolo? En tal caso, no sería posible asignar una localización a los símbolos, porque cada uno de éstos estará identificado con el cerebro entero. Ello explicaría conclusiones como las que extrajo Lashley de sus extirpaciones de corteza en ratas . . . pero también significaría el abandono de nuestra idea original de fraccionar el cerebro

en distintos subsistemas físicos. Nuestra primera caracterización de los símbolos "como concreciones del hardware de los conceptos" puede que sea, en el mejor de los casos, una tremenda ultrasimplificación. En verdad, si todo símbolo está construido con los mismos componentes que todo otro símbolo, carece de todo sentido hablar de símbolos diferentes. ¿Cuál sería la firma de la activación de un símbolo determinado, esto es, cómo se podría distinguir la activación del símbolo A de la activación del símbolo B? ¿Habrá que tirar toda nuestra teoría a la basura? Aun cuando no haya una superposición *total* de símbolos, ¿no será cada vez más difícil sostener nuestra teoría, en la medida en que la mayoría de los símbolos *sí* se superponen? (Una forma posible de representación de la superposición de los símbolos es presentada en la figura 68.)

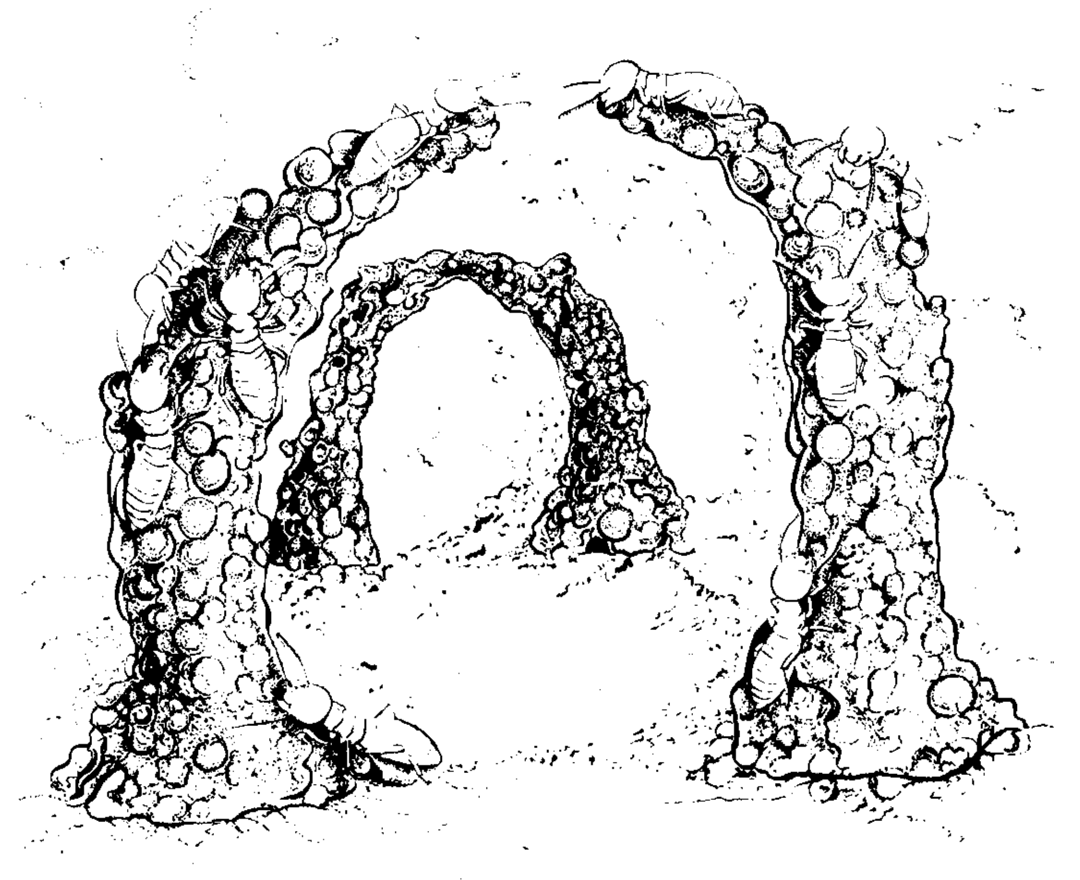
Hay un medio para seguir sustentando una teoría basada en los símbolos, aun cuando éstos se superpongan, físicamente, de manera considerable o inclusive total. Consideremos la superficie de un lago, sobre la cual pueden producirse diferentes tipos de olas y ondulaciones. El hardware —a saber, el agua misma— es idéntico en todos los casos, pero cuenta con la posibilidad de distintos modos de excitación. Tales excitaciones, de nivel software, del mismo hardware, pueden ser diferenciadas perfectamente entre sí. No prentendo llevar tan lejos esta analogía como para sugerir que todos los símbolos son nada más que diferentes tipos de "ondulaciones" que se propagan a través de un medio neural uniforme, el cual no permite ninguna división significativa, en términos físicos, entre distintos símbolos. Pero puede suceder que, a fin de distinguir entre la activación de un símbolo y la activación de otro, sea necesaria la verificación de un proceso que involucre no solamente la localización de las neuronas que se excitan, sino también la muy precisa identificación de detalles relativos a la distribución temporal de las excitaciones que experimentan las neuronas. En otras palabras, ¿cuál neurona precede a cuál otra, y en qué medida?, ¿cuántas veces por segundo se excitó una neurona determinada? Quizá se vea así que pueden coexistir varios símbolos en el mismo conjunto de neuronas, gracias a características diferentes en cuanto a sus patrones de excitación neural. Entre una teoría que postule la distinción física de los símbolos, y otra que postule la superposición de símbolos, los cuales se distinguirían entre sí por sus modalidades de excitación, la diferencia consiste en que la primera aporta los elementos del hardware de los conceptos, en tanto que la segunda aporta elementos que corresponden parcialmente al hardware, parcialmente al software, de los conceptos.

Desprendibilidad de la inteligencia

De este modo, tenemos por delante dos problemas fundamentales para el desciframiento de los procesos del pensamiento, tal como éstos tienen lu-

gar en el cerebro. Uno, es la necesidad de explicar cómo el tráfico de bajo nivel de las excitaciones neuronales da origen al tráfico de alto nivel de la activación de símbolos. El otro, la necesidad de explicar el tráfico de alto nivel de la activación simbólica de una manera intrínseca: elaborar una teoría que no aluda a los hechos neurales de bajo nivel. Si esto último es posible —y se trata de un supuesto clave, en el cual se apoyan todas las investigaciones actuales sobre inteligencias artificiales— la inteligencia, entonces, podrá estar concretada en tipos de hardware que no sean el cerebro. Así, se mostraría que la inteligencia es una propiedad que puede ser "desprendida" limpiamente del hardware en el cual reside; en otras

Figura 69. La construcción de un arco por trabajadoras de las termitas Macrotermes bellicosus. *Cada columna es construida mediante la acumulación de bolitas de tierra y excremento. En la parte externa de la columna de la izquierda se observa una obrera en el momento en que deposita una bolita fecal. Otras, que han transportado bolitas en sus mandíbulas a lo largo de las columnas, las están colocando en los extremos en crecimiento de las mismas. Cuando una columna alcanza determinada altura, las termitas, guiadas evidentemente por el olor, comienzan a dirigirlas en ángulo, hacia la columna vecina. Al fondo, se ve un arco ya completado. [Dibujo de Turid Hölldobler; tomado de E. O. Wilson,* The Insect Societies *(Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1971), p. 230.]*



palabras, que la inteligencia sería una propiedad *software*. Esto querrá decir que el fenómeno de la conciencia y de la inteligencia son, por cierto, de alto nivel, en el mismo sentido en que lo es la mayor parte de los restantes fenómenos complejos de la naturaleza: cuentan con sus propias leyes de alto nivel, las cuales dependen, aunque sean "desprendibles" de ellos, de los niveles más bajos. Si, por otro lado, no existe absolutamente ningún medio para concretar patrones de desencadenamiento de símbolos que carezcan por completo de un hardware de neuronas (o de neuronas simuladas), ello implicará que la inteligencia es un fenómeno ligado al cerebro, mucho más difícil de descifrar que otros cuya existencia se debe a una jerarquía de leyes vinculadas a la presencia de varios niveles diferentes.

En este punto nos volvemos a plantear el misterioso comportamiento colectivo de las colonias de hormigas, quienes pueden construir gigantescos e intrincados hormigueros, a pesar del hecho de que las, aproximadamente, 100 000 neuronas del cerebro de una hormiga no contienen, casi seguramente, ninguna información relativa a la estructura de un hormiguero. ¿Cómo es entonces que surge el hormiguero? ¿Dónde reside la información? En particular, cabe preguntarse dónde se encontrará la información que describe un arco como el que aparece en la figura 69. De alguna manera, ésta debe hallarse diseminada en la colonia, en la distribución de castas, en la distribución por edades y, probablemente, de modo muy amplio en las propiedades físicas del propio cuerpo de las hormigas. Es decir, la interacción entre hormigas está determinada en igual medida por la circunstancia de que cuentan con seis patas, cierto tamaño, etc., como por la información almacenada en su cerebro. ¿Podrá haber una Colonia Artificial de Hormigas?

¿Puede ser aislado un símbolo?

¿Es posible que un único símbolo pueda ser despertado, en forma separada con respecto a todos los demás? Es probable que no. Del mismo modo que los objetos del mundo están siempre en un contexto formado por otros objetos, los símbolos siempre están conectados a una constelación de otros símbolos. Esto no significa, necesariamente, que los símbolos no puedan ser desentrelazados entre sí. Para utilizar una analogía bastante simple: en una especie, aparecen siempre a un tiempo machos y hembras; sus funciones están completamente interrelacionadas y sin embargo ello no quiere decir que no pueda distinguirse entre un macho y una hembra. Cada uno es reflejado por el otro, igual que las cuentas de la red de Indra se reflejan entre sí. El entrelazamiento recursivo de las funciones $F(n)$ y $M(n)$, en el Capítulo V, no impide que cada función tenga sus características propias. El entrelazamiento de F y M podría ser representado por dos RTR que apelen una a la otra. Desde aquí podemos brincar a toda una red de RTA imbricadas entre sí: una heterarquía de procedi-

mientos recursivos interactivos. En este campo, el entretejido es tan inherente que ninguna RTA puede ser activada en forma separada; sin embargo, su activación puede ser totalmente peculiar, imposible de confundir con la de ninguna otra RTA. ¡No es una imagen tan descartable: el cerebro, visto como una colonia de RTA!

También los símbolos, a pesar de los múltiples lazos que los entremezclan, deben permitir que se los aísle. Esto podría implicar la identificación de una red neural, una red más una modalidad de excitación, o bien, probablemente, de algo perteneciente a un género completamente distinto. De todos modos, si los símbolos son parte de la realidad, es presumible que exista un procedimiento natural para trazar su diseño en un cerebro real. Aun así, en el caso de que finalmente fuesen identificados algunos símbolos en un cerebro, esto no querría decir que cualquiera de ellos pueda ser despertado en forma aislada.

El hecho de que un símbolo no pueda ser despertado en forma aislada no opaca la identidad independiente del símbolo; en realidad, se trata de lo contrario: la identidad de un símbolo se funda precisamente en su forma de conectarse (a través de los vínculos de desencadenamiento potencial) con el resto de los símbolos. La red mediante la cual los símbolos tienen la capacidad potencial de desencadenarse entre sí constituye el modelo que la actividad cerebral ofrece del universo real y de los universos alternativos que tome en consideración (los cuales son tan importantes para la supervivencia del individuo en el mundo real como lo es el mundo real mismo).

Los símbolos de los insectos

Nuestra facilidad para convertir clases en casos, y casos en clases, reside en las bases de nuestra inteligencia, y se trata de una de las grandes diferencias entre el pensamiento humano y los procesos de pensamiento de otros animales. No es que yo haya pertenecido a otras especies, y experimentado en carne propia cómo es pensar a la manera de éstas, sino que, desde fuera, es evidente que ninguna otra especie forma conceptos generales como lo hacemos nosotros, o imagina mundos hipotéticos: variantes del mundo que conocemos, las cuales ayudan a resolver qué trayectorias futuras elegir. Veamos, por ejemplo, el famoso "lenguaje de las abejas", que consiste en danzas dotadas de información, ejecutadas por las obreras, de retorno a la colmena, para comunicar al resto de las abejas la ubicación de los sitios ricos en néctar. Aunque haya en cada abeja un conjunto de símbolos rudimentarios, que son activados por dicha danza, no hay motivo para creer que una abeja cuente con un vocabulario ampliable de símbolos. Las abejas y otros insectos parecen no tener la facultad de generalizar, esto es, de desarrollar nuevos símbolos de clase a partir de casos que son percibidos como casi idénticos.

Un experimento clásico es el realizado con avispas solitarias, el cual es narrado en el libro *Mechanical Man*, de Dean Wooldridge, al que pertenece este pasaje:

> Cuando llega la época de depositar sus huevos, la avispa Sphex construye para ello una cueva, y se procura un grillo, al que pica de modo, no de matarlo, sino de paralizarlo. Lo arrastra luego al interior de la cueva, deposita allí sus huevos, la cierra y levanta vuelo para no retornar jamás. A su debido tiempo, la cría rompe el cascarón y se alimenta del paralizado grillo, el cual no ha sufrido descomposición alguna pues ha sido conservado en el equivalente avispa de una congelación a muy baja temperatura. Para el pensamiento humano, un procedimiento tan elaboradamente organizado y a todas luces dotado de finalidad impresiona como guiado por la lógica y la reflexión . . . antes del examen de otros detalles. Por ejemplo, la rutina de la avispa consiste en llevar al paralizado grillo hasta la cueva, dejarlo en el umbral, ingresar para asegurarse de que todo está en orden, salir y por último arrastrar al grillo dentro de la cueva. Si el grillo se aparta algunos centímetros en el transcurso de la inspección mencionada, la avispa, al salir de la cueva, volverá a poner al grillo en el umbral no en el interior, y repetirá el procedimiento preparatorio de ingresar a la cueva para verificar que todo esté como corresponde. Si de nuevo el grillo se desplaza unos centímetros mientras la avispa está adentro, ésta volverá a ubicarlo en el umbral y otra vez ingresará a la cueva para efectuar el control final. La avispa nunca considera la posibilidad de llevar, en estos casos, al grillo directamente al interior de la cueva. En cierta oportunidad, este procedimiento fue repetido cuarenta veces, siempre con el mismo resultado.[4]

Da la impresión de que este comportamiento cuenta con un hardware completo. Pueden existir, en el cerebro de la avispa, símbolos rudimentarios, capaces de desencadenarse entre sí, pero no algo semejante a la capacidad humana de concebir distintos casos como casos de una clase aún-no-conformada y, en consecuencia, elaborar el símbolo de clase; tampoco existe en el cerebro de la avispa algo semejante a la capacidad humana de preguntarse, "¿Qué ocurre si hago tal cosa, qué resultados tendría en ese mundo hipotético?" Este tipo de pensamiento requiere la capacidad de construir casos y operarlos como si fuesen símbolos que representan objetos comprendidos por una situación real, aunque tal situación no se esté produciendo e inclusive no se produzca jamás.

Símbolos de clase y mundos imaginarios

Volvamos a la broma de Inocentes acerca del automóvil prestado y las imágenes suscitadas en nosotros durante la comunicación telefónica. Para la formación de éstas se necesita, primeramente, que se activen los símbolos representativos de un camino, de un automóvil, de una persona dentro de un automóvil. Ahora bien, el concepto "camino" es muy general y quizá incluya un repertorio de variantes que, de modo inconsciente,

[4] Dean Wooldridge, *Mechanical Man*, p. 70.

podemos extraer de la memoria latente cuando es oportuno hacerlo. "Camino" es una clase, antes que un caso. Cuando escuchamos el relato, rápidamente activamos símbolos que son casos revestidos de una especificidad en incremento gradual. Por ejemplo, cuando nos enteramos de que el camino estaba húmedo, ello suscita una imagen más específica, pese a nuestra comprensión de que, muy probablemente, dicha imagen difiera por completo del camino verdadero donde ocurrió el accidente. Pero esto no es importante: lo que interesa es si nuestros símbolos son lo debidamente adecuados como para seguir el relato, es decir, si los símbolos que el relato desencadena pertenecen al género correcto.

A medida que avanza la narración, completamos más aspectos de este camino: hay un borde elevado contra el cual un automóvil podría destrozarse. Ahora bien, ¿esto significa que estamos activando el símbolo de "borde" o que estamos fijándole algunos parámetros a nuestro símbolo de "camino"? Indudablemente, ambas cosas. Es decir, la red de neuronas que representa a "camino" tiene diferentes vías de excitación; lo que estamos haciendo es seleccionar la subred a la que toca excitarse en este instante. Al mismo tiempo, estamos activando el símbolo de "borde", lo cual tiene, probablemente, una función instrumental en el proceso de selección de los parámetros de "camino" ya que las neuronas de "borde" pueden enviar señales a algunas de las involucradas en "camino" y viceversa. (Si esto suena un tanto confuso, es porque, en alguna medida, no estoy distinguiendo lo suficiente entre niveles de descripción: estoy tratando de elaborar una representación de los símbolos y simultáneamente de las neuronas que los componen.) Los verbos y las preposiciones no son menos importantes que los sustantivos. También ellos activan símbolos, los cuales se dirigen mensajes entre sí, en todos los sentidos. Por supuesto, hay diferencias características entre los patrones de desencadenamiento de símbolos correspondientes a los verbos y los correspondientes a los sustantivos, lo cual significa que pueden estar organizados, físicamente, de un modo algo distinto. Por ejemplo, puede que los sustantivos cuenten con símbolos perfectamente localizados, mientras que los verbos y las preposiciones quizá tengan símbolos dotados de muchos "tentáculos" diseminados por toda la corteza; o bien, una cantidad enorme de otro tipo de posibilidades.

Luego de completada la narración, se nos hace saber que no es verdadera. La facultad de obtener casos "por frotación", a partir de las clases, como quien saca brillo a la broncería de un templo, nos ha permitido representarnos la situación y nos ha liberado de la necesidad de permanecer fieles al mundo real. El hecho de que los símbolos puedan actuar como matrices de otros símbolos nos brinda cierta independencia mental con respecto a la realidad: podemos crear universos artificiales, donde sucedan acontecimientos ficticios caracterizados por todos los detalles que se nos ocurra asignarles. Sin embargo, los símbolos de clase mismos, de los cuales emana toda esta prodigalidad, están profundamente enraizados en la realidad.

Por lo común, los símbolos cumplen funciones isomórficas con respecto a acontecimientos que verosímilmente puedan suceder, aunque a veces sean activados símbolos que representan situaciones que no pueden ocurrir, como la de una tuba poniendo huevos, por ejemplo, o la de dos torres de ajedrez caminando del brazo. Los límites entre lo que puede suceder y lo que no puede suceder son extremadamente difíciles de trazar. Cuando imaginamos un hecho hipotético, ponemos a ciertos símbolos en estado activo: según cómo interactúen (lo cual se reflejará, presumiblemente, en nuestro grado de asentimiento a continuar en la misma línea de pensamiento), es que diremos si el hecho "puede" o "no puede" suceder. De modo, pues, que las expresiones "puede" y "no puede" son sumamente subjetivas. En realidad, hay un amplio acuerdo entre la gente con respecto a cuáles acontecimientos pueden o no pueden ocurrir. Ello muestra el gran volumen de estructura mental que compartimos por entero . . . pero hay una área fronteriza donde se hace evidente el carácter subjetivo de la decisión acerca de qué mundos hipotéticos estamos dispuestos a tener en cuenta. Un estudio cuidadoso de los géneros de hechos imaginarios que los seres humanos estiman que pueden y no pueden producirse haría posible profundizar nuestro conocimiento de los patrones desencadenantes de símbolos, gracias a los cuales pensamos.

Leyes intuitivas de la física

Cuando finaliza el relato, tenemos construido por completo un elaborado modelo mental de la escena, y en este modelo todos los objetos obedecen las leyes físicas. Ello quiere decir que las leyes físicas deben estar presentes, implícitamente, en los patrones desencadenantes de los símbolos. La expresión "leyes de la física" no significa aquí, por cierto, "las leyes de la física tal como son expuestas por los físicos", sino las leyes intuitivas y articuladas en bloques que todos necesitamos tener en nuestras mentes a fin de sobrevivir.

Es curioso que podamos, voluntariamente, elaborar secuencias mentales de hechos que violan las leyes físicas, si así lo deseamos. Por ejemplo, si sugiero a alguien que imagine una escena donde dos automóviles se aproximan de frente y luego pasan uno a través del otro, esa persona no tendrá dificultades para conseguirlo. Las leyes físicas intuitivas pueden ser desplazadas por las leyes imaginarias de la física; ahora bien, cómo se produce este desplazamiento, cómo son elaboradas tales secuencias de imágenes y, ciertamente, qué clase de imágenes visuales son éstas, son misterios profundamente escondidos: inaccesibles piezas de conocimiento.

Es innecesario recordar que, en nuestro cerebro, no solamente hay le-

yes articuladas en bloques, relativas al modo en que actúan los objetos inanimados, sino también al modo en que lo hacen las plantas, los animales, la gente y las sociedades; en otras palabras, leyes articuladas en bloques de la biología, la psicología, la sociología, y así siguiendo. Todas las representaciones internas de tales entidades implican la presencia inevitable de modelos construidos en función de bloques: el determinismo es sacrificado a la simplicidad. Nuestra representación de la realidad no va más allá de poder predecir las probabilidades de alcanzar determinadas zonas, dentro de espacios abstractos de comportamiento: no puede predecir nada con la precisión de la física.

Conocimiento declarativo y procedimental

En el campo de las inteligencias artificiales se distingue entre conocimiento de tipo procedimental y de tipo declarativo. Se dice de una pieza de conocimiento que es *declarativa* cuando es explícitamente almacenada, de modo que no solamente el programador, sino también el programa, puedan "leerla" como si estuviera incluida en una enciclopedia o en un repertorio. Esto quiere decir, generalmente, que su codificación está localizada y no ampliamente diseminada. En contraste, el conocimiento *procedimental* no se codifica como hecho, sino como programa. Un programador puede estar en condiciones de hacer un examen y luego decir, "Veo que gracias a estos procedimientos incluidos aquí, el programa 'sabe' escribir oraciones en inglés", pero el programa mismo puede no ser explícitamente sabedor de *cómo* hace para escribir esas oraciones. Por ejemplo, su vocabulario quizá no incluya, para nada, las palabras inglesas que significan "inglés", "oración" y "escribir" . . . Luego, el conocimiento procedimental está diseminado por todas las piezas, y no se lo puede delimitar, ni "teclear": es una consecuencia global del modo en que funciona el programa, no un detalle localizado. En otras palabras, una pieza de conocimiento exclusivamente procedimental es un epifenómeno.

En la mayoría de las personas coexiste, junto con una vigorosa representación procedimental de la gramática de su lengua materna, una representación declarativa, más débil, de la misma. Ambas pueden entrar fácilmente en conflicto, como se advierte cuando un hablante nativo enseña a un extranjero, a menudo, a utilizar expresiones que él mismo no emplearía nunca, pero que emanan del declarativo "libro de texto" que conoció en su época escolar. Las leyes intuitivas o articuladas en bloques de la física y de las demás disciplinas ya mencionadas se ubican principalmente en el sector procedimental; el conocimiento de que un pulpo tiene ocho tentáculos se ubica principalmente en el sector declarativo.

Entre los extremos declarativo y procedimental hay todos los matices posibles. Consideremos el recuerdo de una melodía: ¿se encuentra ésta al-

macenada en nuestro cerebro, nota por nota? ¿Un cirujano podría extraer un rollo de filamento neural de nuestro cerebro, estirarlo y luego proceder a señalar a lo largo del mismo las notas sucesivamente almacenadas, casi como si se tratara de una porción de cinta magnética? Si es así, las melodías están almacenadas declarativamente. ¿O bien el recuerdo de una melodía pasa por la mediación de la interacción de un gran número de símbolos, algunos de los cuales representan relaciones tonales; otros, cualidades emotivas, otros, aspectos rítmicos, etc.? Si es así, el almacenamiento de las melodías es procedimental. En verdad, probablemente haya una mezcla de ambas variantes en el modo en que una melodía es almacenada y recordada.

Es interesante que cuando se extrae una melodía de la memoria la mayoría de las personas no discrimina en cuanto a la tonalidad, y así es como "Cumpleaños feliz" se canta tanto en Fa sostenido como en Do. Esto indica que son almacenadas las *relaciones* entre sonidos y no los sonidos absolutos. Pero no hay motivo para que una relación entre sonidos no pueda ser almacenada en forma totalmente declarativa. Por otro lado, algunas melodías son muy fáciles de memorizar, pero existen otras sumamente huidizas; si sólo fuera cuestión de acopiar notas sucesivas, sería igualmente fácil almacenar una melodía como cualquier otra. El hecho de que algunas melodías sean pegadizas y otras no parece indicar que el cerebro tiene cierto repertorio de patrones familiares, los cuales son activados cuando es escuchada la melodía. Así, para "ejecutar" la melodía, esos patrones tendrían que ser activados en el mismo orden, y esto nos lleva de nuevo a la noción de símbolos que se desencadenan entre sí, y no a la de una simple secuencia lineal de notas, o relaciones entre sonidos, almacenados declarativamente.

¿Cómo sabe el cerebro si una pieza de conocimiento está almacenada declarativamente? Por ejemplo, supongamos que se nos pregunta, "¿Cuántos habitantes tiene la ciudad de México?": una cifra aproximada a los catorce millones nos vendrá a la mente, y no una respuesta sorprendida del tipo, "Oiga, ¿cómo se le ocurre que voy a ponerme a contarlos?" Supongamos ahora que la pregunta es, "¿cuántas sillas hay en la sala de su casa?" Aquí sucede lo contrario: en lugar de rastrear la respuesta en un fichero mental, nos dirigimos de inmediato a la sala y contamos las sillas, o bien reconstruimos la sala en nuestra cabeza y contamos las sillas que aparezcan en esa imagen. Las dos preguntas anteriores son del mismo tipo —"¿cuántas?"—, pero una de ellas trajo como resultado la recuperación de una pieza de conocimiento declarativo, mientras que la otra trajo como resultado que se recurriera a un método procedimental de búsqueda. Está claro, según lo muestra este ejemplo, que tenemos conocimiento de cómo clasificamos nuestro propio conocimiento y, lo cual es más importante, que una parte de ese *metaconocimiento* puede, a su vez, ser almacenado de manera procedimental, de modo que sea utilizado sin que, inclusive, advirtamos cómo se produce tal utilización.

Imaginación visual

Una de las cualidades más notables y más difíciles de describir de la conciencia es la imaginación visual. ¿Cómo creamos una imagen visual de la sala de nuestra casa? ¿O de un rápido arroyo montañés? ¿O de una naranja? Más misteriosamente todavía: ¿cómo construimos imágenes inconscientemente, imágenes que guían nuestros pensamientos, a los cuales otorgan fuerza, color, profundidad? ¿De qué almacén son recuperados? ¿Qué magia nos permite entremezclar dos o tres imágenes, sin brindar ningún indicio acerca de cómo lo conseguimos? El conocimiento de cómo hacemos esto se encuentra entre los más procedimentales de todos, pues no tenemos casi ningún vislumbre en cuanto a qué es la imaginación mental.

Puede que la imaginación se base en nuestra capacidad de suprimir la actividad motriz. Con esto, quiero decir lo siguiente: si imaginamos una naranja, en nuestra corteza puede suscitarse un conjunto de órdenes, tales como recogerla, olerla, examinarla, etc. Sin duda, estas órdenes no pueden ser cumplidas porque la naranja no está allí, pero pueden ser dirigidas, a través de los canales ordinarios, hacia el cerebelo u otros subórganos del cerebro hasta que, en algún punto crítico, se cierre un determinado "grifo mental", impidiendo así que las órdenes sean llevadas a la práctica. Según el grado de avance, en la línea donde se sitúe el "grifo", las imágenes podrán ser más o menos vívidas y verosímiles. La cólera puede llevarnos a imaginar con total verismo que tomamos un objeto y lo arrojamos, o que le damos una patada a alguna cosa; sin embargo, no procedemos efectivamente así. Por otra parte, nos sentimos "casi" actuando efectivamente así. Es probable que el grifo detenga los impulsos nerviosos "en el último instante".

Hay otra vía a través de la cual la visualización hace notar la distinción entre conocimiento accesible e inaccesible. Examinemos cómo fue nuestra visualización de la escena del automóvil resbalando sobre el camino de montaña. Por supuesto, imaginamos las montañas mucho más grandes que el automóvil. Ahora bien, ¿esto ocurre porque en alguna oportunidad, hace mucho, tuvimos ocasión de advertir que "los automóviles no son tan grandes como las montañas", fijamos entonces el dato en nuestra memoria, y al imaginarnos lo que nos relata nuestra amiga recuperamos dicho dato y lo utilizamos para construir nuestra imagen? Se trata de una teoría muy improbable. ¿Esto no ocurrirá, en cambio, como consecuencia de ciertas interacciones, introspectivamente inaccesibles, de los símbolos que han sido activados en nuestro cerebro? Obviamente, esto último parece mucho más verosímil. El conocimiento de que los automóviles son más pequeños que las montañas no es una pieza de memorización mecánica, sino una pieza de conocimiento que puede ser generada por *deducción*. En consecuencia, lo más probable es que no esté almacenada en ningún símbolo individual de nuestro cerebro sino que, por el contrario, pueda producirse como resultado de la activación, seguida de

interacción recíproca, de muchos símbolos: los que representan a "comparar", "tamaño", "automóvil", "montaña", pongamos por caso, y probablemente algunos otros. Esto significa que el conocimiento no está acopiado explícita, sino implícitamente, a través de una muy amplia diseminación, y no bajo la forma de un "paquete de información" localizado. Circunstancias tan simples como el tamaño relativo de los objetos tienen que ser reunidas, en lugar de, simplemente, recuperadas. Por consiguiente, inclusive en el caso de una pieza verbalmente accesible de conocimiento, existen complejos procesos inaccesibles que actúan como intermediarios para que se pueda llegar al punto en que aquélla esté lista para ser dicha.

Continuaremos con nuestra exploración de las entidades denominadas "símbolos" en diferentes capítulos. En los Capítulos XVIII y XIX, sobre inteligencias artificiales, consideraremos algunas formas posibles de instrumentar símbolos activos en programas. En el capítulo que sigue, veremos ciertos aportes, referidos a la comparación entre cerebros, que nos brinda nuestro modelo de base simbólica de la actividad cerebral.

Suite anglofrancogermánico española

Por Lewis Carroll[1] . . .

et Frank L. Warrin[2] . . .

. . . und Robert Scott[3]

. . . Y Ulalume González de León*

Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe:
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.

Il brilgue: les tôves lubricilleux
Se gyrent en vrillant dans le guave.
Enmîmés sont les gougebosqueux
Et le mômerade horsgrave.

Es brillig war. Die schlichten Toven
Wirrten und wimmelten in Waben;
Und aller-mümsige Burggoven
Die mohmen Räth' ausgraben.

Era la parrillhora y los flexiosos tovos
en el cesplejos giroscopiaban, vibrhoradaban.
Frivoserables estaban los borogovos
y los verchinos telehogariados relinchiflaban.

[1] Lewis Carroll, *The Annotated Alice (Alice's Adventures in Wonderland* y *Through the Looking-Glass)*. Introducción y notas de Martin Gardner (New York: Meridian Press, New American Library, 1960). Esta fuente contiene las tres versiones. Las fuentes originales de los textos francés y alemán son citadas abajo.

[2] Frank L. Warrin, *The New Yorker*, enero 10, 1931.

[3] Robert Scott, "The Jabberwock Traced to Its True Source", *Macmillan's Magazine*, Feb. 1872.

* De entre las diversas versiones españolas de este celebérrimo poema de Lewis Carroll, el "*Jabberwocky*", se ha optado por la de Ulalume González de León, incluida en su libro *El riesgo del placer*, publicado en México por la Editorial Era. [T.]

"Beware the Jabberwock, my son!
The jaws that bite, the claws that catch!
Beware the Jubjub bird, and shun
The frumious Bandersnatch!"

«Garde-toi du Jaseroque, mon fils!
La gueule qui mord; la griffe qui prend!
Garde-toi de l'oiseau Jobe, évite
Le frumieux Band-à-prend!»

»Bewahre doch vor Jammerwoch!
Die Zähne knirschen, Krallen kratzen!
Bewahr' vor Jubjub-Vogel, vor
Frumiösen Banderschnätzchen!«

"¡Hijo mío! del Jábberwock escapa cuidadoso;
de su boca que muerde, sus garras que lastiman.
¡Cuidado con el pájaro Jubjub, y al malhurioso
Bándersnatch siempre esquiva!"

He took his vorpal sword in hand:
Long time the manxome foe he sought—
So rested he by the Tumtum tree,
And stood awhile in thought.

Son glaive vorpal en main, il va-
T-à la recherche du fauve manscant;
Puis arrivé à l'arbre Té-té,
Il y reste, réfléchissant.

Er griff sein vorpals Schwertchen zu,
Er suchte lang das manchsam' Ding;
Dann, stehend unterm Tumtum Baum,
Er an-zu-denken-fing.

La vorpalina espada ya empuñando,
al enemigo manxiqués buscó,
y junto al árbol Túmtum, descansando,
a pensar un momento, se paró.

And, as in uffish thought he stood,
The Jabberwock, with eyes of flame,
Came whiffling through the tulgey wood,
And burbled as it came!

Pendant qu'il pense, tout uffusé,
Le Jaseroque, à l'oeil flambant,
Vient siblant par le bois tullegeais,
Et burbule en venant.

Als stand er tief in Andacht auf,
Des Jammerwochen's Augen-feuer
Durch turgen Wald mit Wiffek kam
Ein burbelnd Ungeheuer!

Pensamientos ufiosos lo embargaban
cuando el Jábberwock vino resoplando
por la fronda, con fuego en la mirada,
¡y avanzó burbujeando!

One, two! One, two! And through and through
The vorpal blade went snicker-snack!
He left it dead, and with its head
He went galumphing back.

Un deux, un deux, par le milieu,
Le glaive vorpal fait pat-à-pan!
La bête défaite, avec sa tête,
Il rentre gallomphant.

Eins, Zwei! Eins, Zwei! Und durch und durch
Sein vorpals Schwert zerschnifer-schnück,
Da blieb es todt! Er, Kopf in Hand,
Geläumfig zog zurück.

¡Una, dos! ¡Una, dos! De lado a lado
con vorpalina espada, tris, tras, corta.
Mata al monstruo, su testa ha cercenado,
galonfando la porta.

"And hast thou slain the Jabberwock?
Come to my arms, my beamish boy!
O frabjous day! Callooh! Callay!"
He chortled in his joy.

«As-tu tué le Jaseroque?
Viens à mon coeur, fils rayonnais!
Ô jour frabbejais! Calleau! Callai!»
Il cortule dans sa joie.

»Und schlugst Du ja den Jammerwoch?
Umarme mich, mein Böhm'sches Kind!
O Freuden-Tag! O Halloo-Schlag!«
Er schortelt froh-gesinnt.

"¿Mataste pues al Jábberwock?
¡Ven a mis brazos, hijo rayolgente!
¡Frabioso día! ¡Calu! . . . ¡Cáloc!",
resolló alegremente.

'Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe:
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.

Il brilgue: les tôves lubricilleux
Se gyrent en vrillant dans le guave.
Enmîmés sont les gougebosqueux
Et le mômerade horsgrave.

Es brillig war. Die schlichten Toven
Wirrten und wimmelten in Waben;
Und aller-mümsige Burggoven
Die mohmen Räth' ausgraben.

Era la parrillhora y los flexiosos tovos
en el cesplejos giroscopiaban, vibrhoradaban.
Frivoserables estaban los borogovos
y los verchinos telehogariados relinchiflaban.

CAPITULO XII

Mente y pensamiento

¿Hay correspondencia entre las mentes?

AHORA QUE YA hemos trazado una hipótesis acerca de la existencia de subsistemas cerebrales activos de muy alto nivel (los símbolos), podemos regresar al tema de un posible isomorfismo, al menos parcial, entre dos cerebros. En lugar de interrogarnos sobre un isomorfismo en el nivel neural (el cual, seguramente, no existe), o en el nivel macroscópico de los subórganos (el cual, seguramente, existe, pero no nos ilumina mucho), nos planteamos la posibilidad de un isomorfismo entre cerebros en el nivel simbólico: una correspondencia que no sólo vincule entre sí los símbolos de cada uno de los cerebros, sino también los respectivos patrones de desencadenamiento. Esto significa que los símbolos correspondientes están conectados, dentro de cada cerebro, en formas que también son correspondientes entre cerebro y cerebro. Esto sería un verdadero isomorfismo *funcional*: el mismo tipo de isomorfismo del que hablamos cuando tratamos de caracterizar qué es lo invariante entre todas las mariposas.

Está claro, desde el principio, que semejante isomorfismo no existe entre ningún par de seres humanos. Si existiera, los pensamientos de éstos no podrían diferenciarse; para que esto fuese así, empero, esos seres deberían tener memorias completamente indiferenciables, lo cual implicaría que han tenido que vivir una y la misma existencia. Ni siquiera los gemelos idénticos se aproximan, en la más remota medida, a este ideal.

¿Y en un mismo individuo? Cuando uno relee cosas que escribió pocos años atrás, piensa "qué malo es esto", y le sonríe divertido a la persona que uno fue entonces. Mucho peor es cuando uno hace lo mismo con respecto a una cosa escrita hace cinco minutos. Que esto ocurra demuestra que uno no comprende por completo a la persona que se era minutos atrás. El isomorfismo entre el cerebro de *ahora* y el cerebro de *entonces* es imperfecto. ¿Qué pasará, pues, con los isomorfismos entre personas distintas, entre especies distintas . . .?

La otra cara de la moneda consiste en el poder de la comunicación que surge entre los extremos más disímiles que se pueda concebir. Pensemos en las barreras que se dejan atrás cuando se lee la poesía escrita en la cárcel por

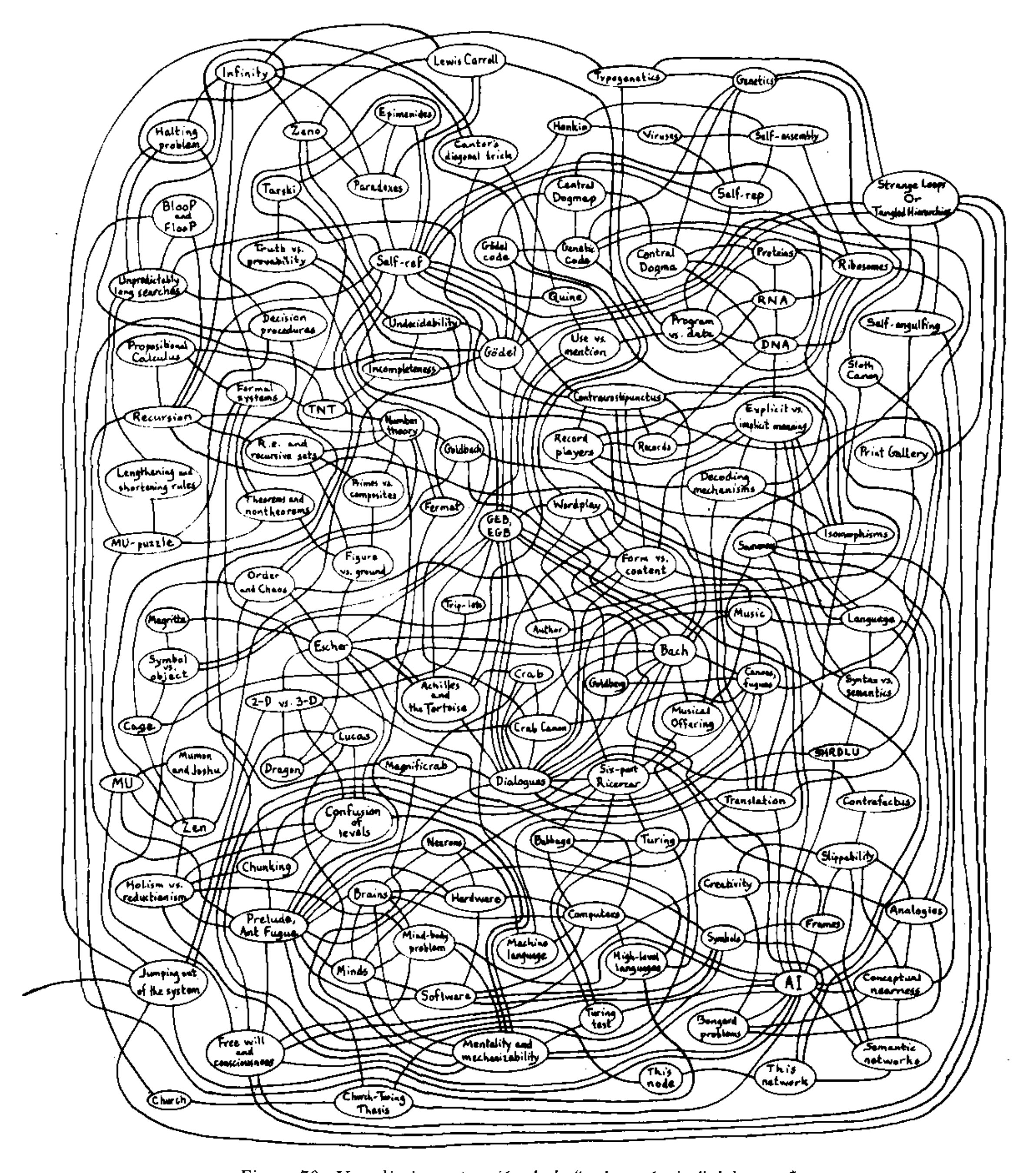


*Figura 70. Una diminuta porción de la "red semántica" del autor.**

* *En el caso de esta figura se conservó el original en inglés por razones de claridad. [E.]*

François Villon, el poeta francés del siglo quince. Otro ser humano, en otra época, encerrado en una prisión, hablando otro idioma . . . ¿Cómo podemos confiar en apreciar el sentido de las connotaciones que se ocultan tras la fachada de sus palabras, cuando son traducidas a nuestra lengua? Sin embargo, surge de allí una gran riqueza de significación.

Así, por una parte, podemos abandonar toda esperanza de encontrar un software exactamente isomórfico entre seres humanos, pero por otra no hay duda de que algunas personas piensan de modo más semejante, entre sí, que otras. Parecería obvio concluir que existe alguna suerte de isomorfismo parcial entre softwares, el cual asocia los cerebros de las personas cuyo estilo de pensamiento es similar; en particular, que hay una correspondencia entre, 1) el repertorio de símbolos, y 2) los patrones de desencadenamiento de símbolos.

La comparación de redes semánticas distintas

¿Y qué es un isomorfismo *parcial*? Esta es una pregunta extraordinariamente difícil de responder. Tal dificultad se ve agravada, inclusive, por el hecho de que nadie ha descubierto una forma adecuada de representación de la red de símbolos y de sus patrones de desencadenamiento. A veces se han trazado diseños de partes reducidas de tales redes de símbolos, donde cada uno de éstos es representado por nódulos, desde y hacia los cuales parten y llegan ciertos arcos. Las líneas representan relaciones de desencadenamiento . . . en algún sentido. Estas figuras intentan capturar algo de la noción, perceptible intuitivamente, de "parentesco conceptual". No obstante, hay muchos géneros distintos de parentesco, y en diferentes contextos son pertinentes diferentes parentescos. La figura 70 muestra una diminuta porción de mi propia "red semántica". El problema reside en que la representación de una interdependencia compleja de muchos símbolos no se puede elaborar fácilmente con sólo algunas líneas que relacionen nódulos.

Otro problema de un diagrama de este tipo es que no es correcto considerar un símbolo simplemente como "encendido" o "apagado". Esto es válido con respecto a las neuronas, pero no se lo puede extender a los grupos que ellas forman. En este aspecto, los símbolos son enormemente más complicados que las neuronas: como sería de esperar, ya que están compuestos por muchas neuronas; los mensajes intercambiados entre símbolos son más complejos que la sola información "ahora estoy activado". Se trata de algo muy semejante a los mensajes de nivel neuronal; cada símbolo puede ser activado de muy diferentes maneras, y el tipo de activación que se cumpla influirá en la determinación de cuáles otros símbolos buscará activar. Cómo pueden representarse de manera gráfica estas entremezcladas relaciones de desencadenamiento —si es que, en definitiva, ello es posible— no es una cosa que esté clara.

Pero supongamos por un momento que el problema ha sido resuelto. Imaginemos que estamos de acuerdo en que existen diseños de nudos, conectados por líneas (agreguemos que aparecen en diversos colores, de modo que los distintos tipos de parentesco conceptual puedan ser distinguidos entre sí), que capturan con precisión el modo en el cual los símbolos desencadenan otros símbolos. Luego, ¿bajo qué condiciones sentiríamos que dos de tales diseños son isomórficos, o casi isomórficos? Ya que estamos tratando con una representación visual de la red de símbolos, examinemos un problema visual análogo. ¿Cómo haríamos para determinar si dos telarañas han sido tejidas por arañas pertenecientes a la misma especie? ¿Trataríamos de identificar los vértices que se corresponden con exactitud, y a partir de allí trazar una proyección exacta de una tela sobre otra, vértice por vértice, hilo por hilo, quizá hasta ángulo por ángulo? Pero se trataría de un esfuerzo inútil. Dos telarañas jamás son exactamente iguales; sin embargo, hay algo como un "estilo" o "forma", o lo que se prefiera, que marca inexorablemente la telaraña de una especie determinada.

En toda estructura semejante a una red, como lo es una telaraña, pueden observarse atributos localizados y atributos globales. Los primeros necesitan solamente de un observador muy miope, es decir, de un observador que pueda ver únicamente un vértice por vez; los segundos requieren solamente de una visión amplia, que no se detenga en los detalles. Así, la forma de una telaraña, en su conjunto, constituye un atributo global, en tanto que la cantidad promedio de líneas que se reúnen en un vértice constituye un atributo local. Demos por supuesto que el criterio más razonable para que podamos considerar "isomórficas" dos telarañas sea el de que hayan sido tejidas por arañas de la misma especie; será interesante entonces preguntarse qué clase de observación —local o global— nos guiará con mayor seguridad para determinar si dos telarañas son isomórficas. Dejaremos sin responder el interrogante relativo a las telarañas, y volveremos al relativo a la cercanía —o isomorfidad, si se quiere— entre dos redes simbólicas.

Las traducciones del "Jabberwocky"

Imaginemos a hablantes nativos de inglés, francés y alemán, todos los cuales tienen un excelente dominio de sus respectivas lenguas maternas y todos los cuales gustan de los juegos de palabras en cada una de sus lenguas. Sus redes de símbolos, ¿serán similares en un nivel local o en un nivel global? ¿Tiene sentido interrogarse sobre semejante cosa? Nuestra pregunta adquiere carácter concreto cuando observamos las traducciones precedentes del famoso "Jabberwocky", de Lewis Carroll.

He elegido este ejemplo porque muestra, quizá mejor que un ejemplo formulado en prosa corriente, el problema de tratar de hallar "el mismo nódulo" en dos redes diferentes que son, en determinado nivel de análisis,

extremadamente no isomórficas. Tratándose de lenguaje corriente, la tarea de traducir es más directa ya que, generalmente, para cada palabra o expresión del idioma original puede encontrarse la palabra o expresión correspondiente en el otro idioma. En un poema de este género, por el contrario, muchas "palabras" no contienen una significación de tipo habitual sino que actúan exclusivamente como estimuladoras de símbolos contiguos; y lo que es contiguo en un idioma puede ser remoto en otro.

Así, en el cerebro de un hablante nativo del inglés, "slithy" activa, probablemente, símbolos tales como "slimy" (viscoso), "slither" (resbalar), "slippery" (resbaladizo, también evasivo), "lithe" (flexible, también fino, delgado), y "sly" (taimado), en grados variables de extensión. ¿En el cerebro de un francés, "lubricilleux" produce algo que se corresponde con eso? Y, por cierto, ¿en qué consistirá "algo que se corresponde"?, ¿en activar símbolos que sean traducciones corrientes de aquellas palabras?, y ¿qué pasa si no hay palabra alguna, existente o inventada, que cumpla esa función?, ¿o si existe una, pero de aspecto muy erudito y alatinado ("lubricilleux"), y no cotidiana y anglosajona ("slithy")?

Un rasgo interesante de la versión francesa es su transposición a tiempo presente. Conservar el pasado del texto original habría hecho necesarios ciertos giros expresivos poco naturales y, además, el tiempo presente tiene mucha más vivacidad que el pasado, en francés. El traductor intuyó que el presente sería "más adecuado" —en cierto sentido mal definido pero inescapable— e hizo la sustitución. ¿Quién puede decir si hubiera sido mejor respetar el tiempo verbal del original?

En la versión alemana, aparece la jocosa expresión "er an-zu-denken-fing"; no se corresponde con ninguna del original inglés. Es una inversión juguetona de palabras, cuyo tono recuerda vagamente la expresión inglesa "he out-to-ponder set" (se puso a reflexionar), si es que puedo aventurarme a traducir al revés. Lo más probable es que este gracioso trastrueque de palabras haya sido inspirado por la análoga inversión juguetona de la línea inmediatamente anterior del original: "So rested he by the Tumtum tree".* Esto sería lo correspondiente, pero no se corresponde.

Entre paréntesis, ¿por qué el "Tumtum tree" se transforma en un "arbre Té-té" en francés? Dejo esto para que lo resuelva el lector.

La palabra "manxome" del original, cuya "x" le incorpora armónicos muy sugerentes, ha sido opacamente vertida al alemán a través de "manchsam", la cual se traduciría al inglés como "maniful".** En "manscant", de la versión francesa, también faltan los múltiples armónicos de "manxome". El interés de esta clase de análisis es inacabable.

Cuando se examina un ejemplo de este tipo, se comprende que es totalmente imposible realizar una traducción exacta. Sin embargo, aun en un caso tan patológicamente difícil como éste, pareciera que es posible obte-

* El orden sintáctico obligatorio indicaría que se dijera: "he rested". [T.]

** Alteración de "manifold": múltiple, multifacético. [T.]

ner cierta equivalencia aproximada. ¿Por qué ocurre ello, si realmente no hay ningún isomorfismo entre los cerebros de las personas que leen las diferentes versiones? La respuesta es que existe un isomorfismo genérico, en parte global, en parte local, entre los cerebros de todos los lectores de las distintas versiones.

La ASU de cada uno

Una divertida fantasía geográfica hará más fácil de intuir esta clase de cuasi isomorfismo. (Dicho al margen, esta fantasía es en alguna medida similar a la analogía geográfica imaginada por M. Minsky en su artículo sobre "marcos", incluido en el libro de P. H. Winston, *The Psychology of Computer Vision.*) Supongamos que se nos entrega un extraño atlas de USA, donde están señalados todos los rasgos geológicos habituales, o sea, ríos, montañas, lagos, etc., pero donde no se ha escrito ni una sola palabra. Los ríos están indicados por líneas azules, las montañas por ciertos colores, y así por el estilo. Se nos dice, a continuación, que debemos convertirlo en un atlas carretero, con vistas a un viaje que emprenderemos a la brevedad. Tenemos que insertar correctamente los nombres de todos los estados, sus límites, su horario, luego seguir con todos los condados, ciudades, poblaciones, todas las carreteras que atraviesan zonas pobladas, las carreteras públicas, las de peaje, todos los caminos locales, todos los parques estatales y nacionales, los sitios donde se puede acampar, los lugares paisajísticos, diques, aeropuertos, etc. . . . Todo esto debe ser cumplido en el mismo nivel en que aparecería en un detallado atlas carretero. Y sin más auxilio que la propia memoria: no se nos permitirá buscar ninguna información mientras dure la tarea.

Nuestra misión es trabajar en forma completa, clara y actualizada, a fin de obtener el mapa más veraz que nos sea posible. Por supuesto, comenzaremos por las grandes ciudades y las carreteras principales que conocemos. Y cuando agotemos nuestro conocimiento concreto de una región, nos valdremos de nuestra imaginación para ayudarnos a reproducir, cuando menos, el espíritu de esa región, ya que no su geografía real, e incluiremos así nombres ficticios de ciudades, poblaciones ficticias, caminos ficticios, parques turísticos ficticios, etc. Esta ardua tarea nos insumirá meses. Para hacer las cosas más fáciles, podríamos tener un cartógrafo a nuestra disposición para que inscriba todo pulcramente. El resultado final será un mapa personal de la "Alternative Structure of the Union": nuestra propia "ASU".

Esta estructura alternativa, o ASU personal, será muy semejante a USA en las regiones en que hemos vivido. Además, cualquiera de los lugares a los que hayamos viajado, o cuyos mapas hayamos examinado con interés, aparecerán en nuestra ASU mostrando puntos de notable acuerdo con

USA: algunas pequeñas poblaciones de North Dakota o de Montana, quizá, o toda el área metropolitana de New York, podrían estar fielmente reproducidas en nuestra ASU.

Una inversión sorprendente

Cuando hemos completado nuestra ASU, se produce una sorpresa. Mágicamente, el país que hemos diseñado se hace realidad y somos transportados a él. Una amable delegación nos obsequia un automóvil del tipo que más nos gusta y nos explica que, "Como recompensa a su esfuerzo, puede usted gozar ahora de un viaje con todos los gastos pagados, a su entera comodidad, por todo el territorio de ese viejo y querido A. S. of U. Puede ir a donde quiera, hacer lo que desee y emplear todo el tiempo que se le ocurra. Felicitaciones de la sociedad Geográfica de la ASU. Y —para que le sirva como guía— aquí tiene un atlas carretero". Para nuestro asombro, no nos entregarán el atlas que elaboramos, sino un atlas carretero normal de USA.

Cuando emprendamos el viaje, sucederá toda clase de curiosos incidentes. Estaremos utilizando un atlas carretero que se ajusta sólo parcialmente al país que atravesamos. Mientras no abandonemos las vías públicas principales, probablemente podamos circular sin graves confusiones, pero en cuanto nos metamos en los caminos interiores de New Mexico o de la Arkansas rural, se nos acumularán las aventuras. Los pobladores no identificarán ninguna de las ciudades que buscamos, ni conocerán las rutas por las cuales les preguntemos. Sólo conocerán las ciudades importantes que nombremos, y aun en este caso las vías para llegar a ellas no coincidirán con las señaladas en nuestro mapa. De vez en cuando, sucederá que algunas ciudades consideradas muy grandes por las gentes locales no existirán en nuestro mapa de USA; o tal vez existen, pero señaladas en el atlas con una cantidad de habitantes sumamente errónea.

Centralidad y universalidad

¿Qué es lo que hace de una ASU y de USA, tan diferentes en algunos sentidos, tan similares, sin embargo? El hecho de que sus ciudades y vías de comunicación más importantes pueden ser calcadas entre sí. Las diferencias radican en las rutas menos transitadas, en las poblaciones de menor magnitud, etc. Algunas correspondencias abarcarán inclusive el nivel verdaderamente local: por ejemplo, en las dos New York la calle principal puede que sea la Quinta Avenida, y en ésta quizá haya un Times Square, también en ambas; pero es posible que no haya coincidencia en

cuanto a una ciudad en particular en ambas Montanas. Luego, la distinción entre local y global no tiene pertinencia en este caso. Lo pertinente es la *centralidad* de la ciudad, en función de la economía, las comunicaciones, los transportes, etc. Cuanto más importante es una ciudad, en alguno de esos aspectos, mayor certidumbre hay de que aparecerá tanto en ASU como en USA.

En esta analogía geográfica, hay un rasgo altamente crucial: existen ciertos puntos de referencia definidos y absolutos, que aparecerán prácticamente en todos los ASU que se diseñen: New York, San Francisco, Chicago, etc. A partir de ellos es posible orientarse. En otras palabras, si comienzo a comparar mi ASU con el de otra persona, puedo basarme en el acuerdo consabido acerca de las grandes urbes para establecer puntos de referencia que me permitan comunicar la ubicación de ciudades más pequeñas de mi ASU. Y si planeo un viaje desde Kankakee a Fruto, y la otra persona ignora dónde están esos sitios, puedo orientarla haciendo referencia a algo que tengamos en común. Y si hablo de un viaje desde Atlanta hasta Milwaukee, puedo utilizar diferentes vías públicas o rutas menos importantes, pero el viaje mismo puede ser realizado en los dos países. Y si se me describe un viaje entre Horsemilk y Janzo, puedo diagramar lo que creo es un viaje *análogo* en mi ASU, aunque no haya en éste poblaciones con esos nombres, ya que seré orientado constantemente mediante la descripción, por parte de mi interlocutor, de su posición con respecto a las ciudades más grandes de las cercanías, las cuales estarán señaladas tanto en mi ASU como en el suyo.

Mis carreteras no serán exactamente como las de él, pero, utilizando nuestros mapas individuales, los dos podemos movernos de una región del país en particular a otra. Ello es posible gracias a los hechos geológicos externos, ya establecidos: cadenas montañosas, cursos de agua, etc.; todos contamos con estos hechos cuando hicimos nuestros mapas. Sin estos elementos externos, careceríamos de toda posibilidad de tener puntos de referencia comunes. Por ejemplo, si a una persona se le entrega solamente un mapa de Francia, y a otra un mapa de Alemania, y luego ambas los completan con gran detalle, no habrá forma de hallar "el mismo lugar" en los dos países ficticios. Es imprescindible partir de condiciones externas idénticas; de otro modo, no se obtendrá ninguna equivalencia.

Ahora que hemos llevado bien lejos nuestra analogía geográfica, volvamos al interrogante del isomorfismo entre cerebros. El lector puede muy atinadamente preguntarse por qué todo este asunto de los isomorfismos cerebrales ha sido tan enfatizado. ¿Qué importa si dos cerebros son isomórficos, o cuasi isomórficos, o no isomórficos en absoluto? La respuesta es que apreciamos, intuitivamente, que a pesar de las diferencias existentes entre nosotros y el resto de las personas en importantes aspectos, ellas son "lo mismo" que nosotros en algunos aspectos profundos e igualmente importantes. Sería instructivo poder puntualizar en qué consiste este núcleo invariante de la inteligencia humana, y luego poder describir las

clases de "ornamentos" que es factible agregar a aquél, los cuales hacen de cada uno de nosotros una personificación única de esa abstracta y misteriosa cualidad llamada "inteligencia".

En nuestra analogía geográfica, las ciudades y las poblaciones son análogas a los símbolos, mientras que los caminos y carreteras son análogos a las líneas de desencadenamiento potencial. La circunstancia de que todas las ASU tengan cosas en común, como la Costa Oriental, la Costa Occidental, el Río Mississippi, los Grandes Lagos, las Montañas Rocosas, y muchas de las ciudades y vías de comunicación principales, es análoga a la circunstancia de que todos somos obligados, por realidades externas, a construir determinados símbolos de clase y líneas de desencadenamiento en la misma forma. Estos símbolos nucleares son como las grandes urbes, a las cuales quienquiera puede referirse sin ambigüedad. (Entre paréntesis, el hecho de que las ciudades sean entidades localizadas no debe entenderse de ninguna manera como indicativo de que los símbolos, en el cerebro, son pequeñas entidades semejantes a un punto. Unicamente son simbolizados de tal manera en una red.)

Lo cierto es que una gran parte de la red de símbolos de todo ser humano es *universal.* Ocurre simplemente que damos tan por supuesto lo que nos es común a todos, que se hace difícil ver cuánto tenemos en común con el resto de las personas. Hace falta el esfuerzo consciente de imaginar cuánto —o cuán poco— tenemos en común con otras entidades, tales como las piedras, los automóviles, los restaurantes, las hormigas, etc., para hacer evidente la gran cantidad de similitudes que tenemos con gentes elegidas al azar. Lo que advertimos inmediatamente en otra persona no es la similitud de patrones, porque la damos por supuesta en cuanto reconocemos el carácter humano de la otra persona; por el contrario, dirigimos nuestra atención más allá del patrón similar, y por lo común encontramos algunas diferencias salientes, así como también alguna inesperada similitud adicional.

A veces, nos encontramos con una persona que carece de algo que creíamos formaba parte del núcleo estándar mínimo: como si Chicago estuviera ausente en alguna ASU, lo cual es prácticamente inimaginable. Por ejemplo, alguien que no sepa qué es un elefante, o quién es el Presidente, o que la Tierra es redonda. En estos casos, la red simbólica de esa persona tiene que ser tan fundamentalmente distinta a la nuestra que toda comunicación significativa con ella se verá dificultada. Por otra parte, tal vez esa misma persona comparta con nosotros algún tipo de conocimiento especializado —digamos una cierta pericia en el juego de dominó— de modo que podemos comunicarnos perfectamente dentro de un campo limitado. Esto sería como encontrarse con alguien que provenga exactamente de la misma zona rural de North Dakota que nosotros, de modo que su ASU y la nuestra coincidirán muy detalladamente en cuanto a una muy pequeña región, lo cual nos permitirá describir allí con gran facilidad cómo ir de un lugar a otro.

¿En qué medida el lenguaje y la cultura encauzan el pensamiento?

Si ahora volvemos a comparar nuestra propia red simbólica con la de un francés y un alemán, podemos decir que confiamos en que ellos tengan el núcleo estándar de símbolos de clase, a pesar de las diferentes lenguas maternas. No esperamos compartir con ellos redes altamente especializadas, pero tampoco lo hacemos con respecto a personas de nuestra misma lengua, tomadas al azar. Los patrones de desencadenamiento de los hablantes de otros idiomas serán en alguna medida diferentes de los nuestros, pero los principales símbolos de clase, y las principales rutas que los conectan entre sí, son universalmente accesibles; por ello las rutas secundarias pueden ser descriptas con referencia a los elementos principales.

Ahora bien, cada uno de nuestros tres sujetos puede tener, además, cierto dominio de los idiomas de los dos restantes. ¿Qué es lo que caracteriza la diferencia entre la verdadera fluidez y una simple capacidad de comunicarse? En primer lugar, quien se expresa fluidamente en inglés utiliza la mayoría de las palabras dentro de una frecuencia que es, aproximadamente, la común. Un hablante no nativo extraerá ciertas palabras de diccionarios, novelas o lecciones: palabras que en algún momento pudieron ser prevalecientes o preferibles, pero cuya frecuencia se ha hecho ahora mucho menor; por ejemplo, "fetch" en lugar de "get", "quite" en lugar de "very", etc. Pese a que la significación, por lo común, se comunica, la elección de palabras inusuales transmite una nota de ajenidad.

Supongamos, no obstante, que un extranjero aprende a emplear todas las palabras dentro de frecuencias que son, aproximadamente, las normales, ¿dará eso verdadera fluidez a su expresión? Es probable que no. En un nivel más alto que el de la palabra hay un nivel asociativo, el cual se vincula estrechamente con la cultura en su conjunto: historia, geografía, religión, relatos infantiles, literatura, nivel tecnológico, etc. Por ejemplo, para estar en condiciones de hablar hebreo moderno de manera absolutamente fluida, es necesario conocer muy bien la Biblia en hebreo, porque el idioma reposa en un cúmulo de expresiones bíblicas y en sus connotaciones. Este nivel asociativo impregna muy profundamente todo idioma. Aun así, hay espacio para todo tipo de diversidades en el interior de la fluidez, ¡de otro modo, los únicos hablantes realmente fluidos serían aquellos cuyos pensamientos fuesen los más estereotipados!

Aunque debemos reconocer la profundidad con que la *cultura* afecta el pensamiento, no debemos sobrevaluar la influencia del *lenguaje* en el moldeamiento del pensamiento. Por ejemplo, nosotros hablaremos tal vez de dos "chairs" donde un hablante francés percibirá dos objetos de diferente clase: "chaise" y "fauteuil" ("chair" y "armchair": "silla" y "sillón"). Las personas cuyo idioma nativo es el francés tienen más presente esa diferencia que nosotros; ahora bien, la gente criada en zonas rurales tendrá

más presente, digamos, la diferencia entre un potro y un potrillo que un habitante de la ciudad; éste se conformará con llamar a ambos "caballos". No se trata, pues, de la diferencia en materia de lenguas maternas, sino entre culturas (o subculturas), lo que da origen a las distintas percepciones.

Las relaciones entre los símbolos de hablantes nativos de diferentes idiomas tienen todos los motivos para ser por completo similares, en la medida en que está involucrado el núcleo, porque esos hablantes viven, *sin* excepción, en el mismo mundo. Cuando se conocen aspectos más detallados de los patrones de desencadenamiento, se descubre que allí es menos lo que hay en común. En resumen, sería como comparar regiones del interior de Wisconsin en varias ASU que han sido elaboradas por personas que jamás han vivido en ese estado. Pero esto pierde toda importancia, puesto que hay acuerdo con respecto a las ciudades y vías principales, con lo cual se tienen puntos comunes de referencia diseminados por el mapa entero.

Viajes e itinerarios en las ASU

En la analogía ASU he estado utilizando, sin hacerla explícita, una imagen del "pensamiento", pues me he manejado bajo el supuesto implícito de que un *pensamiento* corresponde a un *viaje*. Las *ciudades* que se atraviesan representan los *símbolos*. No es una analogía perfecta, pero tiene mucho vigor. Adolece de un problema, consistente en que, cuando un pensamiento se reitera en la mente de alguien con la suficiente frecuencia, se articula en un bloque: en un concepto unitario. Esto se correspondería, en una ASU, con un hecho por demás raro: un viaje que se efectúa a menudo se convierte, de alguna extraña manera, ¡en una nueva población o ciudad! Si uno va a seguir empleando la metáfora ASU, tiene mucha importancia recordar que las ciudades representan no solamente los símbolos *elementales*, como los de "hierba", "casa", "automóvil", sino también los símbolos que son generados como consecuencia de la capacidad de *articular en bloques* del cerebro: símbolos que representan conceptos elaborados, como por ejemplo "canon cangrejo", "palindroma" o "ASU".

Por otra parte, si se admite que la noción de efectuar un viaje es un equivalente muy adecuado de la noción de albergar un pensamiento, surge de inmediato la siguiente dificultad: prácticamente toda ruta que conduce de una ciudad a otra, luego a una tercera, etc., puede ser imaginada, en la medida en que uno recuerda determinadas ciudades, ubicadas en puntos intermedios, que también son atravesadas. Esto correspondería a la activación de una *secuencia arbitraria de símbolos*, uno tras otro, que incluyen algunos símbolos adicionales: los ubicados en el trayecto. Luego, si prácticamente puede ser activada cualquier secuencia de símbolos en

cualquier orden que se desee, ello induce a creer que un cerebro es un sistema indiscriminado, que puede absorber o producir cualquier pensamiento, sea el que fuere. Pero sabemos que no es así. En realidad, hay ciertos tipos de pensamientos, a los cuales podemos llamar *conocimientos*, o *creencias*, cuya función es completamente diferente a la de las fantasías caprichosas, o los absurdos ocurrentes. ¿Cómo podemos caracterizar la diferencia existente entre sueños, pensamientos fugaces, creencias y piezas de conocimiento?

Recorridos posibles, potenciales y descabellados

Hay algunos recorridos —podemos considerarlos así tanto en una ASU como en un cerebro— que son seguidos rutinariamente para marchar desde un lugar a otro. Hay otros recorridos que sólo pueden transitarse si se es llevado de la mano por ellos; son "recorridos potenciales", que son seguidos únicamente cuando surgen circunstancias externas especiales. Los recorridos en los que uno confía de modo habitual son los que incorporan conocimiento —hablo aquí no sólo de conocimiento de *hechos* (conocimiento declarativo), sino también del conocimiento del *cómo hacer* (conocimiento procedimental)—. Estos recorridos estables y seguros son lo que constituye el conocimiento. Con las creencias, surgen gradualmente piezas de conocimiento; aquéllas también están representadas por recorridos confiables, pero quizá un tanto más susceptibles de sustitución si, por decirlo de esta manera, se corta un puente o hay niebla muy densa. Esto nos afronta con las fantasías, las mentiras, las falsedades, los absurdos y otras variantes. La situación se corresponde con la de un itinerario tan peculiar como el siguiente: New York a Newark vía Bangor, Maine, y Lubbock, Texas. Se trata de recorridos posibles, por cierto, aunque sea muy improbable que los establezcamos como rutina para nuestros traslados cotidianos.

Este modelo involucra algo curioso y divertido: el hecho de que, en última instancia, todas esas clases "aberrantes" de pensamiento que mencionamos más arriba se componen por entero de creencias o de piezas de conocimiento. Es decir, toda tortuosa y extraña ruta indirecta se fragmenta en una gran cantidad de segmentos rectos, no tortuosos, no extraños; y tales rutas breves y directas de conexión de símbolos representan a los pensamientos simples en los que se puede confiar, o sea, creencias y piezas de conocimiento. Si se lo piensa bien, ello no nos debe sorprender, pues es perfectamente razonable que sólo podamos imaginar aquellas cosas ficticias que, de alguna manera, tienen su fundamento en las realidades de las cuales tenemos experiencias, por más desatinadamente que se aparten de éstas. Los sueños son, quizá, esos vagabundeos arbitrarios por

la ASU de nuestra mente. Desde el punto de vista local, tienen sentido; globalmente, sin embargo . . .

Diferentes estilos en la traducción de novelas

Un poema del tipo del "Jabberwocky" es como una excursión irreal dentro de una ASU, saltando rápidamente de un estado a otro y siguiendo caprichosas rutas. Las traducciones comunican este aspecto del poema, más bien que la secuencia precisa de símbolos que son desencadenados, pese a que se esfuerzan todo lo posible por conseguir esto último. En prosa corriente no es común tal marcha a pasos agigantados; sin embargo, aparecen problemas similares de traducción. Supongamos que estamos traduciendo una novela del ruso al inglés, y nos topamos con una oración cuya versión literal sería, "She had a bowl of borscht" (Ella bebió un tazón de borscht). Tal vez muchos de nuestros lectores no tengan idea de qué es el borscht; entonces, traduciremos, "She had a bowl of Campbell's soup" (Ella bebió un tazón de sopa Campbell's). Si alguien cree que estoy exagerando en demasía, eche un vistazo a la primera oración del original ruso de *Crimen y castigo*, la novela de Dostoievsky, y luego a unas pocas versiones inglesas diferentes. He tenido oportunidad de examinar tres versiones inglesas distintas, publicadas en ediciones corrientes, y me he encontrado con una curiosa situación, que comento de inmediato.

La primera oración incluye el nombre de una calle, "S. Pereulok" (así transliterado al inglés). ¿Qué significación tiene esto? Un lector atento de la obra de Dostoievsky, y que conozca Leningrado (antes llamada "San Petersburgo" . . . ¿o deberíamos decir "Petrogrado"?), puede descubrir, mediante una minuciosa consulta del resto de la geografía del libro (la cual, dicho al paso, también es dada solamente a través de iniciales), que el nombre de la calle debe ser "Stoliarny Pereulok". Es probable que Dostoievsky deseara otorgarle realismo a su narración, pero no tanto como para que los lectores tomaran en forma literal la ubicación de los sitios donde se supone que ocurren el crimen y otros hechos. En cualquier caso, se presenta un problema de traducción o, para ser más preciso, se presentan varios problemas de traducción, situados en diferentes niveles.

En primer lugar, ¿debemos conservar la inicial, a fin de reproducir el aura de semi misterio que aparece ya en la primera oración del libro? Nosotros diríamos "S. Lane" (donde "lane" traduce en forma estándar a "pereulok").* Ninguno de los tres traductores adoptó esta solución, aunque uno de ellos optó por poner "S. Place".** La traducción de *Crimen y castigo* que leí cuando cursaba la enseñanza media había optado por una solu-

* Algo parecido a decir, en español, "Avenida S.", "Boulevard S.", etcétera. [T.]

** "Lugar", "sitio", "paraje", etc. En los países de habla inglesa, esta palabra interviene a menudo en la composición de topónimos. [T.]

ción similar. Nunca olvidaré el sentimiento de desorientación que experimenté cuando empecé a leer la novela y me iba encontrando con esas calles identificadas con letras en lugar de nombres. Me invadió cierto malestar indefinible; estaba seguro de que se me escapaba algo esencial, pero no sabía qué . . . Llegué a la conclusión de que todas las novelas rusas eran sumamente raras.

Ahora podríamos ser francos con el lector (de quien se puede suponer que, probablemente, no va a tener la menor idea acerca de si, como quiera que sea, la calle es real o es ficticia . . .) beneficiándolo con nuestra erudición y escribiendo, en consecuencia, "Stoliarny Lane" (o "Place"). Esta es la versión del traductor número 2, quien tradujo "Stoliarny Place".

¿Y el número 3? Es el más interesante de los tres; su versión dice "Carpenter's Lane". Ciertamente, ¿por qué no? Después de todo, "stoliar" significa "carpenter" (carpintero), y "ny" es un sufijo adjetivador. Luego, podemos ahora imaginarnos en Londres, no en Petrogrado, y en medio de una situación inventada por Dickens, no por Dostoievsky. ¿Esto es lo que estamos buscando? Tal vez deberíamos limitarnos a leer una novela de Dickens, en lugar de una traducción de Dostoievsky al inglés, con el fundamento de que aquélla "es la obra correspondiente en inglés". Vista en la perspectiva de un nivel lo suficientemente elevado, una novela de Dickens es una "traducción" de Dostoievsky: en realidad, ¡la mejor traducción que se pueda pedir! ¿Para qué necesitamos a Dostoievsky?

Hemos transitado todo el camino que va desde los intentos por obtener una gran fidelidad al texto del autor hasta la posible traducción, en alto nivel, de su tono o estilo. Ahora bien, si esto sucede ya en la primera frase, es de imaginarse cómo serán las cosas en el resto del libro. ¿Qué ocurrirá con el pasaje donde la propietaria alemana comienza a gritar en su ruso con inflexiones alemanas? ¿Cómo trasladar al inglés chapurreos rusos enunciados con acento alemán?

Se puede también considerar el problema que plantea la traducción del caló y de los modos coloquiales de expresión: ¿se deberá buscar una expresión "análoga", u optar por una traducción palabra por palabra? Si se elige lo primero, se correrá el riesgo de cometer un craso error del tipo "Campbell's soup"; pero si las expresiones idiomáticas son traducidas palabra por palabra, el inglés que surja sonará extraño. Quizá sea preferible así, pues la cultura rusa es una cultura extraña para los hablantes nativos del inglés; pero uno de estos hablantes que lea tal traducción experimentará en todo momento, gracias a los inusuales giros expresivos, un sentido —un sentido artificial— de ajenidad, que está fuera de las intenciones del autor y que no es experimentado por los lectores del original ruso.

Problemas de esta índole son los que nos hacen vacilar cuando leemos afirmaciones como las que siguen, formuladas por Warren Weaver, uno de los principales defensores de la traducción por computadora, a fines de los años cuarenta: "cuando miro un artículo escrito en ruso, digo: 'es-

to, realmente, está escrito en inglés, pero ha sido codificado en ciertos símbolos extraños. Procederé a decodificarlo'."[1] Este concepto de Weaver no puede ser tomado en forma simplemente literal, sino como un modo provocativo de decir que, oculto en los símbolos, hay un significado que puede ser descripto objetivamente o, por lo menos, muy cercanamente a la objetividad, por lo cual, en consecuencia, no habría motivo para suponer que una computadora no lo puede desentrañar, si es adecuadamente programada.

Comparaciones de alto nivel entre programas

La afirmación de Weaver se refiere a traducciones entre diferentes lenguas naturales. Consideremos ahora el problema de la traducción entre dos lenguajes de computadora. Supongamos, por ejemplo, que dos personas han formulado programas que son procesados en distintas computadoras y deseamos saber si ambos programas cumplen la misma tarea. ¿Cómo lo averiguaremos? Debemos comparar los programas, pero ¿en qué nivel hacerlo? Quizá uno de los programadores utilizó un lenguaje de máquina, y el otro un lenguaje compilador. ¿Son comparables estos dos programas? Indudablemente, pero ¿cómo hacerlo? Un recurso posible consiste en compilar el programa de lenguaje compilador, produciendo así un programa en el lenguaje de máquina de su propia computadora.

Tenemos entonces dos programas en lenguaje de máquina. Pero surge otro problema: hay dos computadoras, y por consiguiente dos lenguajes de máquina diferentes, los cuales pueden llegar a ser muy diferentes. Es posible que una de las máquinas tenga palabras de dieciséis bits, y la otra de treinta y seis. Puede que una tenga sus instrucciones dispuestas en pila (pushing y popping) y la otra no. Las diferencias entre los hardwares respectivos pueden tener como resultado que los dos programas en lenguaje de máquina parezcan imposibles de comparar; sin embargo, sospechamos que están cumpliendo la misma tarea, y querríamos poner eso al alcance de un vistazo. Obviamente, estamos examinando los programas desde muy cerca.

Lo que necesitamos hacer es dar un paso atrás, tomar distancia con respecto al lenguaje de máquina y adoptar una perspectiva más elevada, más articulada en bloques. A partir de una visión panorámica de este género, esperamos estar en condiciones de percibir los bloques de programa que hacen que cada programa impresione como planeado racionalmente en una escala global, no local; es decir, los bloques que encajan entre sí de modo que se nos hace posible percibir los objetivos establecidos por el programador. Supongamos que ambos programas fueron originalmente formulados en lenguajes de alto nivel; contaremos entonces con alguna

[1] Warren Weaver, "Translation", en *Machine Translation of Languages*, Wm. N. Locke and Donald Booth, eds. (New York: John Wiley and Sons, and Cambridge, Mass.: M.I.T. Press, 1955), p. 18.

articulación en bloques ya hecha. Pero nos aguardan otras dificultades; hay una gran cantidad de tales lenguajes: Fortran, Algol, LISP, APL y muchos otros. ¿Cómo haremos para comparar un programa formulado en APL con otro formulado en Algol? Ciertamente, no mediante la búsqueda de equivalencias línea por línea. Tendremos que someter a estos programas a una nueva articulación en bloques, en nuestra mente, tratando de hallar las unidades conceptuales y funcionales que se correspondan. De este modo, no estaremos comparando hardwares, ni tampoco softwares, sino "etéreowares": los conceptos puros que están detrás del software. Hay cierta clase de "esqueleto conceptual abstracto" que debe ser desprendido de los bajos niveles antes de poder efectuar una comparación significativa entre dos programas formulados en diferentes lenguajes de computadora, o entre dos animales, o entre dos oraciones escritas en distintas lenguas naturales.

Esto nos remite a una pregunta que ya planteamos con relación a las computadoras y los cerebros: ¿cómo otorgarle sentido a una descripción de bajo nivel de una computadora o de un cerebro? ¿Existe, en algún sentido admisiblemente razonable, un medio *objetivo* de extraer una descripción de alto nivel a partir de una descripción de bajo nivel, en sistemas tan complicados? En el caso de una computadora, se puede disponer fácilmente de una exhibición completa de los contenidos de la memoria (un, así llamado, *memory dump*: vuelco, vaciamiento de la memoria). Generalmente, los vaciamientos son impresos en las primeras etapas de un trabajo de computación, cuando se presenta algún inconveniente con un programa; el programador debió entonces volver al principio y escudriñar minuciosamente, durante horas, el vuelco de la memoria, tratando de saber qué representa cada diminuta pieza de la memoria. En esencia, lo que hace un programador en esta situación es lo contrario de lo que hace un compilador: traduce un lenguaje de máquina a un lenguaje de más alto nivel, a un lenguaje conceptual. Como resultado final, el programador comprenderá cuáles son los objetivos del programa y podrá describirlos en términos de alto nivel, como por ejemplo, "Este programa traduce novelas del ruso al inglés", o "Este programa compone fugas a ocho voces basadas en cualquier tema que se le proporcione".

Comparaciones de alto nivel entre cerebros

Vamos ahora a analizar nuestra pregunta en lo que se refiere al cerebro. En este caso, vamos a plantearlo así: "¿También el cerebro de las personas es posible de ser 'leído' en un alto nivel? ¿Existe alguna descripción objetiva del contenido de un cerebro?" En la *Fuga Hormiguesca*, el Oso Hormiguero sostiene que es capaz de decir qué está pensando tía Hilaria, mediante la observación de la estampida de sus hormigas componentes. ¿Podría alguna clase de superentidad —un Oso Neuronero, digamos—,

observar nuestras neuronas, articular en bloques lo que ve y producir un análisis de nuestros pensamientos?

Sin duda, la respuesta debe ser afirmativa, puesto que todos somos perfectamente capaces de describir, en forma de bloques (esto es, de modo no neural), la actividad de nuestros cerebros en un momento determinado. Esto significa que tenemos un mecanismo que nos permite articular en bloques, en un grado aproximativo, el estado de nuestro propio cerebro, y proporcionar una descripción funcional del mismo. Más precisamente, no vertimos en bloques todo el estado cerebral, sino las porciones del cerebro que están activas. Aun así, si alguien nos interroga acerca de un tema que está codificado en una área inactiva en ese momento, podemos acceder casi instantáneamente al área latente que interesa, y obtener una descripción por bloques de la misma: en otros términos, determinada creencia a propósito del mencionado tema. Adviértase que retornamos con una información absolutamente nula respecto al nivel neural de esa parte del cerebro: nuestra descripción está tan articulada en bloques que ni siquiera tenemos idea acerca de la parte de nuestro cerebro a la cual se refiere nuestra descripción. Ello implica un fuerte contraste con la situación del programador, cuya descripción en bloques proviene de un análisis consciente de cada una de las partes del vuelco de memoria.

Ahora bien, si una persona puede suministrar una descripción en bloques de cualquier parte de su propio cerebro, ¿por qué un tercero no podrá también, dados determinados recursos innocuos de acceso al mismo cerebro, ser capaz no sólo de vertir en bloques porciones limitadas del cerebro sino, más allá todavía, de elaborar una descripción completa de éste, articulada en bloques: esto es, un listado completo de las creencias de la persona a cuyo cerebro se ha accedido? Es obvio que semejante descripción tendría un tamaño astronómico, pero no es esto lo que interesa ahora. Lo que nos importa es si, en principio, existe una descripción del cerebro bien definida y de alto nivel o si, por el contrario, la mejor descripción existente, en principio, es la de nivel neural, u otro nivel igualmente fisiológico y carente de apertura intuitiva. No cabe duda de que la respuesta a estos interrogantes es de insuperable importancia si lo que perseguimos es saber si podemos entendernos a nosotros mismos.

Creencias potenciales, símbolos potenciales

Sostengo que es posible una descripción en bloques, pero que cuando la obtengamos no por ello quedará todo súbitamente aclarado y resuelto. El problema es que, para obtener una descripción de tal género del estado cerebral, nos es necesario un lenguaje con el cual describir nuestros hallazgos. Ahora bien, la forma más adecuada de describir un cerebro consistiría, aparentemente, en enumerar las clases de pensamientos que no puede albergar; o, tal vez, consistiría en enumerar sus creencias y las

cosas en las cuales no cree. Si es éste el objetivo al que apuntamos a través de una descripción por bloques, es fácil percatarse de cuáles serán los obstáculos que tendremos que afrontar.

Supóngase que deseamos enumerar todos los viajes que sería posible realizar en una ASU; su número es infinito; ¿cómo determinar, así y todo, cuáles serían *verosímiles*? Bien, ¿y qué significa *verosímil*? Exactamente este tipo de dificultad es el que se nos aparecerá cuando tratemos de establecer cuál es un "recorrido posible" entre un símbolo y otro, dentro de un cerebro. Podemos imaginar a un perro patas arriba surcando los aires con un cigarro en la boca, o un choque carretero entre dos gigantescos huevos fritos, o una inmensa cantidad de disparatadas imágenes similares. El número de recorridos caprichosos que pueden ser trazados en nuestro cerebro no tiene límite, lo mismo que el número de itinerarios irrazonables que pueden ser marcados en una ASU. Pero, ¿en qué consiste, con exactitud, un itinerario "razonable", dentro de una ASU en particular? Y ¿en qué consiste, con exactitud, un pensamiento "razonable", dentro de un estado cerebral en particular? El estado cerebral mismo no impide ningún recorrido porque, sin excepción, siempre hay circunstancias que pueden forzar el seguimiento del recorrido que fuere. El estado físico de un cerebro, si es leído correctamente, nos brinda información que indica, no cuáles recorridos podrían ser seguidos, sino qué grado de resistencia encontrarán éstos en su trayecto.

En una ASU, por su parte, hay muchos viajes que pueden ser realizados a través de dos o más rutas razonables. Por ejemplo, entre San Francisco y New York se puede seguir una ruta norteña tanto como otra sureña; ambas son enteramente razonables, pero la gente opta por una de las dos con arreglo a diversas circunstancias. Si estudiamos un mapa, en un momento determinado, nada nos indicará qué ruta será mejor tomar en alguna remota ocasión futura: ello depende de las circunstancias externas que rodeen al viaje, cuando se lo deba emprender. De la misma manera, la "lectura" de un estado cerebral revelará cuáles son los diversos recorridos razonables entre los cuales, habitualmente, se puede optar, y que conectan un conjunto dado de símbolos. Sin embargo, el viaje entre tales símbolos no tiene por qué ser inminente; puede tratarse sólo de uno de los miles de millones de viajes "potenciales" que figuran en la lectura del estado cerebral. Surge de aquí una importante conclusión: no hay información, en el estado cerebral mismo, que indique cuál ruta será elegida. Las circunstancias externas ejercitarán una fuerte influencia en la elección de la ruta.

¿Qué implica esto? Que un mismo cerebro puede producir pensamientos totalmente opuestos entre sí, según las circunstancias. Además, para que valga la pena, cualquier lectura en alto nivel del estado cerebral deberá contener todas estas versiones en conflicto. En verdad, es enteramente obvio que todos somos un fardo de contradicciones, y que nos arreglamos para conservar la coherencia mediante el recurso de mostrar un solo lado de nosotros mismos por vez. La elección no puede ser predicha por

adelantado porque las condiciones que la inducirán no pueden ser conocidas con anticipación. Lo que el estado cerebral puede proveer, si es leído adecuadamente, es una descripción *condicional* de la selección de rutas.

Consideremos, por ejemplo, la preocupación del Cangrejo, expuesta en el *Preludio*. El puede reaccionar de diversas formas al escuchar una composición musical; a veces se sentirá casi inmune a su sugestión, porque le resulta demasiado conocida; otras veces, se sentirá sumamente estimulado por la obra, a condición de que se produzca el tipo pertinente de desencadenamiento desde el exterior: por ejemplo, la presencia de un oyente entusiasta, para quien la composición es nueva. Presumiblemente, una lectura de alto nivel del estado cerebral del Cangrejo revelaría su potencial de conmoción (y las condiciones que inducirían su actualización), *así* como su potencial de impermeabilización (y las condiciones que inducirían su actualización). El estado cerebral por sí mismo, sin embargo, no indicará cuál de ambas variantes tendrá lugar cuando vuelva a escuchar la pieza; dirá solamente, "Si se producen tales y tales condiciones, resultará entonces una conmoción; de lo contrario, . . ."

Así, una descripción por bloques de un estado cerebral daría un catálogo de creencias que serían convocadas en forma condicional, de acuerdo a las circunstancias. Como todas las circunstancias posibles no pueden ser enumeradas, se deberían establecer las que uno piensa que son "razonables". Asimismo, se tendría que elaborar una descripción por bloques de las circunstancias mismas, ya que éstas, obviamente, ¡no pueden —y no deben— ser especificadas en el nivel atómico! En consecuencia, no se estará en condiciones de enunciar una predicción exacta y determinista que diga cuáles creencias serán extraídas del estado cerebral gracias a una determinada circunstancia de las definidas por bloques. En resumen, luego, una descripción del tipo citado de un estado cerebral consistirá en un catálogo probabilístico, que incluya la lista de todas las creencias con mayores probabilidades de ser inducidas (y de los símbolos con mayores probabilidades de ser activados) por diversos conjuntos de circunstancias "razonablemente factibles", circunstancias que también estarán descriptas a nivel de bloques. La pretensión de articular en bloques las creencias de alguien sin hacer referencia al contexto no es menos ridícula que la de describir la línea que seguirá el "linaje potencial" de una persona sin hacer referencia a su cónyuge.

El mismo género de problemas surge en la enumeración de todos los símbolos del cerebro de una persona dada. No sólo hay, potencialmente, un número infinito de *recorridos* en un cerebro, sino también un número infinito de *símbolos*. Como ya fue dicho, pueden ser formados conceptos nuevos a partir de conceptos anteriores, y se podría argumentar que los símbolos representativos de los nuevos conceptos no son sino símbolos latentes en cada individuo, a la espera de ser despertados. Puede que no sean despertados nunca, en el transcurso de la vida de una persona, pero no por eso dejarían de estar allí, nada más que esperando las circunstan-

cias indicadas para desencadenar sus síntesis. No obstante, si la probabilidad es muy débil, se diría que la palabra "latente" no refleja en absoluto la situación. Para aclarar esto, tratemos de imaginar todos los "sueños latentes" puestos dentro de nuestra sesera mientras dormimos. ¿Es admisible que exista un procedimiento de decisión capaz de discriminar, ante un estado cerebral dado, entre "temas potenciablemente soñables" y "temas no soñables"?

¿Dónde está la autoconciencia?

Al volver la mirada sobre lo que acabamos de exponer, tal vez el lector piense, "Bienvenidas todas estas especulaciones a propósito del cerebro y de la mente, ¿pero qué ocurre con los sentimientos asociados con la conciencia? Esos símbolos pueden desencadenarse entre sí todo lo que se les antoje, pero si no hay alguien que *perciba* toda la cosa, no hay conciencia".

Desde el punto de vista de nuestra intuición, esto tiene sentido en determinado nivel, pero no tiene mucho sentido lógico porque, si la explicación del mecanismo que constituye al perceptor de todos los símbolos activos no está satisfecha con lo que hemos descripto hasta aquí, nos veríamos obligados a buscarla otra vez. Por supuesto, un "espiritualista" no tiene necesidad de empeñarse en semejante indagación, pues se limitaría a aseverar que el sujeto de la percepción de toda esta actividad neural es el espíritu, el cual no puede ser descripto en términos físicos, y que eso es todo. Pero nosotros intentaremos ofrecer una explicación "no espiritualista" acerca del sitio donde se origina la conciencia.

Nuestra alternativa a la explicación espiritualista —alternativa desconcertante, asimismo— es detenerse en el nivel simbólico y decir, "Es esto; he aquí lo que *es* la conciencia. La conciencia es esa propiedad de un sistema que surge dondequiera haya símbolos del sistema que respondan a patrones de desencadenamiento en alguna medida semejantes a los descriptos en diversos pasajes anteriores". Dicho de modo tan esquemático, esto puede parecer insuficiente; ¿cómo explica la conciencia del "yo", la autoconciencia?

Subsistemas

No hay motivo para suponer que el "yo", "la conciencia personal", no esté representado por un símbolo. En realidad, el símbolo del yo es, probablemente, el más complejo de todos los símbolos del cerebro. Por tal razón, decidí ubicarlo en un nivel adicional de la jerarquía y denominarlo *subsistema*, y no símbolo. Para ser preciso: quiero significar, con "subsistema", una constelación de símbolos, cada uno de los cuales puede ser activado independientemente, bajo el control del subsistema mismo. La idea

que quiero transmitir con respecto a un subsistema es que funciona casi como un "subcerebro" separado, equipado con *su* repertorio propio de símbolos, los cuales pueden desencadenarse internamente entre sí. Ciertamente, también hay gran comunicación entre el subsistema y el mundo "exterior", es decir, el resto del cerebro. "Subsistema" es solamente otro nombre para aplicar a los símbolos superdesarrollados, aquellos que han llegado a ser tan complicados que tienen muchos subsímbolos en interacción recíproca. En consecuencia, no existe una distinción rígida entre símbolos y subsistemas.

A causa de las extensas vinculaciones existentes entre un subsistema y el resto del cerebro (algunas de las cuales describiremos enseguida), sería muy difícil trazar un límite que separe con nitidez al subsistema del exterior; pero aun cuando sea así, el subsistema es una cosa absolutamente real. Lo interesante de un subsistema es que, una vez activado y librado a sus propios recursos, puede funcionar por sí mismo. De tal modo, pueden operar simultáneamente dos o más sistemas del cerebro de un individuo. En mi propio cerebro ha sucedido esto, en ocasiones, cuando he advertido que dos melodías distintas estaban transitando por mi mente, compitiendo para lograr "mi" atención. De alguna manera, cada una de las melodías es elaborada, o "ejecutada", en un compartimiento separado, dentro del cerebro. Posiblemente, cada uno de los sistemas responsables de extraer de mi cerebro una melodía active una cantidad de símbolos, uno tras otro, por completo indiferentes al hecho de que el otro sistema está haciendo la misma cosa. A continuación, ambos intentan comunicarse con un tercer subsistema de mi cerebro —el símbolo de mi conciencia personal—, y es en este punto que el "yo" dentro de mi cerebro se entera de lo que está sucediendo; en otras palabras, comienza a recibir una descripción en bloques de las actividades de aquellos dos subsistemas.

Subsistemas y códigos compartidos

Subsistemas típicos pueden ser aquellos que representan a las personas que conocemos íntimamente. Estas son representadas en una forma tan compleja, en nuestros cerebros, que sus símbolos alcanzan el rango de subsistemas, y llegan a estar en condiciones de actuar autónomamente, utilizando en su apoyo ciertos recursos aportados por el cerebro. Quiero decir con esto que un subsistema simbolizador de un amigo puede activar muchos de los símbolos de mi cerebro al mismo tiempo que lo hago yo. Por ejemplo, puedo excitar mi subsistema representativo de un gran amigo y sentirme prácticamente en su lugar, experimentando la presentación de pensamientos que él podría tener, activando símbolos en secuencias que reflejan sus patrones de pensamiento con mayor fidelidad que los míos propios. Se podría decir que mi modelo de este amigo, concretado en un subsistema de mi cerebro, constituye mi descripción por bloques de su cerebro.

¿Dicho subsistema incluye, entonces, un símbolo para cada uno de los símbolos que, a mi parecer, hay en su cerebro? Esto sería redundante; lo probable es que el subsistema haga una utilización extensiva de los símbolos ya presentes en mi cerebro. Al ser activado, el subsistema puede apropiarse del símbolo de mi cerebro representativo de, pongamos por caso, "montaña". La forma en que sea empleado luego por el subsistema no será necesariamente idéntica a la forma en que lo emplea mi cerebro mismo. Si estoy hablando con mi amigo de la cadena de montañas Tien Shan, ubicada en el Asia Central (ninguno de los dos ha estado allí), y yo sé que algunos años atrás él hizo excursiones muy completas por los Alpes, mi interpretación de sus observaciones estará matizada por mis imágenes destacadas de su experiencia alpina, puesto que estoy tratando de imaginar cómo visualiza *él* esta otra región.

En el léxico que hemos estado construyendo en este capítulo, diríamos que la activación, en mí, del símbolo "montaña" está bajo el control del subsistema que representa a mi amigo. El efecto que ello logra es la apertura de un enfoque de mis memorias diferente del que habitualmente aplico, a saber: mis "opciones subsidiarias" se desplazan desde la lista de mis propios recuerdos al conjunto de mis recuerdos de sus recuerdos. Inútil señalar que mis representaciones de sus recuerdos son únicamente aproximaciones a sus verdaderos recuerdos, los cuales son modos complejos de activación de los símbolos de su cerebro, inaccesibles para mí.

Mis representaciones de sus recuerdos son, también, modos complejos de activación de mis propios símbolos: los que representan conceptos "elementales", tales como los de hierba, árboles, nieve, cielo, nubes, etc. Estos son conceptos de los cuales debo suponer que están representados "idénticamente" en él y en mí. Debo suponer, asimismo, la presencia de una representación similar en ambos de nociones aún más elementales: las experiencias de la gravedad, la respiración, la fatiga, el color, etc. Menos elemental, aunque quizá constituya una propiedad humana casi universal, es la satisfacción de alcanzar una cumbre y extender la vista desde allí. En consecuencia, los intrincados procesos de mi cerebro que son responsables de tal disfrute pueden ser cumplidos directamente por el subsistema-amigo, sin mayor pérdida de fidelidad.

Podríamos seguir adelante en el intento de describir cómo comprendo toda una narración relatada por mi amigo, una narración integrada por muchas complejidades propias de las relaciones humanas y de las experiencias mentales. Pero nuestra terminología se haría inadecuada muy pronto. Se presentarían enmarañadas recursividades conectadas con las representaciones suyas de representaciones mías de representaciones suyas a propósito de una cosa y otra. Si en la narración aparecen amigos comunes, buscaré inconscientemente las coincidencias entre mi imagen de *su* representación de ellos, y mis *propias* imágenes de ellos. La sola recursividad sería un formalismo inadecuado para manejar amalgamas simbólicas de esta índole. ¡Y apenas hemos rasguñado la superficie! Lisa y llana-

mente, carecemos en la actualidad del vocabulario indicado para describir las complejas interacciones que son posibles entre los símbolos. Detengámonos antes de entrar en un atolladero.

Es preciso que tomemos nota, sin embargo, de que los sistemas de computadora están comenzando a procesar algunos de los mismos tipos de complejidad y, como consecuencia, algunas de estas nociones han recibido denominaciones. Por ejemplo, mi símbolo "montaña" es análogo a lo que la jerga de la computación llama *shared* (o *reentrant*) *code [código compartido (o biinscripto)]*, el cual puede ser utilizado por dos o más programas de tiempo compartido que se procesan en la misma computadora. El hecho de que la activación de un símbolo puede dar diferentes resultados si forma parte de subsistemas diferentes puede ser explicado por la circunstancia de que su código está siendo procesado por intérpretes diferentes. Así, los patrones de desencadenamiento del símbolo "montaña" no son absolutos, sino que dependen del sistema dentro del cual sea activado el símbolo.

Hay quienes verán dudosa la existencia real de tales "subcerebros"; quizá las palabras de M. C. Escher que siguen, relativas al proceso de algunas de sus creaciones, contribuyan a esclarecer el fenómeno al cual me estoy refiriendo:

> Cuando dibujo, siento a veces que soy como un médium espiritista, controlado por las criaturas que convoco. Es como si ellas mismas eligieran la forma bajo la cual van a aparecer. Toman escasamente en cuenta mis opiniones críticas del momento en que ellas nacían, y no puedo ejercer mayor influencia sobre el grado de su desarrollo. Por lo común, se trata de criaturas muy difíciles y obstinadas.[2]

He aquí un ejemplo perfecto de la autonomía casi total de ciertos subsistemas del cerebro, una vez activados. Escher veía en sus subsistemas la capacidad de contrarrestar sus propios juicios estéticos. Naturalmente, estas opiniones deben ser tomadas con alguna reserva, pues estos poderosos subsistemas se producen como resultado de los muchos años de práctica de Escher y de la sujeción de éste a las fuerzas que moldearon su sensibilidad estética. En resumen, es erróneo divorciar los subsistemas del cerebro de Escher, de Escher mismo o de sus valores estéticos. Tales subsistemas constituyen una parte vital de su sentido estético, entendiendo que el "su" anterior se refiere al ser total del artista.

El símbolo-conciencia personal y la conciencia

Una función colateral muy importante del subsistema-*conciencia personal* es que puede desempeñar el papel de "espíritu", en el siguiente sentido: al estar comunicado en forma constante con el resto de los subsistemas y

[2] C. H. MacGillavry, *Symmetry Aspects of the Periodic Drawings of M. C Escher*, p. VIII.

símbolos del cerebro, toma nota de cuáles símbolos están activos y de qué manera lo están. Esto significa que debe contar con símbolos para representar la actividad mental; en otros términos, símbolos de símbolos y símbolos de las acciones que cumplen los símbolos.

Por supuesto, esto no eleva la conciencia o ese conocimiento a ningún nivel "mágico", no físico. El conocimiento aludido aquí es una consecuencia directa de los complejos hardware y software que hemos descripto. Sin embargo, pese a su terrenal origen, esta forma de describirlo —como monitor de la actividad cerebral a través de un subsistema del cerebro mismo— parece evocar el sentimiento casi indescriptible que todos conocemos, y al cual llamamos "conciencia". Ciertamente, está a la vista que la complejidad de esta situación puede provocar muchos efectos inesperados. Por ejemplo, es completamente admisible que un programa de computadora dotado de esa clase de estructura formule enunciados acerca de sí mismo bastante parecidos a los enunciados que la gente, con frecuencia, formula acerca de sí misma. Esto incluye la convicción de que hay allí libre albedrío, el cual no es explicable como "suma de partes", etcétera. (Sobre este tema, véase el artículo de M. Minsky, "Matter, Mind, and Models", en su libro *Semantic Information Processing*.)

¿Qué garantía hay de que un subsistema tal como el que hemos postulado, representativo de la conciencia personal, realmente exista en nuestro cerebro? Toda una red compleja de símbolos como la que acabamos de describir, ¿podría desarrollarse sin un símbolo-conciencia personal que impulse tal desarrollo? Estos símbolos y sus actividades, ¿cómo podrían asumir la función de hechos mentales "isomórficos" con respecto a los hechos reales del universo circundante, si no hubiera ningún símbolo para representar al organismo que los hospeda? Todos los estímulos que ingresan al sistema se concentran en una pequeña masa ubicada en el espacio. Dentro de una estructura simbólica del cerebro, sería una carencia muy grave no contar con un símbolo que represente al objeto físico que la alberga, el cual desempeña un papel más importante que el de ningún otro objeto, con relación a los hechos que refleja. En verdad, pensándolo bien, pareciera que el único modo de darle sentido al mundo que circunda a un objeto animado, localizado en el espacio, es comprender el papel de ese objeto con relación a los objetos que lo rodean. Esto hace necesaria la existencia de un símbolo-conciencia personal; y el tránsito desde el símbolo al subsistema es simplemente un reflejo de la importancia del símbolo-conciencia personal, no un cambio cualitativo.

Primer encuentro con Lucas

El filósofo de la escuela oxfordiana J. R. Lucas (sin vinculaciones con los números de Lucas comentados atrás) escribió un notable artículo, en 1961, titulado "Minds, Machines, and Gödel" (Mentes, máquinas y Gö-

del). Sus puntos de vista se oponen por completo a los míos, a pesar de que maneja gran parte de los mismos ingredientes en la elaboración de sus opiniones. El pasaje que sigue se relaciona muy directamente con lo que terminamos de exponer:

> En sus primeros y más simples intentos de filosofar, uno llega a enredarse en interrogaciones sobre si cuando uno sabe alguna cosa uno sabe que uno la sabe, y qué es lo que se piensa y qué hace el pensamiento cuando uno piensa en uno mismo. Luego de sentirse confundido y apabullado por este problema durante largo tiempo, uno aprende a no abrumarse con estas preguntas: se comprende que el concepto de ser consciente es diferente del de objeto inconsciente. Al decir que un ser consciente sabe alguna cosa, estamos diciendo no solamente que la sabe, sino también que sabe que la sabe, y que sabe que sabe que la sabe, etc., hasta donde nos ocupemos de extender la pregunta: reconocemos que hay aquí un infinito, pero no se trata de una regresión infinita en el mal sentido, porque son las preguntas lo que va decreciendo, en la medida en que pierden agudeza, y no las respuestas. Se va apreciando eso en las preguntas porque el concepto contiene, en sí mismo, la idea de ser capaz de responder indefinidamente a tales preguntas. A pesar de que los seres conscientes tienen la facultad de avanzar en esto, no deseamos presentarla simplemente como una sucesión de metas que aquéllos están en condiciones de alcanzar, ni tampoco pretendemos ver la mente como una secuencia infinita de conciencias y superconciencias y supersuperconciencias. Por el contrario, subrayamos que un ser consciente es una unidad, y que, aun cuando hablemos de partes distintas de la mente, lo hacemos sólo metafóricamente, y no concederemos que se lo interprete literalmente.
>
> Las paradojas de la conciencia surgen porque un ser consciente puede ser consciente de sí mismo, tal como lo es de otras cosas, y sin embargo no puede, realmente, interpretárselo como un ser divisible en partes. Esto significa que un ser consciente puede abordar los problemas gödelianos en una forma que no es accesible a una máquina, porque un ser consciente puede considerarse a sí mismo y al propio tiempo a su actuación, y sin embargo no ser algo distinto a lo que cumplió la actuación. Una máquina puede estar construida de modo que, por decir así, "considere" su actuación, pero no puede "tenerla en cuenta" sin convertirse, a causa de ello, en una máquina diferente, a saber: la misma máquina, a la que se agrega una "parte adicional". Y lo intrínseco de nuestra noción de mente consciente es que puede reflexionar acerca de sí misma y someter a crítica sus propias actuaciones, sin que se requiera para ello el agregado de una nueva parte: ya está completa, y no tiene talón de Aquiles.
>
> La tesis comienza así a convertirse en una cuestión de análisis conceptual más que en un descubrimiento matemático. Esto se confirma al considerar otro argumento, postulado por Turing. Hasta ahora, hemos construido solamente artefactos sumamente simples y predecibles. Cuando incrementemos la complejidad de las máquinas, tal vez nos encontremos con muchas sorpresas. Turing traza un paralelo con una pila de fisión: por debajo de cierta magnitud "crítica", no es mucho lo que sucede, pero superada esa dimensión comienzan a saltar las chispas. Quizá ocurra lo mismo con el cerebro y la máquina; la mayor parte de los cerebros y de las máquinas son, en la actualidad, "subcríticos" —ante la presencia de estímulos, reaccionan de modo insípido y escasamente interesante, no tienen ideas acerca de sí mismos, producen únicamente respuestas estereotipadas—, pero unos pocos cerebros hoy en día, y posiblemente algunas máquinas en el futuro, son supercríticos, y centellean por propio impulso. Turing sugiere que se trata exclusivamente de un problema de complejidad, y que por encima de un determinado nivel de ésta aparece una diferencia cualitativa, por lo cual las máquinas "supercríticas" serán totalmente distintas a las de tipo simple que hemos conocido hasta ahora.

Puede que así sea. Es frecuente que la complejidad introduzca diferencias cualitativas. Aunque suene inverosímil, podría resultar que, traspasado cierto nivel de complejidad, una máquina deje de ser predecible, inclusive en principio, y comience a hacer cosas por iniciativa propia o, para utilizar una expresión reveladora, pueda comenzar a formar un criterio acerca de sí misma. Esto último sucedería cuando ya no fuese enteramente predecible y enteramente dócil, y sí capaz de hacer cosas que reconozcamos como inteligentes: no como simples errores o disparos casuales, sino cosas que no han sido programadas en su interior. Pero entonces, a la luz de la significación habitual, dejaría de ser una máquina: lo que está en juego en el debate mecanicista no es cómo son las mentes, o cómo podrían llegar a ser, sino cómo operan. Para la tesis mecanicista, es esencial que el modelo mecánico de la mente opere con arreglo a "principios mecánicos", esto es, que podamos comprender las operaciones que cumple el conjunto en función de las operaciones que cumplen sus partes; estas últimas, a su vez, estarán determinadas por su estado inicial y por las características constructivas de la máquina, o bien por una elección arbitraria dentro de una cantidad determinada de operaciones determinadas. Si el mecanicista produce una máquina tan complicada que deja de ser coherente consigo misma, ya no se trata de una máquina, desde el punto de vista que estamos siguiendo, cualquiera sea la manera en que ha sido construida. Por el contrario, diríamos que lo producido es una mente, en el mismo sentido que tiene la procreación de seres humanos en la actualidad. Habría entonces dos modos de traer nuevas mentes al mundo: el tradicional, a través del engendramiento de niños para que nazcan de mujeres, y otro nuevo, a través de la construcción de sistemas enormemente complicados de, digamos, válvulas y relés. Cuando hablemos de este último modo, deberemos preocuparnos por subrayar que, aun cuando la mente resultante haya sido creada como se hace con una máquina, no es verdaderamente tal cosa, porque no es tan sólo la suma de sus partes. El conocimiento de la forma en que fue construida y del estado inicial de sus partes no permite predecir cómo se va a comportar: ni siquiera podremos predecir los límites de lo que haga, ni aun cuando, enfrentada a una pregunta de tipo gödeliano, la conteste correctamente. En realidad, deberíamos decir, en resumen, que un sistema que no sea derrotado por la problemática gödeliana no es, *eo ipso*, una máquina de Turing, esto es, una máquina en el sentido habitual de la palabra.[3]

Al leer este pasaje, mi mente tropieza constantemente con la rápida sucesión de tópicos, alusiones, connotaciones, confusiones y conclusiones. Brincamos desde una paradoja carrolliana a Gödel y a Turing y a las inteligencias artificiales y al holismo y al reduccionismo, en el breve trecho de dos páginas. La lectura de estos párrafos de Lucas es, sin el menor lugar a dudas y sin abrir por ahora otros juicios, estimulante. En los capítulos que siguen retomaremos muchos de los tópicos tratados tan dramática y fugazmente en estas curiosas líneas.

[3] J. R. Lucas, "Minds, Machines, and Gödel", en A. R. Anderson, ed., *Minds and Machines*, pp. 57-9.

Aria con variaciones diversas

Aquiles no ha podido conciliar el sueño durante las últimas noches. Su amiga la Tortuga ha venido a hacerle compañía mientras pasan las enojosas horas del insomnio de esta noche.

Tortuga: Lamento enterarme de las molestias que ha estado sufriendo, mi querido Aquiles. Espero que mi compañía le proporcione un bienvenido alivio de la excitación insoportable que lo ha mantenido despierto. Quizá lo aburra yo lo suficiente como para que usted termine deseando irse a dormir. De ocurrir así, le habré sido útil.

Aquiles: Oh, no, me temo que ya he probado con algunos de los más grandes latosos del mundo y, triste es decirlo, sin ningún resultado, de modo que no pretenda competir con ellos. No, señora Tortuga, la he invitado a acompañarme en la confianza de que tal vez pueda distraerme con un poco de esto y de lo otro, tomados de la teoría de los números, a fin de, cuando menos, pasar estas largas horas de una manera agradable. Fíjese, he descubierto que un poco de teoría de los números llena de curiosidad mi mortificada psiquis.

Tortuga: ¡Qué portentosa idea! Sabe usted, esto me recuerda, muy remotamente, la historia del pobre Conde Kaiserling.

Aquiles: ¿Quién fue?

Tortuga: Oh, fue un conde de Sajonia, durante el siglo dieciocho —un conde de poca monta, para decir la verdad— pero a causa de él . . . bueno, ¿le relato la historia? Es muy entretenida.

Aquiles: ¡Si es así, sí, por favor!

Tortuga: Hubo un tiempo durante el cual el buen Conde padecía de insomnio, y resulta que en la misma ciudad vivía un músico excelente, y entonces el Conde Kaiserling encargó a este músico que compusiese un conjunto de variaciones, a fin de que fueran ejecutadas en el clave de la corte del Conde, en sus noches sin sueño, e hicieran así más gratas sus horas.

Aquiles: ¿El compositor local estaba a la altura del compromiso?

Tortuga: Supongo que sí, pues después de elaboradas las composiciones, el Conde lo recompensó con una copa de oro que contenía un centenar de Louis d'or: un regalo muy valioso, por cierto.

Aquiles: ¡No me diga! Me pregunto dónde se habrá encontrado con semejante copa y con todos esos Louis d'or, en primer lugar.

Tortuga: Tal vez los vio en un museo, y se le antojaron.

Aquiles: ¿Sugiere usted que se alzó con ellos?

Tortuga: Espere, espere, yo no lo expresaría de esa forma . . . En aquella época, los condes podían llevarse casi cualquier cosa. Como quiera que sea, no hay duda de que el Conde estaba muy satisfecho con la música, pues constantemente pedía al ejecutante de su clave —tan sólo un mozalbete, de nombre Goldberg— que tocara una u otra de esas treinta variaciones. Como consecuencia (y paradójicamente, de alguna manera), las variaciones llegaron a asociarse al nombre del joven Goldberg, y no al distinguido nombre del Conde.

Aquiles: ¿Quiere usted decir que el compositor fue Bach, y éstas las composiciones conocidas como "Variaciones Goldberg"?

Tortuga: ¡Ni más ni menos! En realidad, la obra se intituló *Aria con variaciones diversas*, de las cuales hay treinta. ¿Usted sabe cómo estructuró Bach estas treinta magníficas variaciones?

Aquiles: Dígamelo.

Tortuga: Todas las piezas —a excepción de la última— están basadas en un mismo tema, al cual Bach llamó "aria". Lo que reúne a todas no es, en realidad, una melodía común, sino un fondo armónico común. Las melodías pueden variar, pero por debajo subsiste un tema constante. Unicamente en la última variación Bach se tomó libertades; es una suerte de "final después del final", que contiene ideas musicales del todo ajenas al tema original: dos conocidas melodías alemanas de la época. Esta variación es llamada "quodlibet".

Aquiles: ¿Qué otra cosa es inusual en las Variaciones Goldberg?

Tortuga: Bueno, cada tercera variación es un canon. Primero, un canon donde las voces que participan del mismo entran en la MISMA nota. Segundo, un canon donde una de las voces entra UNA NOTA MAS ALTO que en el primer canon. Tercero, una voz entra DOS notas más alto que en el anterior. Y así siguiendo, hasta que en el último canon las entradas se han distanciado exactamente una novena. Diez cánones, en total. Y . . .

Aquiles: Un instante. ¿No leí yo en alguna parte algo sobre catorce cánones Goldberg recién descubiertos . . .?

Tortuga: ¿No apareció en el mismo periódico que informaba del reciente descubrimiento de catorce días de noviembre que antes no se conocían?

Aquiles: No; insisto en que es cierto. Un tipo llamado Wolff —un musicólogo— se enteró de que en Estrasburgo había un ejemplar especial de las Variaciones Goldberg. Fue allí a examinarlo y, para su asombro, en la página posterior, como una suerte de "final después del final", encontró esos catorce nuevos cánones, todos basados en las primeras ocho notas del tema de las Variaciones Goldberg. De modo que ya se sabe que, en rigor, hay cuarenta y cuatro Variaciones Golberg, no treinta.

Tortuga: Es decir, hay cuarenta y cuatro, salvo que algún otro musicólogo descubra otra tanda de Variaciones en un sitio insospechado. Y, aunque parezca improbable, sin embargo es posible, aunque sea inve-

rosímil, que se descubra otra tanda más, y luego otra, y otra y otra y otra . . . ¡Caray, podría no *acabar* nunca! Podemos ignorar por siempre si ya tenemos o cuándo tendremos la tota*li*dad de las Variaciones Goldberg.

Aquiles: Es una idea curiosa. Presumiblemente, todo el mundo piensa que este último descubrimiento fue una chiripa, y que sin duda ahora contamos con las Variaciones Goldberg completas. No obstante, supongamos por un momento que usted tiene razón, y que aparezcan algunas más dentro de un tiempo; en ese caso, comenzaremos a ver las cosas como usted dice. Además, la denominación "Variaciones Goldberg" cambiaría levemente de significación, pues incluiría no sólo las variaciones conocidas, sino también cualesquiera otras que con el tiempo puedan aparecer. Su número —llamémoslo '*g*'— tiene que ser, indudablemente, finito, ¿no le parece?, pero el mero conocimiento de que *g* es finito no es lo mismo que conocer el valor de *g*. Por consiguiente, esta información no nos indicará el momento en que sea encontrada la ultima variación Goldberg.

Tortuga: Es verdad, por cierto.

Aquiles: Dígame, ¿cuándo fue que Bach compuso estas famosas variaciones?

Tortuga: Durante el año 1742, cuando era Cantor en Leipzig.

Aquiles: ¿1742? Mmmm . . . Ese número enciende una lucecita.

Tortuga: Así debe ser, pues sucede que es un número muy interesante: es la suma de dos primos impares, 1729 y 13.

Aquiles: ¡Por Jupiter! ¡Qué cosa tan llamativa! Me pregunto cuántas veces nos encontramos con un número par que tenga esa propiedad. Veamos:

$$
\begin{aligned}
6 &= 3 + 3\\
8 &= 3 + 5\\
10 &= 3 + 7 = 5 + 5\\
12 &= 5 + 7\\
14 &= 3 + 11 = 7 + 7\\
16 &= 3 + 13 = 5 + 11\\
18 &= 5 + 13 = 7 + 11\\
20 &= 3 + 17 = 7 + 13\\
22 &= 3 + 19 = 5 + 17 = 11 + 11\\
24 &= 5 + 19 = 7 + 17 = 11 + 13\\
26 &= 3 + 23 = 7 + 19 = 13 + 13\\
28 &= 5 + 23 = 11 + 17\\
30 &= 7 + 23 = 11 + 19 = 13 + 17
\end{aligned}
$$

Ahora sigue lo que ya se sabe: de acuerdo a esta tablita que elaboré, parece indudable que hay una frecuencia familiar. Pero no consigo discernir ninguna regularidad simple, hasta ahora, en la tabla.

Tortuga: Quizá no hay ninguna regularidad por discernir.

Aquiles: ¡Por supuesto que sí la hay! Lo único que pasa es que no soy lo suficientemente sagaz como para distinguirla en este instante.

Tortuga: Parece usted muy convencido.

Aquiles: En mi mente no hay la menor duda. Digo yo . . . ¿Serán éstos TODOS los números pares (excepto 4) que pueden ser enunciados como la suma de dos primos impares?

Tortuga: Mmmm . . . Esa pregunta enciende una lucecita . . . ¡Ah, ya sé por qué! No es usted la primera persona que la plantea pues, en verdad, en el año 1742 hubo un matemático aficionado que formuló esta misma interrogación en un . . .

Aquiles: ¿Dijo usted 1742? Perdóneme por interrumpirla, pero acabo de advertir que es un número muy interesante: es la diferencia entre dos primos impares, 1747 y 5.

Tortuga: ¡Por Júpiter! ¡Qué cosa tan llamativa! Me pregunto cuántas veces nos encontramos con un número par que tenga esa propiedad.

Aquiles: Pero, por favor, no nos apartemos de su relato.

Tortuga: Oh, sí . . . como le estaba diciendo, en 1742, cierto matemático aficionado cuyo nombre se me escapa en este momento, dirigió una carta a Euler, quien en esa época estaba en la corte del Rey Federico el Grande, en Potsdam, y . . . bueno, ¿le relato la historia? No le falta atractivo.

Aquiles: ¡Si es así, sí, por favor!

Tortuga: Muy bien. En su carta, este aficionado a la teoría de los números proponía una conjetura indemostrada al gran Euler: "Todo número par puede ser representado como la suma de dos primos impares". ¿Pero cómo era que se llamaba este tipo?

Aquiles: Me he enterado vagamente de esta anécdota, por algún libro sobre teoría de los números. ¿No se llamaba "Kupfergödel"?

Tortuga: Mmmm . . . No, me suena demasiado largo.

Aquiles: ¿"Silerescher", tal vez?

Tortuga: No, tampoco. Hay un nombre en la punta de mi lengua . . . este . . . este . . . ¡Ah, sí! ¡"Goldbach"! Se llamaba Goldbach.

Aquiles: Yo sabía que era algo así.

Tortuga: Sí: sus hipótesis contribuyeron a estimular mi memoria. Es sumamente curioso que, de vez en cuando, uno tenga que registrarse la memoria, igual que cuando se busca un libro en una biblioteca sin referencias . . . Pero retornemos a 1742.

Aquiles: De acuerdo. Quiero hacerle una pregunta: ¿Euler demostró que la conjetura de Goldbach era correcta?

Tortuga: Muy curiosamente, jamás consideró que valiese la pena examinarla, siquiera. Sin embargo, ese desdén no fue compartido por todos los matemáticos. En realidad, muchos de ellos se sintieron grandemente atraídos por la propuesta, que llegó a ser conocida como la "Conjetura Goldbach".

Aquiles: ¿Se ha conseguido demostrarla?

Tortuga: No. No ha sido así, pero ha habido algunas aproximaciones notables. Por ejemplo, en 1931, el especialista ruso en teoría de los números Schnirelmann demostró que todo número —par o impar— puede ser representado como la suma de no más de 300 000 primos.

Aquiles: Qué extraña conclusión. ¿Tiene utilidad?

Tortuga: Ha puesto el problema dentro del dominio de lo finito. Antes de la demostración de Schnirelmann, era concebible que al tomar números pares cada vez mayores, hacían falta cada vez más números primos para representarlos. ¡Algunos números podrían requerir un billón de primos para ser representados! Ahora se sabe que no es así: un total de 300 000 primos (o algo menos) es suficiente.

Aquiles: Ya veo.

Tortuga: Luego, en 1937, un astuto sujeto llamado Vinogradov —también ruso— se las ingenió para establecer una cosa más cercana al resultado buscado, a saber: todo número IMPAR lo suficientemente grande puede ser representado como la suma de no más de TRES primos impares. Por ejemplo, 1937 = 641 + 643 + 653. Podríamos decir que un número impar que es representable como la suma de tres primos impares tiene "la propiedad Vinogradov". Así, todos los números impares lo suficientemente grandes tienen la propiedad Vinogradov.

Aquiles: Muy bien, pero, ¿qué quiere decir "lo suficientemente grande"?

Tortuga: Quiere decir que cierto número finito de números impares puede carecer de la propiedd Vinogradov, pero que hay un número —llamémoslo '*v*'— más allá del cual todos los números impares tienen la propiedad Vinogradov. Pero Vinogradov no pudo decir cuán grande es *v*. En cierto modo, pues, *v* es como *g*, el número finito pero desconocido de Variaciones Goldberg. El mero conocimiento de que *v* es finito no es lo mismo que conocer el valor de *v*. Por consiguiente, esta información no nos indicará el momento en que sea encontrado el último número impar que necesita más de tres primos para ser representado.

Aquiles: Ya veo. Entonces, todo número par $2N$ lo suficientemente grande puede ser representado como la suma de CUATRO primos, a través de la representación, primero, de $2N - 3$ como la suma de tres primos, y luego volviendo a sumar el primo número 3.

Tortuga: Exactamente. Otro resultado muy cercano es el contenido en el Teorema que dice, "Todo número par puede ser representado como la suma de un primo y de un número que sea el producto de, a lo sumo, dos primos".

Aquiles: Este asunto de las sumas de dos primos la conduce a usted a un extraño territorio. Me pregunto adónde llegaría si analizara las DIFERENCIAS entre dos primos impares. Estoy seguro de que yo podría obtener cierta profundización en esta cosa por medio de una pequeña tabla de números pares, y sus representaciones como diferencias entre dos números primos, tal como lo hizo usted con sus sumas. Veamos . . .

2 = 5 − 3, 7 − 5, 13 − 11, 19 − 17, etc.
4 = 7 − 3, 11 − 7, 17 − 13, 23 − 19, etc.
6 = 11 − 5, 13 − 7, 17 − 11, 19 − 13, etc.
8 = 11 − 3, 13 − 5, 19 − 11, 31 − 23, etc.
10 = 13 − 3, 17 − 7, 23 − 13, 29 − 19, etc.

¡Caramba! La cantidad de diferentes representaciones que puedo encontrar para estos números pares no tiene fin, por lo visto. Pero no consigo discernir ninguna regularidad simple, hasta ahora, en la tabla.

Tortuga: Quizá no hay ninguna regularidad por discernir.

Aquiles: ¡Oh, usted, con sus permanentes premoniciones de caos! No quiero saber nada de eso, gracias.

Tortuga: ¿Supone usted que TODO número par puede ser representado, de alguna forma, como la diferencia entre dos primos impares?

Aquiles: Sin duda, la respuesta parecería ser: sí, de acuerdo a mi tabla. Pero pienso que también podría ser: no. Esto no nos hace adelantar mucho, en verdad, ¿no cree?

Tortuga: Con los debidos respetos, yo diría que hay penetraciones más profundas para intentar.

Aquiles: Es curiosa la similitud de este problema con el planteado originalmente por Goldbach. Quizá tendríamos que llamarlo: una "Variación Goldbach".

Tortuga: Cómo no. Pero usted sabe que existe una diferencia enorme entre la Conjetura Goldbach y está Variación Goldbach, que me gustaría comentarle. Digamos que un número par $2N$ tiene la "propiedad Goldbach" si es la SUMA de dos primos impares, y que tiene la "propiedad Tortuga" cuando es la DIFERENCIA entre dos primos impares.

Aquiles: Creo que debería usted llamarla "propiedad Aquiles". Al fin y al cabo, fui yo quien sugirió el problema.

Tortuga: Precisamente iba a proponer que, de un número al cual le FALTE la propiedad Tortuga, digamos que tiene la "propiedad Aquiles".

Aquiles: Bien, de acuerdo . . .

Tortuga: Considere ahora, por ejemplo, si 1 billón tiene la propiedad Goldbach o la propiedad Tortuga. Claro que puede tener las dos.

Aquiles: Puedo considerarlo, pero no sé si puedo darle una respuesta a los dos interrogantes.

Tortuga: No se rinda tan pronto. Supongamos que le pido que responda a una de las alternativas. ¿Cuál elegiría para examinar?

Aquiles: Me parece que echaría un volado. No veo mucha diferencia entre ambas.

Tortuga: ¡Eh! ¡Pero si hay un mundo de diferencia! Si usted opta por la propiedad Goldbach, que implica SUMAS de primos, estará limitado al manejo de los primos que van de 2 a 1 millón, ¿no es así?

Aquiles: Por supuesto.

Tortuga: Entonces, su búsqueda de la representación de 1 billón como una suma de dos primos tiene la GARANTIA DE FINALIZAR.

Aquiles: ¡Aaah! Ahora veo su perspectiva. En cambio, si opto por abordar la representación de 1 billón como la diferencia entre dos primos, no habría ningún límite en la dimensión de los primos involucrados. Podrían ser tan inmensos que me llevaría un billón de años establecerlos.

Tortuga: O bien, inclusive, ¡puede que ni siquiera EXISTAN! Después de todo, eso es lo que plantea la pregunta: ¿existen tales primos? Cuán enormes pueda resultar que sean no es lo que más nos interesa.

Aquiles: Así es. Si no existen, la búsqueda duraría por siempre, sin llegar nunca ni a la respuesta afirmativa, ni a la negativa. Pero, a pesar de eso, la respuesta sería no.

Tortuga: De manera que si usted toma cierto número, y desea verificar si tiene la propiedad Goldbach, o bien la propiedad Tortuga, la diferencia entre las verificaciones respectivas será la siguiente: en cuanto a la primera, la búsqueda que se emprenda cuenta con la GARANTIA DE FINALIZAR; en cuanto a la segunda, es POTENCIALMENTE INACABABLE: no hay garantías de ninguna clase. Podría extenderse alegremente por siempre, sin producir una respuesta. Por otra parte, sin embargo, en ciertos casos podría terminar en el primer paso.

Aquiles: Ya veo que hay una muy notable diferencia entre las propiedades Goldbach y Tortuga.

Tortuga: Sí, aquellos dos problemas similares se relacionan con estas propiedades tan diferentes. La Conjetura Goldbach supone que todos los números pares tienen la propiedad Goldbach; la variación Goldbach sugiere que todos los números pares tienen la propiedad Tortuga. Ambos problemas siguen sin ser resueltos, pero lo interesante es que, aun cuando den la impresión de ser sumamente semejantes, involucran propiedades de los números naturales que son por completo distintas.

Aquiles: Me doy cuenta de lo que quiere significar. La propiedad Goldbach es una propiedad detectable, o reconocible, de cualquier número par, puesto que yo sé cómo verificar su presencia: simplemente, iniciando una búsqueda. Esta llegará automáticamente a un final, con una respuesta sí, o no. La propiedad Tortuga, en cambio, es más elusiva, puesto que la sola fuerza bruta de una búsqueda nunca podrá arrojar una respuesta.

Tortuga: Bueno, puede que haya formas más refinadas de indagación en el caso de la propiedad Tortuga, y tal vez la aplicación de alguna de las mismas consiga llevar siempre a un final, y producir una respuesta.

Aquiles: ¿La búsqueda finalizaría solamente si la respuesta es afirmativa?

Tortuga: No necesariamente. Podría haber alguna manera de probar que, cuando la búsqueda se prolongue más allá de una cierta medida temporal, la respuesta deba ser negativa. Inclusive, podría haber alguna otra manera de determinar los primos, que no fuese la fuerza bruta, la cual garantizase que los va a hallar en caso de que existan y, en caso

de que no existan, indicárnoslo. Con una u otra manera, tendríamos que una búsqueda finita estaría en condiciones de producir la respuesta no. Pero ignoro si algo semejante puede ser demostrado o no. Buscar a través de espacios infinitos es siempre una cosa muy problemática, usted sabe.

Tortuga: Tal como están las cosas, usted no sabe ahora de ningún modo de verificación de la propiedad Tortuga dotado de la garantía de finalizar . . . y, sin embargo, PUEDE existir.

Tortuga: Correcto. Me imagino que uno podría embarcarse en una búsqueda de ese modo de búsqueda. Pero no puedo brindar ninguna garantía de que esa "metabúsqueda" finalice, tampoco.

Aquiles: Fíjese, lo que me parece asombrosamente peculiar es que, si un número par determinado —un billón, digamos— carece de la propiedad Tortuga, ello es causado por una cantidad infinita de piezas de información separadas. Es divertido pensar en hacer un solo envoltorio con toda esa información y denominarla, como tan gentilmente ha propuesto usted, "la propiedad Aquiles" de 1 billón. Pero se trata, en realidad, de una propiedad del sistema numérico como un TODO, no sólo del número 1 billón.

Tortuga: Es una observación interesante, Aquiles; sin embargo, sostengo que tiene muchísimo sentido ligar esa circunstancia al número 1 billón. Con fines ilustrativos, permítame sugerirle que considere un enunciado más simple: "29 es primo". Ahora bien, en realidad, este enunciado significa en los hechos que 2 veces 2 no es 29, que 5 veces 6 no es 29, y así siguiendo, ¿no es así?

Aquiles: Es como usted dice, creo.

Tortuga: Pero usted se queda perfectamente satisfecho luego de reunir todas esas circunstancias, ligarlas al número 29, meter todo en un mismo envoltorio y decir nada más que: "29 es primo".

Aquiles: Sí . . .

Tortuga: Y el número de hechos involucrados es, en verdad, infinito, ¿no? Al fin y al cabo, hechos tales como "4444 veces 3333 no es 29" también forman parte de aquello, ¿no le parece?

Aquiles: Hablando en términos estrictos, creo que sí. Pero usted y yo sabemos que no se puede obtener 29 mediante la multiplicación de dos números que sean, ambos, mayores que 29. De modo que, en rigor, decir "29 es primo" es únicamente resumir un número FINITO de hechos relativos a la multiplicación.

Tortuga: Puede usted expresarlo de esa manera si le parece, pero analice esto: el hecho de que dos números que son mayores que 29 no puedan dar un producto igual a 29 involucra toda la estructura del sistema numérico. En tal sentido, esta circunstancia en sí misma es un resumen de un número infinito de circunstancias. Usted no puede escapar al hecho, Aquiles, de que cuando dice "29 es primo", en realidad está afirmando una cantidad infinita de cosas.

Aquiles: Tal vez sea así, pero yo lo siento como una sola circunstancia.

Tortuga: Eso ocurre porque su conocimiento anterior contiene una infinitud de hechos, los cuales están incorporados implícitamente en su forma de visualizar las cosas. No puede ver un infinito explícito porque está capturado implícitamente en el interior de las imágenes que usted manipula.

Aquiles: Presumo que tiene usted razón. Con todo, me parece raro que una propiedad del sistema numérico en su conjunto sea embútida dentro de una unidad, y a esta unidad se la rotule: "primidad de 29".

Tortuga: Quizá parezca raro, pero también resulta una forma sumamente conveniente de observar las cosas. Volvamos ahora a su hipótesis. Si, como usted sugirió, el número 1 billón tiene la propiedad Aquiles, cualquiera que sea el primo que usted le sume no obtendrá otro primo. Esta situación estará causada por una cantidad infinita de "acontecimientos" matemáticos independientes. Ahora bien, ¿todos estos "acontecimientos" emanan de la misma fuente? ¿Tienen que ser efecto de una causa común? Porque, de ser así, el hecho habrá sido creado por alguna suerte de "coincidencia infinita", y no por una regularidad subyacente.

Aquiles: ¿Una "coincidencia infinita"? Dentro de los números naturales, NO hay coincidencias: nada sucede sin que haya un patrón subyacente. Tomemos el número 7, en lugar de 1 billón. Puedo trabajar más cómodamente con él, pues es más pequeño. 7 tiene la propiedad Aquiles.

Tortuga: ¿Está seguro?

Aquiles: Sí. Vea por qué: si usted le suma 2, obtiene 9, el cual no es primo. Y si le suma cualquier otro primo a 7, usted estará sumando dos números impares, y obteniendo como resultado un número par, es decir, fracasando otra vez en llegar a un número primo. De modo que, aquí, la "aquileanidad" de 7, si me permite acuñar el término, es una consecuencia de únicamente DOS motivos: algo muy alejado de toda "coincidencia infinita". Lo cual viene a propósito para dar apoyo a mi afirmación siguiente: nunca hace falta una cantidad infinita de razones para explicar una verdad aritmética. Si HUBIERA algún hecho aritmético causado por una serie infinita de coincidencias no relacionadas, jamás sería posible aportar una demostración finita de su veracidad. Y esto es ridículo.

Tortuga: Es una opinión razonable, y le será muy útil conservarla. Sin embargo . . .

Aquiles: ¿Existen realmente quienes no estén de acuerdo con ella? Si los hay, deberán creer que hay "coincidencias infinitas", que hay caos en el centro de la más perfecta, armoniosa y bella de todas las creaciones: el sistema de los números naturales.

Tortuga: Quizá sea así; pero, ¿nunca pensó usted que tal caos podría ser una parte integral de la belleza y de la armonía?

Aquiles: ¿El caos, una parte de la perfección? ¿El orden y el caos formando una placentera unidad? ¡Herejía!

Tortuga: Es sabido que su artista preferido, M. C. Escher, ha sugerido



Figura 71. Orden y caos, *de M. C. Escher (litografía, 1950).*

ese herético punto de vista en una de sus obras . . . Y ya que estamos en el tema del caos, estoy convencido de que le interesaría enterarse de dos categorías diferentes de búsqueda, ambas dotadas de la garantía de finalizar.

Aquiles: Sí, por cierto.

Tortuga: El primer tipo —no caótico— es el ejemplificado por la verificación requerida por la propiedad Goldbach. Uno se limita a examinar

los primos menores que $2N$, y si algún par suma $2N$, entonces $2N$ tiene la propiedad Goldbach; en caso contrario, no la tiene. Esta clase de verificación no sólo es seguro que finaliza sino que, además, se puede predecir CUANDO finaliza.

Aquiles: De modo que es una verificación de FINALIZACION PREDICTIBLE. ¿Iba usted a decirme que la comprobación de ciertas propiedades teórico-numéricas implica verificaciones dotadas de la garantía de finalizar, pero de las cuales no hay medio para saber, por anticipado, qué extensión tendrán?

Tortuga: ¡Qué profético, Aquiles! Y la existencia de tales verificaciones muestra que, en cierto sentido, hay un caos intrínseco en el sistema de los números naturales.

Aquiles: Bueno, en ese caso, sólo se debería decir que esa gente no conoce a fondo la verificación. Si investigara un poco más, podría determinar el máximo de duración posible del procedimiento. Después de todo, siempre tienen que aparecer patrones significativos dentro de los números enteros. ¡No puede ser que haya únicamente patrones caóticos, desafiando la predictibilidad!

Tortuga: Puedo comprender su confianza intuitiva, Aquiles. Pero ésta no es siempre justificada. Por cierto, con respecto a muchos casos lo que usted dice es absolutamente correcto: ¡sólo porque alguien no conozca una cosa no se puede extraer la conclusión de que esa cosa es incognoscible! No obstante, hay ciertas propiedades de los enteros para las cuales se puede probar que existen verificaciones finitas, pero también se puede PROBAR que no hay forma de predecir qué extensión tendrán.

Aquiles: Se me hace difícil creer eso. Suena como si el propio diablo se las ingeniase para infiltrarse y meter su cola en el bello reino de Dios de los números naturales . . .

Tortuga: Tal vez le sea grato saber que de ningún modo es sencillo, ni natural, definir una propiedad para la cual haya una verificación finita pero de finalización no PREDICTIBLE. Las propiedades más "naturales" de los enteros admiten verificaciones de finalización predictible. Por ejemplo, la primidad, la calidad de cuadrado, la de ser potencia de diez, etc.

Aquiles: Sí, puedo ver que esas propiedades están completamente abiertas a la verificación. ¿Podría usted nombrarme una propiedad cuya única verificación posible sea finita pero impredictible?

Tortuga: Me sería demasiado trabajoso, en el somnoliento estado en que me encuentro. En lugar de eso, permítame mostrarle una propiedad muy fácil de definir y para la cual, pese a eso, no se conoce ninguna verificación finita. No le estoy diciendo que no se la pueda llegar a descubrir alguna vez, fíjese, *sino solamente que no se conoce ninguna*. Comencemos con un número, ¿querría elegir uno, y decírmelo?

Aquiles: ¿Qué le parece 15?

Tortuga: Excelente. Arrancamos a partir de su número, y si es IMPAR, lo triplicamos, y le sumamos 1. Si es PAR, lo reducimos a la mitad. Luego, repetimos el proceso. Al número que, siguiendo este proceso, culmine en 1, lo llamaremos MARAVILLOSO, y al que no, INMARAVILLOSO.

Aquiles: ¿15 es maravilloso o inmaravilloso? A ver:

15	es	IMPAR,	entonces, hago $3n + 1$	:	46
46	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	23
23	es	IMPAR,	entonces, hago $3n + 1$	:	70
70	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	35
35	es	IMPAR,	entonces, hago $3n + 1$	:	106
106	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	53
53	es	IMPAR,	entonces, hago $3n + 1$	:	160
160	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	80
80	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	40
40	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	20
20	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	10
10	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	5
5	es	IMPAR,	entonces, hago $3n + 1$	:	16
16	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	8
8	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	4
4	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	2
2	es	PAR,	entonces, tomo la mitad	:	1

¡Llegamos! Ha sido un camino bastante retorcido, desde 15 hasta 1, pero finalmente lo recorrí. Esto muestra que 15 tiene la propiedad de ser maravilloso. Me maravillaría saber cuáles números son INmaravillosos . . .

Tortuga: ¿Advirtió usted cómo oscilan los números, subiendo y bajando, en este simplemente definido proceso?

Aquiles: Sí. Me resultó particularmente sorprendente, luego de trece pasos, encontrarme en 16, apenas uno más que quince, el número del que partí. En un sentido, estaba casi en el punto de salida, pero en otro sentido, no estaba para nada cerca de ese punto. Otra cosa que me resulta llamativa es que sea necesario subir hasta 160 para resolver el problema. ¿Cómo pasa eso?

Tortuga: Sí, hay un "cielo" infinito por el cual deslizarse, y es muy difícil saber con anticipación a qué altura de ese cielo uno acabará remontándose. Por cierto, es enteramente posible que uno pueda sólo subir y subir y subir, y no descender nunca.

Aquiles: ¿De veras? Supongo que es concebible, pero ¡qué pasmosa coincidencia sería necesaria! Habría que toparse con un impar tras otro, y únicamente unos pocos pares intercalados. Pongo en duda que ello

pueda suceder . . . pero no estoy del todo seguro.

Tortuga: ¿Por qué no ensaya comenzando con 27? Vea, no le prometo nada, pero inténtelo alguna vez, nada más que para entretenerse. Y le aconsejo que se haga de una hoja de papel bastante larga.

Aquiles: Mmmm . . . Parece interesante. Sabe usted, me sigue resultando gracioso asociar la maravillosidad (o inmaravillosidad) con el número de partida, cuando se trata, tan obviamente, de una propiedad de todo el sistema numérico.

Tortuga: Lo comprendo, pero no es algo diferente a decir "29 es primo", o "el oro es valioso": ambas afirmaciones atribuyen a una entidad individual una propiedad que han adquirido exclusivamente por su incorporación a un contexto específico.

Aquiles: Creo que tiene razón. Este problema de la "maravillosidad" causa maravilla por lo esquivo, dada esa forma en que oscilan los números: ora creciendo, ora decreciendo. El patrón DEBE ser regular, aunque la superficie parezca totalmente caótica. Por consiguiente, puedo entender muy bien por qué, hasta la fecha, nadie conoce una verificación de la propiedad de maravillosidad dotada de la garantía de finalizar.

Tortuga: Hablando de procesos acabables e inacabables, y de los que flotan entre ambos extremos, me he acordado de un amigo mío, un escritor, que está preparando un libro.

Aquiles: ¡Oh, qué interesante! ¿Cómo se llama la obra?

Tortuga: *Cobre, Plata, Oro: una indestructible aleación metálica.* ¿No le suena atractivo?

Aquiles: Francamente, estoy un poco confundido con ese título. A fin de cuentas, ¿qué tienen que ver entre sí el cobre, la plata y el oro?

Tortuga: Pues a mí me parece claro.

Aquiles: Ahora que si el título fuera, digamos, *Jirafas, Plata, Oro*, o bien *Cobre, Elefantes, Oro*, entonces sí, me parecería . . .

Tortuga: ¿Quizá preferiría, *Cobre, plata, gorilas?*

Aquiles: ¡Oh, de ninguna manera! Pero qué originales son los títulos desconcertantes. Nadie consigue comprenderlos.

Tortuga: Se lo diré a mi amigo. Estará encantado de contar con un título de efecto (como quiere su editor).

Aquiles: Me complace mucho. ¿Y por qué se acordó usted de su libro?

Tortuga: Ah, sí. Usted sabe, en ese libro habrá un Diálogo en el cual mi amigo desea que los lectores se esfuercen en la BUSQUEDA del final.

Aquiles: Un curioso deseo. ¿Y cómo lo logra?

Tortuga: Sin duda, usted habrá advertido el modo en que muchos autores se preocupan por acumular una gran tensión unas pocas páginas antes del final de sus narraciones; pero un lector, que está sosteniendo físicamente el libro en sus manos, puede PALPAR que el relato está próximo a su fin. Luego, cuenta con cierta información adicional que funciona como una advertencia anticipada, en cierto sentido. La ten-

sión resulta un poco neutralizada por la materialidad del libro. Sería mucho mejor si, por ejemplo, hubiera un montón de ripio al final de las novelas.

Aquiles: ¿Ripio?

Tortuga: Sí; lo que eso quiere decir es un montón adicional de páginas impresas, que no formen parte de la narración misma sino que sirvan para ocultar la ubicación exacta del final, e impedir así que sea localizado por un vistazo sumario o por la palpación del libro.

Aquiles: Ya veo. Así, el verdadero final de una narración aparecería, digamos, cincuenta o cien páginas antes de la finalización material del libro, ¿no es eso?

Tortuga: Sí. Ello ofrecería un elemento de sorpresa, porque el lector no sabría por adelantado cuántas páginas son de ripio, y cuántas de narración.

Aquiles: Si se tratara de una práctica habitual, podría ser muy eficaz. Pero hay un problema: supongamos que el ripio fuera sumamente obvio, como por ejemplo si estuviera constituido por hojas en blanco, o por páginas llenas de equis, o de letras acumuladas al azar; sería lo mismo que si no estuviese.

Tortuga: Efectivamente. El ripio debe parecerse a las páginas normalmente impresas.

Aquiles: Pero a veces basta con un vistazo sumario, en el caso de páginas normales, para distinguir entre partes diferentes. Habría que conseguir, entonces, que el ripio tuviera una semejanza muy grande con la narración auténtica.

Tortuga: Muy cierto. La forma en que siempre me he representado esto es la siguiente: se finaliza el relato y, sin ninguna interrupción, se sigue con algo que parezca una continuación pero que en realidad no sea más que ripio, totalmente desvinculado del tema verdadero. El ripio es, en cierto sentido, un "final después del final"; puede contener ideas literarias del todo ajenas al tema original.

Aquiles: ¡Sinvergüenza! Pero luego tendrá el problema de no poder decir cuándo se produce el final verdadero; estará completamente mezclado con el ripio.

Tortuga: También hemos llegado a esa conclusión mi amigo el escritor y yo. Es una lástima, pues me parecía una idea muy atractiva.

Aquiles: Oiga, se me ocurre una sugerencia. La transición entre narración genuina y ripio material podría hacerse en tal forma que, mediante un examen debidamente atento del texto, un lector inteligente pudiera detectar donde acaba una cosa y comienza la otra. Tal vez le lleve cierto tiempo; tal vez no haya forma de predecir cuánto tiempo le llevará . . . Pero el editor podría garantizar que una búsqueda lo debidamente atenta del final siempre tendrá fin, aun cuando no pueda indicar el lapso que insumirá la verificación.

Tortuga: Muy bien, pero, ¿qué significa "lo debidamente atenta"?

Aquiles: Quiere decir que el lector debe perseguir la aparición, en algún

punto del texto, de un rasgo poco saliente pero revelador. Este señalaría el final. Y debe ser lo suficientemente ingenioso como para ubicar y considerar muchos de esos rasgos antes de descubrir el que corresponde exactamente.

Tortuga: ¿Tales como un cambio súbito en la frecuencia de las letras, o en la longitud de las palabras? ¿O una seguidilla de errores gramaticales?

Aquiles: Posiblemente. O bien puede ser un mensaje escondido, de determinada índole, lo que revele el verdadero final a un lector lo debidamente atento. ¿Quién sabe? Inclusive podría tratarse de ciertos personajes o acontecimientos ajenos, que no guarden coherencia con el espíritu de lo narrado hasta allí. Un lector ingenuo se lo tragaría entero, pero un lector refinado podría notar con exactitud la línea divisoria.

Tortuga: Esta idea es más original, Aquiles. Se la pasaré a mi amigo, y a lo mejor puede incorporarla a su Diálogo.

Aquiles: Me sentiría altamente honrado.

Tortuga: Bueno, le diré que me estoy sintiendo un poco adormilada, Aquiles. Me convendría despedirme, mientras me conserve en condiciones de navegar hasta mi casa.

Aquiles: Me siento muy halagado de que haya permanecido tanto rato en mi compañía, y a horas tan inusuales de la noche, sólo por hacerme un favor. Le aseguro que su entretenimiento teórico-numérico ha sido un antídoto perfecto para mis molestias nocturnas. Y, quién sabe . . . quizá hasta pueda dormirme esta noche. Como muestra de mi gratitud, señora Tortuga, querría obsequiarle un regalo especial.

Tortuga: Oh, no sea tonto, Aquiles.

Aquiles: Es mi gusto, señora. Aproxímese a esa mesa; sobre ella, verá un estuche asiático.

(*La Tortuga camina hasta la mesa.*)

Tortuga: ¿Habla usted de este auténtico estuche asiático de oro? No lo puedo creer.

Aquiles: Ese mismo. Acéptelo, por favor, señora T., con mis más cálidos augurios.

Tortuga: Muchísimas gracias, Aquiles. Mmmm . . . ¿Por qué están grabados en la tapa los nombres de todos estos matemáticos? Qué lista tan curiosa:

D e M o r g a n
A **b** e l
B o **o** l e
B r o **u** w e r
S i e r **p** i ń s k i
W e i e r **s** t r a s s

Aquiles: Creo que se trata de una Lista Completa de los Grandes Mate-

máticos. Lo que no he podido descubrir es por qué hay una diagonal de letras más destacadas.

Tortuga: En el fondo dice, "Sustraiga 1 de la diagonal, y encontrará a Bach en Leipzig".

Aquiles: Lo he visto, pero no le hallo pies ni cabeza. Oiga, ¿qué me dice de un traguito de excelente whisky? Tengo algo en esa botella.

Tortuga: No, gracias; estoy demasiado cansada. Ya no más me voy a casa. (*En forma casual, abre el estuche.*) ¡Escuche, espérese, Aquiles, hay un centenar de Louis d'or aquí!

Aquiles: Estaría muy complacido si usted los aceptara, señora T.

Tortuga: Pero . . . pero . . .

Aquiles: Ninguna objeción, por favor. El estuche, el oro, son suyos. Y mi agradecimiento por una velada sin igual.

Tortuga: ¿Pero qué es lo que ocurre con usted, estimado Aquiles? Bueno, gracias por su sobresaliente generosidad, y espero que tenga dulces sueños relacionados con la extraña Conjetura Goldbach, y su Variación. Buenas noches.

(*La Tortuga recoge el auténtico estuche asiático de oro, con su contenido de cien Louis d'or, y se encamina hacia la puerta. Cuando está por abrirla, se oyen fuertes toques.*)

¿Quién puede estar llamando a esta hora tan inoportuna, Aquiles?

Aquiles: No tengo la más lejana idea. Me parece sospechoso. ¿Por qué no se esconde detrás de ese mueble, por si acaso se trata de algo raro?

Tortuga: Buena idea. (*Se apretuja detrás del mueble.*)

Aquiles: ¿Quién es?

Voz: Abra. Policía.

Aquiles: Adelante, está abierto.

(*Entran dos fornidos policías; ostentan lustrosas insignias.*)

Policía: Mi nombre es Plateros, y el de mi compañero, aquí, Orozco. (*Señala su insignia.*) ¿Vive un tal Aquiles en esta casa?

Aquiles: ¡Soy yo!

Policía: Bien, Aquiles, tenemos razones para creer que hay aquí un auténtico estuche asiático de oro, con un centenar de Louis d'or en su interior. Alguien lo sustrajo esta tarde del museo.

Aquiles: ¡Qué cosa tan terrible!

Policía: Si está en esta casa, Aquiles, y siendo usted el único sospechoso posible, lamento comunicarle que deberé arrestarlo. Bien, aquí tengo la autorización pertinente para efectuar una búsqueda . . .

Aquiles: ¡Oh, señores, mi contento por vuestra llegada es tanto! Durante toda la noche he estado siendo aterrorizado por la señora Tortuga y su auténtico estuche asiático de oro. ¡Por fin han llegado ustedes a liberar-

me! Por favor, señores, miren detrás de ese mueble, ¡y allí encontrarán a la delincuente!

(*Los policías atisban detrás del mueble, y ven allí a la Tortuga, acurrucada, sosteniendo su auténtico estuche asiático de oro, y temblando.*)

Policía: ¡Aquí está! De manera que la señora Tortuga es la pilla, ¿eh? Jamás hubiera sospechado de ELLA. Pero la hemos pescado, y con las manos en la masa.

Aquiles: ¡Arranquen de aquí a la maleante, buenos señores! ¡Quiera el destino que sea la última vez que tenga noticias de ella, y de su Estuche Asiático de Oro Auténtico!

CAPITULO XIII

BlooP y FlooP y GlooP

Autoconciencia y caos

BLOOP, FLOOP Y GLOOP no son intentos canoros, imitaciones de patos o de los sonidos producidos por un barco que se hunde: se trata de lenguajes de computadora, cada uno con su propia finalidad específica. Han sido inventados especialmente para este capítulo, y serán empleados para explicar algunos nuevos sentidos del término "recursividad": en particular, las nociones de *recursividad primitiva* y de *recursividad generalizada*. Estas serán de gran utilidad para el esclarecimiento del mecanismo de la autorreferencia en TNT.

Puede parecer que estamos estableciendo una transición muy abrupta, desde los cerebros y las mentes, a aspectos técnicos de la matemática y de la ciencia de las computadoras. Pese a que, en determinada medida, efectivamente es un salto brusco, tiene su sentido. Ya vimos que en el corazón de la conciencia parece haber un cierto género de autoconciencia; lo que haremos ahora será examinar esta última en el marco de ámbitos más formales, tales como TNT. La brecha entre TNT y la mente es amplia, pero habrá algunas ideas con mayor capacidad inspiradora que tal vez puedan ser recogidas por nuestras reflexiones acerca de la conciencia.

Una de las facetas más asombrosas de la autoconciencia de TNT es que está íntimamente vinculada con la problemática del orden *versus* el caos dentro de los números naturales. En especial, veremos que un sistema ordenado, dotado de la suficiente complejidad como para poder reflejarse a sí mismo, no puede ser *totalmente* ordenado: tiene que contener ciertos rasgos extraños y caóticos. Para los lectores que tengan algo de Aquiles, esto será algo difícil de aceptar; pero hay una compensación "mágica": existe cierto género de orden en el desorden, el cual pasa a ser su propio campo de estudio, bajo el nombre de "teoría recursiva de la función". Lamentablemente, no podremos hacer mucho más que alusiones a lo fascinante de este tema.

Representabilidad y refrigeradores

Expresiones como "suficientemente complejo", "suficientemente poderoso", y otras por el estilo, han aflorado muy a menudo en las páginas pre-

cedentes. ¿Qué quieren decir? Podemos retornar a la batalla entre el Cangrejo y la Tortuga, y formular la pregunta: "¿Qué es lo que caracteriza a algo como un fonógrafo?" El Cangrejo podría aducir que su refrigerador es un fonógrafo "Perfecto"; para demostrarlo, quizá colocase encima de aquél un disco cualquiera, y dijese: "Ya lo ve, lo está ejecutando . . ." La Tortuga, si quisiera refutar semejante acto de tipo zen, debería replicar: "No; su refrigerador es de muy baja fidelidad como para ser considerado un fonógrafo: no puede reproducir ninguna clase de sonido (y mucho menos, sonidos autodestructivos)." La Tortuga puede elaborar un disco que se llame "No puedo ser escuchado mediante el Fonógrafo X" ¡solamente en el caso de que el Fonógrafo X sea efectivamente un fonógrafo! El método de la Tortuga es sumamente capcioso, pues se funda en la fortaleza, y no en la debilidad, del sistema; en consecuencia, ella exige fonógrafos dotados de "fidelidad lo suficientemente alta".

Lo mismo vale para las versiones formales de la teoría de los números. La razón por la cual TNT es una formalización de N consiste en que sus símbolos funcionan como es debido: es decir, sus teoremas no permanecen en silencio como el refrigerador, sino que permiten escuchar verdades propiamente dichas de N. Por supuesto, también así funcionan los teoremas del sistema pq; ¿debe ser considerado entonces "una formalización de la teoría de los números", o en realidad se parece más a un refrigerador? Bueno, es algo mejor que un refrigerador, pero no deja de ser bastante débil. El sistema pq no incluye las suficientes verdades nucleares de N como para considerárselo "una teoría de los números".

¿Cuáles son, pues, tales "verdades nucleares" de N? Son las *verdades recursivas primitivas*, lo cual significa que involucran sólo cálculos *de finalización predictible*. Estas verdades nucleares tienen la misma utilidad, para N, que los cuatro primeros postulados de Euclides para la geometría: permiten apostar a ciertos competidores, antes de que comience la carrera, en las pistas de "poder insuficiente". De aquí en más, el criterio para denominar "suficientemente poderoso" a un sistema será la *representabilidad de todas las verdades recursivas primitivas*.

El hacha de Ganto en metamatemática

La importancia de la noción anterior es mostrada por el siguiente hecho clave: si se cuenta con una formalización lo suficientemente poderosa de teoría de los números, el método de Gödel, entonces, le será aplicable, y en consecuencia tal sistema será *incompleto*. Si, en cambio, el sistema *no* es lo suficientemente poderoso (esto es, no todas las verdades recursivas primitivas son teoremas), el sistema será, entonces, en virtud de tal carencia, *incompleto*. Tenemos así una nueva formulación de "El hacha de Ganto", ahora en el campo de la metamatemática: ¡haga lo que haga el sistema, el hacha de Gödel le cortará la cabeza! Adviértase también la

perfecta analogía que tiene esto con la contienda alta fidelidad *versus* baja fidelidad del *Contracrostipunto*.

En realidad, resulta que sistemas mucho más débiles son menos vulnerables al método de Gödel; el criterio de que todas las verdades recursivas primitivas deben ser representadas como teoremas es tremendamente rígido. Es algo así como si un ladrón robara nada más que a la gente "suficientemente rica", y cuyo criterio al efecto fuera el de que la víctima potencial debiera portar, cuanto menos, un millón de dólares en billetes. En el caso de TNT, afortunadamente para nuestra condición de ladrones, el millón contante y sonante está allí, lo cual equivale a decir que contienen, por cierto, todas las verdades recursivas primitivas bajo la forma de teoremas.

Pero antes de sumergirnos en una detallada exposición de las funciones recursivas primitivas y de los predicados, me interesa ligar los temas de este capítulo a los tocados en los capítulos anteriores, a fin de proporcionar una motivación algo más intensa.

El hallazgo del orden mediante la elección del filtro adecuado

Ya vimos, en un momento muy anterior, que los sistemas formales pueden ser bestias díscolas e ingobernables, pues contienen reglas de ampliación y reducción, las cuales encauzan a veces en búsquedas de nunca acabar, en el ámbito de las cadenas. El descubrimiento de la numeración Gödel mostró que toda búsqueda de una cadena dotada de una propiedad tipográfica especial tiene un primo hermano aritmético: una búsqueda isomórfica de un entero dotado de una propiedad aritmética especial, correspondiente a la tipográfica. En consecuencia, la persecución de procedimientos de decisión para los sistemas formales importa la resolución del misterio de las búsquedas impredictiblemente largas. Ahora bien, en el *Aria con Variaciones Diversas* quizá he concedido demasiada gravitación a las manifestaciones visibles de caos dentro de problemas relativos a enteros. En verdad, hay quienes han conseguido domesticar ejemplares más salvajes de aparente caos que el problema de la "maravillosidad", descubriendo, a fin de cuentas, que se trataba de bestias sumamente apacibles. La poderosa fe de Aquiles en la regularidad y en la predictibilidad de los números, por consiguiente, es merecedora de algo más de respeto: especialmente, porque refleja la misma fe que caracterizó a casi todos los matemáticos anteriores a la década de los treinta. Con la finalidad de hacer ver por qué el del orden *versus* caos es un tema tan delicado y sobresaliente, y para vincularlo con cuestiones relativas a la ubicación y a la revelación del significado, me gustaría citar un bello y memorable pasaje de *Are Quanta Real?*, un diálogo galileano, obra de J. M. Jauch en su último período:

SALVIATI Supongamos que le presento dos secuencias de números, tales como

7 8 5 3 9 8 1 6 3 3 9 7 4 4 8 3 0 9 6 1 5 6 6 0 8 4 . . .

y

$$1, -1/3, +1/5, -1/7, +1/9, -1/11, +1/13, -1/15, \ldots$$

Si le pregunto, Simplicio, cuál es el número que sigue en la primera secuencia, ¿qué me responde?

SIMPLICIO No sabría qué decirle. Creo que es una secuencia caprichosa, no ajustada a *ninguna* ley.

SALVIATI ¿Y en la segunda secuencia?

SIMPLICIO Esto es fácil. Tiene que seguir $+1/17$.

SALVIATI Correcto. Pero, ¿si le digo que también la primera secuencia obedece a una ley, y que esta ley es, en realidad, idéntica a la que acaba usted de descubrir con respecto a la segunda secuencia?

SIMPLICIO No lo creo probable.

SALVIATI Ciertamente es así, empero, puesto que la primera secuencia es, simplemente, *el comienzo de la fracción* decimal [expansión] de la suma de la segunda. Su valor es $\pi/4$.

SIMPLICIO Usted está lleno de trucos matemáticos así, pero no veo qué relación tienen con la abstracción y la realidad.

SALVIATI Las relaciones con la abstracción son fáciles de ver. La primera secuencia parece azarosa, a menos que uno haya desarrollado, a través de un proceso de abstracción, cierta clase de filtro al cual le es posible percibir una estructura simple por detrás de la aparente casualidad.

Es exactamente de *esta manera* que son descubiertas las leyes de la naturaleza. La naturaleza nos pone enfrente de una multitud de fenómenos que nos impresionan principalmente por su arbitrariedad caótica, hasta que seleccionamos determinados hechos significativos y los abstraemos de las circunstancias particulares y nada significativas que los rodean, de modo de llegar a convertirlos en ideas. Solamente así es que pueden exhibir su verdadera estructura en todo su esplendor.

SAGREDO ¡Es un concepto maravilloso! Propone que, cuando tratemos de comprender la naturaleza, observemos los fenómenos como si fuesen *mensajes* que deben ser comprendidos. Con *la advertencia* de que todos los mensajes parecerán casuales hasta que establezcamos un código para leerlos. Este código adopta la forma de una abstracción, esto es, optamos por ignorar ciertas cosas a causa de que no son pertinentes, y en consecuencia seleccionamos en parte el contenido del mensaje mediante una elección libre. Tales señales no significativas constituyen el "ruido de fondo" que limita la precisión de nuestro mensaje.

Ahora bien, como el código no es absoluto, puede haber diversos mensajes en la materia prima de los datos, por lo cual, cambiando el código, surgirá un mensaje de significación igualmente profunda desde *algo que* antes no era sino ruido, y *a la inversa*: en un nuevo código, un mensaje anterior puede carecer de significación.

Así, un código presupone una libre elección entre aspectos diferentes y complementarios, cada uno de los cuales tienen un idéntico reclamo de *realidad*, si es que puedo utilizar esta dudosa palabra.

Algunos de esos aspectos pueden sernos completamente desconocidos ahora, pero tal vez se revelen a un observador que aplique un sistema diferente de abstracciones.

Pero dígame, Salviati, ¿cómo podemos entonces sostener que hacemos algún *descubrimiento* acerca del mundo real objetivo? ¿*No será que tan sólo* estamos creando cosas de acuerdo a nuestras propias imágenes, y que la realidad está únicamente dentro de nosotros mismos?

SALVIATI No creo que sea así necesariamente, pero son interrogantes que merecen una reflexión más profunda.[1]

Jauch habla aquí de mensajes provenientes, no de un "ser consciente", sino de la naturaleza misma. Las preguntas que planteamos en el Capítulo VI acerca del vínculo entre significación y mensajes pueden ser igualmente planteadas ahora con referencia a los mensajes procedentes de la naturaleza. ¿La naturaleza es caótica o responde a estructuras? Y, ¿qué papel cumple la inteligencia en la determinación de la respuesta que cabe a tal pregunta?

Dejando a un lado la filosofía, sin embargo, podemos considerar el problema de la profunda regularidad existente en una secuencia aparentemente azarosa. ¿La función $Q(n)$ del Capítulo V también podría tener una explicación simple, no recursiva? ¿Todos los problemas, al igual que un huerto, podrán ser mirados desde un ángulo tal que revele su secreto? ¿O hay ciertos problemas, dentro de la teoría de los números, que permanecen en el misterio cualquiera sea el ángulo desde el que los observemos?

Luego de esta introducción, presiento que es hora de ponernos a definir la significación precisa de la expresión "búsqueda impredictiblemente larga". Lo haremos a través del lenguaje BlooP.

Pasos primordiales del lenguaje BlooP

Nuestro objetivo serán las búsquedas de números naturales dotados de diversas propiedades. Para hablar de la *longitud* de cualquier búsqueda, tendremos que definir ciertos *pasos* primordiales, a partir de los cuales sea organizada toda búsqueda, de modo que la longitud pueda ser medida en función de la cantidad de pasos requeridos. Algunos de los pasos que podemos considerar primordiales son los siguientes:

sumar dos números naturales cualesquiera;
multiplicar dos números naturales cualesquiera;
determinar si dos números naturales son iguales;
determinar cuál es el mayor (o el menor) de dos números.

Bucles y límites superiores

Si probamos formular una verificación para, digamos, la primidad, en función de tales pasos, pronto veremos que nos es necesario incluir una *estructura de control*: es decir, descripciones del orden en que se deben hacer las cosas cuando bifurcamos para retroceder, a fin de intentar algo

[1] J. M. Jauch, *Are Quanta Real?*, pp. 63-65.

por segunda vez, o cuando saltamos por encima de un *conjunto* de pasos, cuando nos detenemos, y decisiones de esta clase.

Lo típico de cualquier *algoritmo* —o sea, de un diseño específico para dirigir la realización de una tarea— es que incluya una combinación de, (1) especificación de las operaciones que han de ser realizadas, y (2) instrucciones de control. Como consecuencia, cuando desarrollemos nuestro lenguaje mediante la enunciación de cálculos predictiblemente extensos, deberemos también incorporar estructuras primordiales de control. En realidad, la garantía de calidad de BlooP es su limitado conjunto de estructuras de control. Este impide saltar hacia pasos arbitrariamente elegidos, o repetir sin limitaciones determinados grupos de pasos; en BlooP, esencialmente, la única estructura de control es el *bucle delimitado*: un conjunto de instrucciones que pueden ser ejecutadas una y otra vez, hasta llegar a una cantidad máxima y prestablecida de veces, llamada *límite superior*, o *techo*, del bucle. Si el techo es 300, el bucle puede ser ejecutado 0, 7 o 300 veces, pero no 301 veces.

Ahora bien, los valores exactos de todos los límites superiores, dentro de un programa, no necesitan ser fijados numéricamente por el programador: ciertamente, puede que no sean conocidos con anticipación. Por el contrario, cualquier límite superior puede ser determinado mediante cálculos que se realicen antes de que complete su bucle. Por ejemplo, si se quiere calcular el valor de 2^{3^n}, habría dos bucles. Primero, se evalúa 3^n, lo cual implica n multiplicaciones. Luego, se eleva 2 a esa potencia, lo cual implica 3^n multiplicaciones. Así, el límite superior del segundo bucle es el resultado del cálculo del primer bucle.

Lo que sigue es la manera en que esto se expresaría dentro de un programa BlooP:

```
DEFINIR PROCEDIMIENTO "DOS A LA TRES A LA" [N]:
BLOQUE 0: COMIENZO
        CELDA (0) ⇐ 1;
        N BUCLES:
        BLOQUE 1: COMIENZO
                  CELDA (0) ⇐ 3 x CELDA (0);
        BLOQUE 1: FIN;
        CELDA (1) ⇐ 1;
        CANTIDAD CELDA (0) DE BUCLES:
        BLOQUE 2: COMIENZO
                CELDA (1) ⇐ 2 x CELDA (1);
        BLOQUE 2: FIN;
        SALIDA ⇐ CELDA (1);
   BLOQUE 0: FIN.
```

Convenciones de BlooP

La capacidad de observar un algoritmo formulado en lenguaje de computadora, y comprender lo que expresa, es algo que constituye una adquisición especial. De todos modos, espero que este algoritmo sea lo suficientemente sencillo como para que tenga sentido sin necesidad de mayor examen. Se ha definido un *procedimiento*, que tiene un *parámetro de entrada*, N; su *salida* es el valor buscado.

Esta definición de procedimiento cuenta con lo que ha sido denominado *estructura de bloques*, lo cual quiere decir que ciertas porciones de aquél tienen que ser consideradas como si fuesen unidades, o *bloques*. Todas las instrucciones incluidas en un bloque son ejecutadas como si se tratase de una unidad. Cada bloque tiene un número (el del extremo es el BLOQUE 0), y está delimitado por un COMIENZO y un FIN. En nuestro ejemplo, los BLOQUES 1 y 2 contienen únicamente una instrucción cada uno, pero pronto veremos bloques más extensos. Una instrucción de BUCLE significa siempre que el bloque ubicado inmediatamente debajo ha de ser ejecutado repetidamente. Tal como se aprecia en el ejemplo, los bloques pueden estar incluidos unos dentro de otros.

La estrategia del algoritmo anterior es como ya se describió. Se comienza por tomar una variable auxiliar, llamada CELDA (0); se le incluye inicialmente 1, y luego, en un bucle, se la multiplica repetidamente por 3 exactamente N veces. A continuación, se hace la misma cosa con la CELDA (1): introducirle 1, multiplicarla por 2 exactamente CELDA (0) veces, y ahí cesar. Finalmente, se inscribe como SALIDA el valor de CELDA (1). Este es el valor que se devuelve al mundo exterior: el único comportamiento visible del procedimiento.

Haremos algunas puntualizaciones acerca de la notación. Digamos, primero, que la flecha orientada a la izquierda —' ⇐ '— significa:

> Evaluar la expresión ubicada a su derecha, luego tomar el resultado e inscribir a su izquierda, con ese valor, la CELDA (o SALIDA).

De esta manera, la interpretación de una orden como por ejemplo CELDA (1) ⇐ 3 x CELDA (1) consiste en triplicar el valor almacenado en CELDA (1). Se puede considerar cada CELDA como una palabra separada, dentro de la memoria de una computadora. La única diferencia entre una CELDA y una palabra propiamente dicha es que esta última sólo puede contener enteros dentro de un determinado límite finito, en tanto que nuestra CELDA está habilitada para contener cualquier número natural, por enorme que sea.

Todo procedimiento de BlooP a que se apele produce un valor: el valor de la variable llamada SALIDA. En el principio de la ejecución de todo procedimiento se da por supuesto, como opción subsidiaria, que el valor

de SALIDA es 0. Así, aun cuando el procedimiento no consiga generar ninguna SALIDA, ésta tendrá siempre un valor bien definido.

Instrucciones SI y bifurcación

Veamos ahora otro procedimiento, que nos mostrará algunos rasgos nuevos de BlooP, los cuales le aportan mayor generalidad. ¿Cómo hallar el valor de M — N, sabiendo solamente cómo sumar? El truco estriba en sumar diversos números a N, hasta encontrar el que produce M. Pero, ¿qué pasa si M es menor que N? ¿Si resulta que estamos tratando de restarle 5 a 2? En el dominio de los números naturales, no hay respuesta. Sin embargo, querríamos que nuestro procedimiento BlooP diese, de todos modos, una respuesta: digamos 0. Sigue, entonces, un procedimiento BlooP para la sustracción:

```
DEFINIR PROCEDIMIENTO "MENOS" [M, N]
BLOQUE 0: COMIENZO
        SI M < N, ENTONCES:
        CESAR BLOQUE 0
        A LO SUMO M + 1 BUCLES:
        BLOQUE 1: COMIENZO
                SI SALIDA + N = M, ENTONCES:
                INTERRUMPIR BUCLE 1;
                SALIDA ⇐ SALIDA + 1;
        BLOQUE 1: FIN;
  BLOQUE 0: FIN
```

Estamos haciendo uso, en este caso, del aspecto implícito de que SALIDA principia en 0. Si M es menor que N, la sustracción es entonces imposible, por lo cual simplemente brincamos en forma directa al fondo BLOQUE 0, y la respuesta es 0. Este es el significado de la línea CESAR BLOQUE 0. Pero si M no es menor que N, tenemos que hacer caso omiso de la instrucción CESAR y ejecutar la orden que sigue en la secuencia (aquí, una instrucción de BUCLE). Así es como funcionan siempre las intrucciones SI en BlooP.

En consecuencia, insertamos BUCLE 1, identificado de tal modo porque el bloque que nos indica repetirlo es el BLOQUE 1. Estamos tratando de sumar 0 a N, luego 1, 2, etc., hasta que encontremos un número que dé por resultado M. En ese punto, procederemos a INTERRUMPIR el bucle que estamos ejecutando, lo cual significa que brincamos hasta la instrucción inmediatamente siguiente al FIN que marca el fondo del bloque al que pertenece el bucle. En este caso, ese brinco nos lleva exactamente debajo de BLOQUE 1: FIN, es decir, a la última instrucción del algoritmo, y ahí terminamos. Ahora, SALIDA contiene la respuesta correcta.

Adviértase que hay dos instrucciones distintas para brincar hacia adelante: CESAR e INTERRUMPIR. La primera se aplica a los bloques, la segunda a los bucles. CESAR BLOQUE*n* significa brincar hasta la última línea de BLOQUE*n*, mientras que INTERRUMPIR BUCLE*n* significa brincar hasta exactamente *debajo* de la última línea de BLOQUE*n*. *Esta distinción interesa únicamente cuando se están ejecutando bucles y* se desea seguir haciéndolo pero sin el marco del bloque circundante; se dice entonces CESAR, y así sucederá.

Tómese nota también de que aquí el límite superior es precedido por la expresión A LO SUMO, la cual es una advertencia de que el bucle puede ser interrumpido antes de ser alcanzado el límite superior.

Articulación en bloques automática

Explicaremos ahora otros dos aspectos, ambos sumamente importantes, de BlooP. El primero consiste en que, una vez *definido* un procedimiento, se puede apelar a él dentro de definiciones posteriores de procedimientos. La consecuencia es que, *una vez que se ha definido una operación en un procedimiento, es considerada igualmente simple que un paso primordial.* Así, BlooP imprime articulaciones en bloques automáticas. Esto se podría comparar al modo en que un avezado patinador sobre hielo adquiere nuevos movimientos: no mediante su definición bajo la forma de largas secuencias de acciones musculares primordiales, sino en función de movimientos ya aprendidos, los cuales, a su vez, fueron aprendidos como componentes de movimientos aprendidos con anterioridad, etc., de modo tal que la inclusividad sucesiva, o emblocamiento, puede reconocer muchas capas previas hasta llegar al punto donde es posible encontrar las acciones musculares primordiales. De la misma forma, el repertorio de los programas BlooP crece, como el repertorio de las habilidades del patinador, a través de bucles y de delimitaciones.

Verificaciones BlooP

El otro aspecto de los mencionados es que ciertos procedimientos de BlooP pueden tener SI o NO como salida, en lugar de un valor entero. Tales procedimientos son *verificaciones*, antes que *funciones*. Para indicar la diferencia, el nombre de la verificación deberá estar entre signos de interrogación. Además, en una verificación, la opción subsidiaria de SALIDA no es 0, por supuesto, sino NO.

Veamos un ejemplo de estos dos aspectos de BlooP, en un algoritmo que verifica su fundamentación de la primidad:

DEFINIR PROCEDIMIENTO "¿PRIMO?" [N]:

```
BLOQUE 0: COMIENZO
     SI N = 0, ENTONCES:
     CESAR BLOQUE 0;
     CELDA(0) ⇐ 2;
     A LO SUMO MENOS [N, 2] BUCLES:
     BLOQUE 1: COMIENZO
               SI RESIDUO [N, CELDA (0)] = 0, ENTONCES:
               CESAR BLOQUE 0;
               CELDA (0) ⇐ CELDA (0) + 1;
     BLOQUE 1: FIN;
     SALIDA ⇐ SI;
BLOQUE 0: FIN.
```

Adviértase que a los dos procedimientos que hay en el interior del algoritmo los he denominado MENOS y RESIDUO. (Se supone que este último ha sido definido con anterioridad; el lector puede encargarse de definirlo.) Ahora bien, esta verificación actúa mediante la puesta a prueba, uno por uno, de los factores potenciales de N, principiando en 2 y subiendo hasta el máximo de N — 1. En el caso de que cualquiera de ellos divida exactamente a N (es decir, que dé el residuo 0), entonces brincamos hasta el fondo, y como SALIDA, en este estadio, conserva su opción subsidiaria, la respuesta es NO. Unicamente en el caso de que N no tenga divisores exactos BUCLE 1 se mantendrá en su totalidad; si es así, emergeremos lisa y llanamente en la instrucción SALIDA ⇐ SI, la cual será ejecutada, y con ello el procedimiento habrá llegado a su fin.

Los programas BlooP contienen series de procedimientos

Ya hemos visto cómo se definen los procedimientos en BlooP; sin embargo, la definición de un procedimiento no es más que una parte de un programa. Un *programa* consiste en una *serie de definiciones de procedimientos* (cada una de las cuales apela sólo a los procedimientos definidos previamente), seguida, si se desea, por una o más *llamadas* a los procedimientos definidos. Así, una muestra de un programa BlooP completo la daría la definición del procedimiento DOS A LA TRES A LA, seguido por la *apelación*, o *llamada*

DOS A LA TRES A LA [2]

la cual produce la respuesta 512.

Si se cuenta exclusivamente con una serie de definiciones de procedimiento, jamás se conseguirá ejecutar nada: éstas se limitan a esperar algún

llamado, con valores numéricos específicos, para ponerse en movimiento. Es algo así como un aparato de picar carne, a la espera de *carne* para picar, o más bien de una *serie* de picacarnes reunidos, cada uno de los cuales es surtido por el anterior . . . Esta imagen tal vez no sea muy exquisita, pero es muy *ilustrativa* de un rasgo sumamente importante de la elaboración de los programas BlooP, al cual llamaremos "programa con llamado menor", noción que es ilustrada en la figura 72.

Ahora bien, BlooP es nuestro lenguaje para la definición de cálculos de finalización predictible. El nombre uniforme de las *funciones* que son procesables según las normas de BlooP es *funciones recursivas primitivas*, y el de las *propiedades* que pueden ser detectadas mediante las verificaciones BlooP es *predicados recursivos primitivos*.

Así, la función 2^{3^n} es una función recursiva primitiva; y el enunciado "n es un número primo" es un predicado recursivo primitivo.

Está claro, intuitivamente, que la propiedad Goldbach es de tipo recursivo primitivo, y que llevar ello a un plano enteramente explícito es tarea aquí de una definición de procedimiento en los marcos de BlooP, la cual mostrará cómo verificar su presencia o ausencia:

```
DEFINIR PROCEDIMIENTO "¿GOLDBACH?" [N]:
BLOQUE 0: COMIENZO
     CELDA (0) ⇐ 2:
     A LO SUMO N BUCLES:
     BLOQUE 1: COMIENZO
               SI {¿PRIMO? [CELDA (0)]
               Y ¿PRIMO? [MENOS [N, CELDA (0)]]}
                 ENTONCES:
               BLOQUE 2: COMIENZO
                         SALIDA ⇐ SI;
                         CESAR BLOQUE 0;
               BLOQUE 2: FIN
               CELDA(0) ⇐ + 1;
     BLOQUE 1: FIN;
BLOQUE 0: FIN.
```

Como de costumbre, damos por supuesto NO hasta que probemos que SI, y llevamos adelante una búsqueda, basada en la fuerza bruta, entre pares de números a los cuales sumamos hasta obtener N. Si ambos son primos, hacemos cesar el bloque exterior; en caso contrario, nos limitamos a volver atrás e intentar de nuevo hasta agotar todas las posibilidades.

(Advertencia: El hecho de que la propiedad Goldbach sea recursiva primitiva no convierte en simple la pregunta: "¿Todos los números tienen la propiedad Goldbach?" ¡Lejos de ello!)

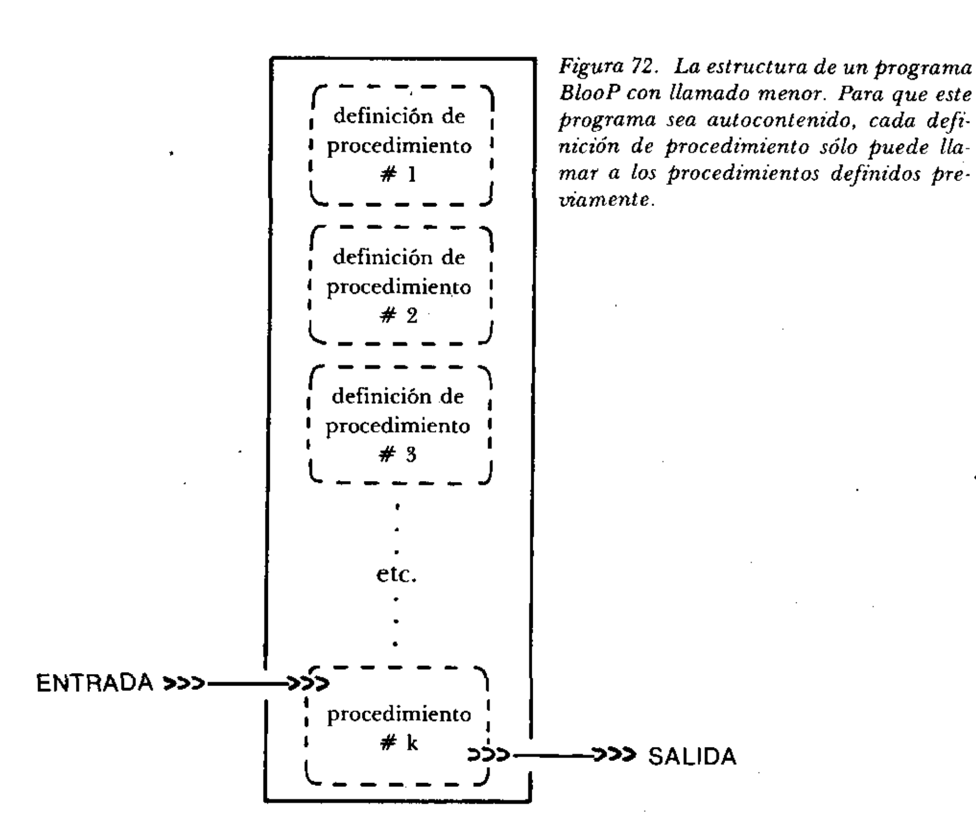


Figura 72. La estructura de un programa BlooP con llamado menor. Para que este programa sea autocontenido, cada definición de procedimiento sólo puede llamar a los procedimientos definidos previamente.

Ejercicios sugeridos

¿Se puede formular un procedimiento BlooP similar, a fin de verificar la presencia o ausencia de la propiedad Tortuga (o de la propiedad Aquiles)? Si el lector estima que sí, hágalo. Si estima que no, ¿será porque desconoce los límites superiores, o por la existencia de algún obstáculo fundamental que impida expresar un algoritmo semejante en BlooP? ¿Y qué diremos frente a las mismas preguntas, aplicadas a la maravillosidad definida en el Diálogo?

Más abajo incluyo una lista de funciones y propiedades, y el lector deberá dedicarse a determinar si, a su parecer, son recursivas primitivas (programables en BlooP) o no. Esto significa que debe analizar cuidadosamente qué clase de operaciones involucrarán los cálculos requeridos y si pueden establecerse techos para todos los bucles abarcados.

FACTORIAL [N] = N! (el factorial de N)
  (por ejemplo, FACTORIAL [4] = 24)
RESIDUO [M, N] = el residuo de dividir M por N
  (por ejemplo, RESIDUO [24, 7] = 3)
DIGITO DE PI [N] = el dígito N de π, luego del punto decimal.

(por ejemplo, DIGITO DE PI [1] = 1,
DIGITO DE PI [2] = 4,
DIGITO DE PI [1 000 000] = 1)

FIBO [N] = el número de Fibonacci N
(por ejemplo, FIBO [9] = 34)

PRIMO SUBSIGUIENTE [N] = el primo más pequeño a continuación inmediata de N
(por ejemplo, PRIMO SUBSIGUIENTE [33] = 37)

PERFECTO [N] = el número "perfecto" N (un número como 28, cuyos divisores, sumados, dan 28: 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14)
(por ejemplo, PERFECTO [2] = 28)

¿PRIMO? [N] = SI, si N es primo; NO, en caso contrario.

¿PERFECTO? [N] = SI, si N es perfecto; NO, en caso contrario.

¿TRIVIAL? [A,B,C,N] = SI, si $A^N + B^N = C^N$ es correcto; NO, en caso contrario.
(por ejemplo, ¿TRIVIAL? [3,4,5,2] = SI,
¿TRIVIAL? [3,4,5,3] = NO)

¿PIERRE? [A,B,C] = SI, si $A^N + B^N = C^N$ puede ser satisfecho por un valor de N mayor que 1; NO, en caso contrario.
(por ejemplo, ¿PIERRE? [3,4,5] = SI,
¿PIERRE? [1,2,3] = NO)

¿FERMAT? [N] = SI, si $A^N + B^N = C^N$ puede ser satisfecho por valores positivos de A, B, C; NO, en caso contrario.
(por ejemplo, ¿FERMAT? [2] = SI)

¿PAR TORTUGA? [M, N] = SI, si tanto M como M + N son primos; NO, en caso contrario.
(por ejemplo, PAR TORTUGA [5, 1742] = SI,
PAR TORTUGA [5, 100] = NO)

¿TORTUGA? [N] = SI, si N es la diferencia entre dos primos; NO, en caso contrario.
(por ejemplo, TORTUGA [1742] = SI,
TORTUGA [7] = NO)

¿MIU BIEN FORMADA? [N] = SI, si N, considerada como una cadena del sistema MIU, está bien formada; NO, en caso contrario.
(por ejemplo, ¿MIU BIEN FORMADA? [310] = SI,
¿MIU BIEN FORMADA? [415] = NO)

¿PAR DE PRUEBA MIU? [M, N] = SI, si M, considerada como una cadena del sistema MIU, es una derivación de N, considerada como una cadena del sistema MIU; NO, en caso contrario.
(por ejemplo, ¿PAR DE PRUEBA MIU? [3 1 3 1 1 3 1 1 1 1 3 0 1, 3 0 1] = SI,
¿PAR DE PRUEBA MIU? [3 1 1 1 3 0, 3 0] = NO)

¿TEOREMA MIU? [N] = SI, si N, considerada como una cadena del sistema MIU, es un teorema; NO, en caso contrario.
(por ejemplo, ¿TEOREMA MIU? [3 1 1] = SI,

¿TEOREMA MIU? [3 0] = NO,
¿TEOREMA MIU? [7 0 1] = NO)

¿TEOREMA TNT? [N] = SI, si N, considerada como una cadena TNT, es un teorema.

(por ejemplo, ¿TEOREMA TNT? [666111666] = SI,
¿TEOREMA TNT? [123666111666] = NO,
¿TEOREMA TNT? [7014] = NO)

¿FALSA? [N] = SI, si N, considerada como una cadena TNT, es un enunciado falso de teoría de los números; NO, en caso contrario.

(por ejemplo, ¿FALSA? [666111666] = NO,
¿FALSA? [223666111666] = SI,
¿FALSA? [7014] = NO)

Los siete últimos ejemplos tienen particular importancia en relación con nuestras exploraciones metamatemáticas venideras, de modo que merecen un atento examen.

Expresabilidad y representabilidad

Pero antes de plantearnos algunas interesantes cuestiones acerca de BlooP y de ser conducidos a su pariente, FlooP, retornemos a los motivos que tuvimos para presentar a BlooP en primer lugar, y conectarlo con TNT. Dije más atrás que la masa crítica para que el método de Gödel pueda aplicarse a un sistema formal se alcanza cuando todas las nociones recursivas primitivas son representables dentro de tal sistema. ¿Qué significa ello, exactamente? En primer término, debemos distinguir entre la noción de representabilidad y la de expresabilidad. *Expresar* un predicado es un simple problema de traducir lo idiomático a un formalismo estricto; no tiene nada que ver con la teoremidad. *Representar* un predicado, en cambio, es algo mucho más arduo; esto significa que

(1) Todos los casos verdaderos del predicado son teoremas;
(2) Todos los casos falsos son no teoremas.

Llamo "caso" a la cadena producida cuando todas las variables libres son sustituidas por numerales. Por ejemplo, el predicado $m + n = k$ está representado en el sistema pq, porque cada caso verdadero del predicado es un teorema, y cada caso falso es un no teorema. Así, cualquier suma específica, sea verdadera o falsa, se traduce a *cadena decidible* del sistema pq. Sin embargo, el sistema pq es incapaz de expresar —mucho menos representar— cualquier otra propiedad de los números naturales. Por consiguiente, sería un candidato muy flojo en una competencia de sistemas que hagan teoría de los números.

Pero TNT, por su parte, tiene la virtud de poder *expresar* prácticamente cualquier predicado teórico-numérico; por ejemplo, es sencillo formular una cadena TNT que exprese el predicado "b tiene la propiedad Tortuga". Así pues, desde el punto de vista del poder expresivo, no necesitamos más que TNT.

Sin embargo, la pregunta "¿qué propiedades están *representadas* en TNT?" equivale precisamente a preguntar: "¿Cuán poderoso sistema axiomático es TNT?" ¿Todo posible predicado está representado en TNT? Si es así, TNT puede entonces responder a cualquier interrogación de teoría de los números; es completo.

Los predicados recursivos primitivos están representados en TNT

Ahora bien, pese a que la completitud resultará ser una quimera, TNT es completo, al menos con respecto a los predicados *recursivos primitivos*. En otras palabras, cualquier enunciado de teoría de los números cuya verdad o falsedad pueda ser decidida por una computadora, dentro de un lapso predictible, también es decidible en TNT. O, para hacer una reafirmación final de la misma cosa:

> Si es posible formular una verificación BlooP para determinada propiedad de los números naturales, entonces esa propiedad está representada en TNT.

¿Hay funciones que no son recursivas primitivas?

Las clases de propiedades que pueden ser detectadas mediante las verificaciones BlooP son ampliamente variadas, incluyendo la determinación de si un número es primo o perfecto, si cuenta con la propiedad Goldbach, si es una potencia de 2, etc., etc. No sería absurdo preguntarse si *todas* las propiedades de los números no podrán ser detectadas mediante el programa BlooP adecuado. El hecho de que, hasta el momento actual, no tengamos forma de verificar si un número es maravilloso o no no tiene por qué preocuparnos demasiado, pues ello puede explicarse simplemente por nuestra ignorancia acerca de la maravillosidad, lo cual podría resolverse a través de indagaciones más profundas que permitieran establecer una fórmula universal que determine el límite superior del bucle pertinente. En tal caso, una verificación BlooP de la maravillosidad podría ser formulada de inmediato, y lo mismo puede decirse de la propiedad Tortuga.

Luego, la pregunta, realmente, es: "¿Pueden establecerse siempre límites superiores para la extensión de los cálculos, o bien es inherente al sistema de los números naturales cierto tipo de mescolanza confusa que, en ocasiones, impide predecir la extensión de los cálculos?" Lo sorpren-

dente es que se trata de lo segundo, e inmediatamente veremos por qué es así. Es la clase de cosa que debe haber sacado de sus cabales a Pitágoras, que fue quien primero demostró que la raíz cuadrada de 2 es irracional. En nuestra exposición, utilizaremos el célebre *método diagonal*, descubierto por Georg Cantor, el fundador de la teoría de conjuntos.

Pool B, números índices y Programas Azules

Comenzaremos por imaginarnos una extraña noción: la combinación* de todos los programas BlooP posibles. Obviamente, este pool —"Pool B"— es infinito. Necesitamos contar con un subpool de Pool B, obtenido gracias a tres operaciones sucesivas de filtrado. El primer filtro retendrá exclusivamente los programas *con llamado menor*. De este subpool eliminamos luego todas las *verificaciones*, dejando sólo las *funciones*. (A propósito: en los programas con llamado menor el *último* procedimiento de la serie determina si el programa, en su conjunto, es considerado una verificación o una función.) El tercer filtro retendrá únicamente las *funciones que tienen exactamente un parámetro de entrada*. (Con referencia, otra vez, al procedimiento final de la serie.) ¿Qué nos queda?

> Un pool completo de todos los programas BlooP con llamado menor que calculan funciones de exactamente un parámetro de entrada.

Llamaremos *Programa Azul* a este género especial de programas BlooP.

Lo que querríamos hacer ahora es asignar un *número índice* inequívoco a cada Programa Azul. ¿Cómo conseguirlo? El modo más sencillo —es el que emplearemos— consiste en enumerarlos por orden de extensión: el Programa Azul más corto posible será el # 1, el que le siga en brevedad será el # 2, y así siguiendo. Por supuesto, habrá muchos programas de longitud empatada; para romper el empate, utilizaremos el orden alfabético. Aquí, "orden alfabético" es tomado en sentido amplio, pues incluye todos los signos especiales de BlooP, en orden arbitrario, de la manera siguiente:

A B C D E F G H I J K L M N
O P Q R S T U V W X Y Z + x
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ⇐ = < >.
( ) [ ] { } — ? : ; , .

* "Pool", en inglés, usada en este caso con el sentido de *fusión, reunión, combinación*. Esta palabra, junto con "cartel" y "holding", entre otras, designa formas específicas de vinculación expansiva de intereses comerciales. La explicación económica las emplea sin traducir, en los ámbitos de habla hispana. Usaremos "pool" en adelante, no sólo en razón de este antecedente, sino también para respetar la intención del autor, quien especula con la simetría invertida que existe entre "pool" y "loop"; esta última es vertida usualmente como "bucle" en los ámbitos de habla hispana de la ciencia de las computadoras. [T.]

¡al final, un humilde espacio en blanco! En total, cincuenta y seis signos. Por razones de conveniencia, podemos ubicar todos los Programas Azules de longitud 1 en un Volumen 1, los programas de dos signos en el Volumen 2, etc. No hace falta decir que los primeros volúmenes estarán totalmente vacíos, mientras que los posteriores tendrán muchas, muchísimas entradas (a pesar de que cada volumen podrá contener sólo una cantidad finita). El indiscutible Programa Azul inicial sería éste:

```
DEFINIR PROCEDIMIENTO "A" [B]:
BLOQUE 0: COMIENZO
BLOQUE 0: FIN.
```

Este picacarne más bien bobo nos devuelve un valor de 0, cualquiera que fuere su entrada. Esto sucede en el Volumen 56, puesto que hay allí 56 signos (contados los espacios en blanco, como también los blancos que separan entre sí las líneas sucesivas).

Poco más allá del Volumen 56, los volúmenes alcanzarán notable corpulencia porque, lisa y llanamente, hay millones y millones de formas de combinar símbolos que construyan Programas BlooP Azules. Pero no nos preocupemos, pues no estamos intentando la enunciación de este catálogo infinito. Sólo nos interesa que, en forma abstracta, quede bien definido, y que cada Programa Azul, en consecuencia, tenga un único y preciso número índice. Esta es la idea central.

Designaremos la función calculada por el Programa Azul número k de la siguiente forma:

Programazul { # k} [N]

Aquí, k es el número índice del programa, y N es el único parámetro de entrada. Por ejemplo, el Programa Azul # 12 podría retornar un valor que duplique el de su entrada:

Programazul {# 12} [N] = 2 x N

El significado de la ecuación anterior es que el *programa* identificado a la izquierda produciría el mismo valor que calcularía un *ser humano*, basándose en las expresiones algebraicas comunes que se han inscripto a la derecha. Para dar otro ejemplo: tal vez el Programa Azul # 5 000 calcule el cubo de su parámetro de entrada:

Programazul { # 5 000} [N] = N^3

El método diagonal

Bien, ahora "ajustaremos la tuerca": el método diagonal de Cantor. Tomaremos nuestro catálogo de Programas Azules y lo utilizaremos para de-

finir una nueva función de una variable —*Diagazul* [N]—, la cual no aparecerá en la lista (porque está impesa en tipo itálico). Empero, *Diagazul* será indudablemente una función bien definida y calculable de una variante, por lo cual deberemos concluir que existen funciones de este tipo, las cuales, simplemente, no son programables en BlooP.

He aquí la definición de *Diagazul* [N]:

Ecuación (1) . . . *Diagazul* [N] = 1 + Programazul {#N} [N]

La estrategia seguida es: alimentar a cada picacarne con su propio número índice; luego, sumar 1 a la salida. Para ilustrarlo, busquemos *Diagazul* [12]. Ya vimos que el Programazul {#12} es la función 2N; en consecuencia, *Diagazul* [12] debe tener el valor 1 + 2 × 12, o 25. De igual modo, *Diagazul* [5 000] tendría el valor 125 000 000 001, puesto que es el cubo de 5 000 más 1. De manera análoga, se puede hallar el *Diagazul* del desarrollo que se desee en particular.

Lo peculiar de *Diagazul* [N] es que no está representado en el catálogo de Programas Azules. No puede estarlo, por lo siguiente: para ser un Programa Azul, tendría que tener un número índice: por ejemplo, sería el programa Azul # *X*. Esta suposición se expresa mediante la formulación

Ecuación (2) . . . *Diagazul* [N] = Programazul {# *X*} [N]

Pero hay una incoherencia entre las ecuaciones (1) y (2). Se hace evidente en el momento en que tratamos de calcular el valor de *Diagazul* [*X*], pues podemos efectuarlo haciendo que N tome el valor de *X* en cualquiera de las dos ecuaciones. Si sustituimos dentro de la ecuación (1), tenemos:

Diagazul [*X*] = 1 + Programazul { # *X*} [*X*]

Pero si, en cambio, sustituimos en la ecuación (2), tenemos:

Diagazul [*X*] = Programazul { #*X*} [*X*]

Ahora bien, *Diagazul* [*X*] no puede ser igual a un número y al mismo tiempo el número subsiguiente a ese número. Pero eso es lo que dice la ecuación, de modo que deberemos retroceder y suprimir alguna suposición que dé base a la incoherencia. El único candidato a la supresión es el supuesto expresado por la ecuación (2): el de que la función *Diagazul* [N] puede ser codificada como un programa BlooP Azul. Y ésta es la prueba de que *Diagazul tiene su asiento fuera del reino de las funciones recursivas primitivas*. De esta manera, hemos cumplido con nuestro propósito de destruir la entrañable pero ingenua noción de Aquiles, según la cual toda función teórico-numérica ha de ser calculable en el marco de un número predecible de pasos.

Hay algunos aspectos sutiles para desarrollar. Se podría analizar éste, por ejemplo: el número de pasos comprendidos por el cálculo de *Diagazul* [N], para cada valor *específico* de N, es predictible . . . pero los diferentes métodos de predicción no pueden ser reunidos en su totalidad dentro de una fórmula *genérica* que prediga la extensión del cálculo de *Diagazul* [N]. Esta es una "trama infinita", asociada a la noción de la Tortuga de "coincidencias infinitas", y también a la ω-incompletitud. Pero no rastrearemos en detalle tales asociaciones.

El original argumento diagonal de Cantor

¿Por qué se lo llama argumento *diagonal*? La terminología proviene de la fundamentación diagonal original de Cantor, sobre la cual se han basado (también nosotros) muchas otras exposiciones. Explicar la argumentación diagonal original de Cantor nos sacaría un poco de tema, pero vale la pena hacerlo. También Cantor se interesó por mostrar que determinado ítem no estaba incluido en cierta lista. Específicamente, lo que Cantor quiso mostrar fue que si se hiciera un "directorio" de números reales inevitablemente dejaría fuera algunos números reales: en consecuencia, la noción de directorio *completo* de números reales es una contradicción en los términos.

Se debe entender que esto abarca no sólo los directorios de dimensión finita, sino también los de dimensión *infinita*. Se trata de algo mucho más profundo que enunciar: "el número de los reales es infinito, de modo que, por supuesto, no pueden ser enumerados en un directorio finito". La esencia de la conclusión de Cantor es que hay (por lo menos) dos *tipos* distintos de infinito: uno describe cuántas entradas puede haber en un directorio o listado infinitos, y el otro dice cuántos números reales hay (es decir, cuántos puntos hay sobre una línea, o semirrecta): y este último es "más grande", en el sentido de que los números reales no pueden ser comprimidos dentro de un listado cuya longitud es descripta por el primer tipo de infinito. Veamos cómo la argumentación de Cantor involucra la noción de diagonal, en un sentido literal.

Consideremos nada más que los números reales entre 0 y 1. Supongamos, en beneficio de la argumentación, que se *podría* aportar una lista infinita donde cada entero positivo N se equipare a un número real $r(N)$, ubicado entre 0 y 1, y donde todos los números reales, entre 0 y 1, aparezcan. Como los números reales están integrados por infinitos decimales, podemos imaginar que el comienzo del listado es así:

$r(1)$: .1 4 1 5 9 2 6 5 3 . . . .
$r(2)$: .3 3 3 3 3 3 3 3 3 . . . .
$r(3)$: .7 1 8 2 8 1 8 2 8 . . . .
$r(4)$: .4 1 4 2 1 3 5 6 2 . . . .
$r(5)$: .5 0 0 0 0 0 0 0 0 . . . .

Los dígitos alineados en diagonal aparecen en letra destacada: 1, 3, 8, 2, 0. Usaremos ahora esta diagonal de dígitos para formar un número real específico, *d*, ubicado entre 0 y 1, el cual, como veremos, no está en la lista. Para obtener *d*, se toman los dígitos diagonales en su orden, y se cambia cada uno de ellos por algún otro dígito. Haciendo preceder esta secuencia de dígitos por un punto decimal, se tiene *d*. Por cierto, hay muchas formas de cambiar un dígito por otro y, consecuentemente, muchos *d* diferentes. Supongamos, por ejemplo, que *sustraemos 1 a los dígitos diagonales* (ajustándonos a la convención de que 0 menos 1 es nueve). Nuestro número *d* será, entonces:

.0 2 7 1 9 . . .

Ahora bien, a causa del procedimiento seguido,

el primer dígito de *d* no es el mismo que el primer dígito de *r*(1);
el segundo dígito de *d* no es el mismo que el segundo dígito de *r*(2);
el tercer dígito de *d* no es el mismo que el tercer dígito de *r*(3);

. . . y así siguiendo.

De allí que,

d es diferente de *r*(1);
d es diferente de *r*(2);
d es diferente de *r*(3);

. . . y así siguiendo.

En otras palabras, ¡*d* no está en la lista!

¿Qué demuestra una argumentación diagonal?

Ahora aparece la diferencia crucial entre la prueba de Cantor y la nuestra, en cuanto a qué supuesto anterior cabe cuestionar. En la argumentación de Cantor, el supuesto atacado es el de que puede elaborarse una tabla como ésa. En consecuencia, la conclusión garantizada por la construcción de *d* es que, a fin de cuentas, no puede elaborarse ninguna tabla exhaustiva de números reales . . . lo cual equivale a decir que el conjunto de los enteros no es lo suficientemente grande como para servir de índice al conjunto de los reales. En cambio, en nuestra prueba, sabemos que el directorio de los programas BlooP Azules *puede* ser elaborado: el conjunto de los enteros *es* lo suficientemente grande como para servir de índice al conjunto de los programas BlooP Azules. Entonces, debemos

retroceder y anular alguna idea más cuestionable, de entre las que hayamos utilizado. Y esa idea es la de que *Diagazul* [*N*] puede ser calculada por algún programa de BlooP. He aquí una sutil diferencia en el empleo del método diagonal.

Esto puede hacerse más claro si lo aplicamos a la ya mencionada "Lista Completa de los Grandes Matemáticos", vista en el Diálogo: será un ejemplo más concreto. La diagonal dice allí "Dboups"; si efectuamos la sustracción indicada, obtendremos "Cantor".* Dos conclusiones son posibles: si se tiene la convicción férrea de que la lista es *completa*, la conclusión es que Cantor no es un Gran Matemático, pues su nombre difiere de todos los incluidos en la lista; por el contrario, si se tiene la convicción férrea de que Cantor *es* un Gran Matemático, ¡se debe concluir que la "Lista Completa de los Grandes Matemáticos" es incompleta, porque el nombre de Cantor no figura en ella! (¡Ay de aquellos que estén férreamente convencidos de ambas cosas!) El primer caso corresponde a nuestra demostración de que *Diagazul* [*N*] no es recursiva primitiva; el segundo, a la demostración de Cantor de que la lista de los reales es incompleta.

La demostración de Cantor emplea una diagonal en el sentido literal de la palabra. Otras demostraciones "diagonales" están basadas en una noción más genérica, abstraída del sentido geométrico del término. La esencia del método diagonal reside en el hecho de que usa un entero de dos maneras diferentes, o bien, podría decirse, *en dos diferentes niveles*, y que, gracias a ello, puede construirse un ítem que está fuera de cierta lista predeterminada. En una oportunidad, el entero sirve como índice *vertical*; en la otra, como índice *horizontal*. En la explicación de Cantor esto se ve muy claro. En lo que se refiere a la función *Diagazul* [*N*], ésta involucra la utilización de un entero en dos niveles diferentes: primero, como número índice de un Programa Azul; segundo, como parámetro de entrada.

La capciosa repetibilidad de la argumentación diagonal

Al principio, la argumentación de Cantor puede parecer no del todo convincente. ¿No hay alguna forma de refutarla? Quizá continuando el número diagonalmente construido *d* podría obtenerse una lista exhaustiva. Si se pone a prueba tal idea, se verá que no es de ninguna utilidad extender el número *d*, pues ni bien se le asigna un lugar específico en la tabla el método diagonal pasa a ser aplicable a la nueva tabla, con el resultado de la construcción de un nuevo número *d'*, ausente de la nueva tabla. Por más veces que se repita la operación de construir un número mediante el método diagonal, y de continuarlo para elaborar una tabla "más completa", siempre se morderá el ineludible anzuelo del método de Cantor. Se

* Teniendo en cuenta que en el alfabeto inglés no hay *ñ*. [T.]

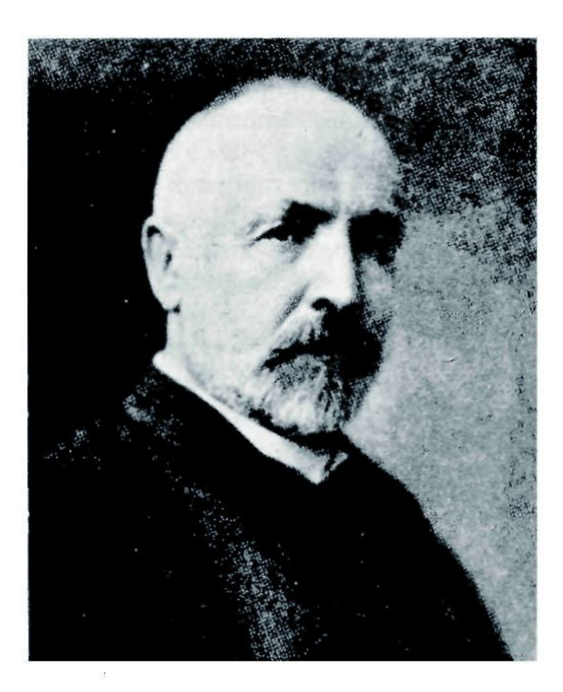


Figura 73. Georg Cantor.

podría, inclusive, tratar de confeccionar una tabla de reales que trate de adelantarse al método diagonal de Cantor, y de ser más lista, de alguna manera, que todos los trucos de éste, incluida su insidiosa repetibilidad. Sería un ejercicio interesante, pero si se lo aborda, se verá que por muchos giros y piruetas que se describan para escapar al "anzuelo" de Cantor, éste terminará pescando su presa. Se puede decir que cualquier autoproclamada "tabla de todos los reales" es cogida en sus propias redes.

La repetibilidad del método diagonal de Cantor es similar a la repetibilidad del diabólico método de la Tortuga, destinado a destruir, uno a uno, todos los fonógrafos del Cangrejo, en la medida en que éstos iban teniendo cada vez más alta fidelidad e iban siendo —por lo menos, eso esperaba el Cangrejo— cada vez más "Perfectos". Este método implica la obtención, para cada fonógrafo, de un sonido específico que ese fonógrafo no puede reproducir. No es una coincidencia que el truco de Cantor y el truco de la Tortuga compartan esta curiosa repetibilidad; ciertamente, el *Contracrostipunto* podría muy bien haber sido denominado "Cantorcrostipunto". Por otra parte, tal como la Tortuga se lo insinúa sutilmente al inocente Aquiles, los acontecimientos del *Contracrostipunto* son una paráfrasis del desarrollo seguido por Gödel para demostrar su Teorema de la Incompletitud; se sigue de ello que el desarrollo de Gödel es sumamente semejante a una construcción diagonal. Esto se hará del todo manifiesto en los dos siguientes capítulos.

De BlooP a FlooP

Hemos ya definido la clase de las funciones recursivas primitivas y de las propiedades recursivas primitivas de los números naturales, por medio de programas formulados en lenguaje BlooP. Hemos mostrado, también, que BlooP no captura todas las funciones de los números naturales que podemos definir mediante palabras. Inclusive, hemos construido una función "imBlooPable", *Diagazul* [*N*], a través del método diagonal de Cantor. ¿Qué es lo que pasa en BlooP, que *Diagazul* es irrepresentable en él? ¿Cómo se podría mejorar BlooP para que *Diagazul* sea representable?

El rasgo distintivo de BlooP es la limitación de sus bucles. ¿Qué ocurre si abandonamos ese requerimiento con respecto a los bucles, e inventamos un segundo lenguaje, llamado "FlooP" ('F' por "free"*)? FlooP será idéntico a BlooP excepto en un aspecto: podemos tener bucles sin techo al mismo tiempo que bucles con techo (pese a que la única razón por la cual se incluiría un techo, al formular una instrucción de bucle en FlooP, sería la persecución de elegancia). Estos nuevos bucles serán denominados BUCLES MU, siguiendo la convención de la lógica matemática, donde las búsquedas "libres" (búsquedas sin límites) son indicadas por un símbolo llamado "operador μ" (operador mu). Así, las instrucciones de bucle en FlooP pueden ser como ésta:

```
BUCLE MU:
BLOQUE n: COMIENZO
        .
        .
        .
BLOQUE n: FIN;
```

Esta característica nos permitirá formular verificaciones en FlooP de propiedades tales como la maravillosidad o la propiedad Tortuga: verificaciones que no tenemos cómo programar en BlooP a causa de la carencia potencial de límites definidos por parte de las búsquedas abarcadas. Dejaré que los lectores interesados formulen una verificación FlooP de la maravillosidad, dentro del siguiente marco:

(1) Si su entrada, N, es maravilloso, el programa se detiene y da la respuesta SI.
(2) Si N es inmaravilloso, pero origina un ciclo cerrado distinto de 1-4-2-1-4-2-1- . . ., el programa se detiene y da la respuesta NO.
(3) Si N es inmaravilloso, y origina una "progresión interminablemente creciente", el programa no se detiene jamás. Es la manera FlooP de responder a través de no responder. La no res-

* *Libre*; la "B" de "BlooP" surgía de "bound", *límite*. [T.]

puesta FlooP presenta un curioso parecido con la no respuesta "MU" de Joshu.

La paradoja del caso 3 es que SALIDA tiene siempre el valor NO, pero es siempre inaccesible porque el programa sigue girando. Esta enojosa alternativa tercera es el precio que nos cuesta el derecho de formular bucles libres. En todos los programas FlooP que incorporen la opción BUCLE MU, siempre existirá la posibilidad teórica de la inacababilidad. Por supuesto, habrá muchos programas FlooP con terminación efectiva, cualquiera que sea el valor de entrada. Por ejemplo, como ya dije, muchas personas que han estudiado la maravillosidad presumen que un programa FlooP del tipo sugerido más atrás siempre terminará, y además con la respuesta SI en todos los casos.

Programas FlooP con finalización y sin finalización

Sería muy conveniente poder separar los procedimientos FlooP en dos clases: *finalizables* y *no finalizables*. Un *finalizable* terminará por detenerse, cualquiera que fuere su entrada, a pesar de la "MUidad" de sus bucles. Un *no finalizable* seguirá marchando por siempre, para *cuando menos una* opción de entrada. Si estuviéramos en condiciones, siempre, de indicar a qué clase pertenece cada programa FlooP, mediante alguna suerte de complicado análisis, se producirían ciertas repercusiones notables (según veremos a la brevedad). Obviamente, la operación de determinación de clase tendría que ser, por su parte, una operación finalizable; de lo contrario, nada habríamos ganado . . .

El recurso de Turing

Nos surge la idea de que podríamos encargar el citado análisis a un procedimiento BlooP. ¡Pero los procedimientos BlooP admiten exclusivamente entradas numéricas, no programas! Aun así, podríamos eludir esta restricción . . . ¡codificando programas en números! Este astuto ardid no es más que otra de las tantas manifestaciones de la numeración Gödel. Asignemos a los cincuenta y seis signos del alfabeto FlooP los "codones" 901, 902, . . . 956, respectivamente. De modo que ahora, todo programa FlooP cuenta con un muy extenso número Gödel. Por ejemplo, la función BlooP más breve (que también es un programa FlooP con terminación) era la siguiente:

```
DEFINIR PROCEDIMIENTO "A" [B]:
BLOQUE 0: COMIENZO
BLOQUE 0: FIN.
```

Sus números Gödel serían los que mostramos parcialmente a continuación:

904,905,906,909,914,909,918,. 906,909,914,955,
D E F I N I R F I N .

Ahora bien, nuestro proyecto consistiría en formular una verificación BlooP denominada ¿FINALIZABLE?, la cual diga SI cuando su número de entrada codifica un programa FlooP con terminación, y NO en caso contrario. De esta forma, podríamos transferirle la tarea a una máquina y, con suerte, distinguir entre finalizables y no finalizables. Sin embargo, una ingeniosa argumentación aportada por Alan Turing muestra que *ningún* programa BlooP puede efectuar tal distinción de modo infalible. Su invención es realmente muy similar a la de Gödel, y en consecuencia se vincula muy estrechamente con la invención diagonal de Cantor. No lo desarrollaremos ahora; bastará con decir que su idea básica es alimentar al verificador de terminación con su *propio* número Gödel. Pero ello no es tan simple, pues se asemeja al intento de citar una oración entera dentro de sí misma; se tiene que citar la cita, y así siguiendo, lo cual pareciera conducir a una regresión infinita. No obstante, Turing descubrió un expediente para alimentar un programa con su propio número de Gödel. En el capítulo siguiente presentaremos una solución del mismo problema, en un contexto distinto. En este capítulo tomaremos una ruta diferente para arribar a esa meta, la cual consiste en demostrar que un verificador de terminación es imposible. A los lectores que deseen conocer una presentación simple y precisa del enfoque de Turing, les recomiendo el artículo de Hoare y Allison mencionado en la Bibliografía.

Un verificador de terminación sería algo mágico

Antes de destruir la noción, diremos escuetamente por qué el hecho de contar con un verificador de terminación sería una cosa notable. En un sentido, sería como disponer de una varita mágica capaz de resolver todos los problemas de teoría de los números, dentro de un FlooP de categoría superior. Supongamos, por ejemplo, que queremos saber si la Variación Goldbach es una conjetura verdadera o no. Es decir, ¿todos los números tienen la propiedad Tortuga? Comenzaríamos por fomular una verificación FlooP llamada ¿TORTUGA?, la cual determine si su entrada tiene la propiedad Tortuga. Ahora bien, el defecto de este procedimiento —consistente en que no termina, si la propiedad Tortuga está ausente—

¡se transforma aquí en una virtud! Procedemos a procesar el verificador de terminación para el procedimiento ¿TORTUGA? Si dice SI, ello significa que ¿TORTUGA? finaliza, para todos los valores de su entrada: en otras palabras, todos los números tienen la propiedad Tortuga. Si dice NO, entonces sabemos que existe un número que tiene la propiedad Aquiles. La paradoja reside en que en ningún momento hicimos *uso* efectivo del programa ¿TORTUGA?: ¡Sólo estábamos inspeccionando!

Esta idea de resolver cualquier problema de teoría de los números codificándolo como programa, y luego aplicándole un verificador de terminación, no difiere de la idea de verificar la genuinidad de un koan codificándolo en un cordón plegado, pasando luego a verificar si el cordón tiene naturaleza de Buda, en lugar de seguir adelante con el primer propósito. Como sugirió Aquiles, tal vez la información buscada está más cerca de la superficie en una representación que en otra.

Pool F, números índices y Programas Verdes

Bueno, ya basta de quimeras. ¿Cómo podemos probar que el verificador de terminación es imposible? Nuestra fundamentación de la imposibilidad tiene como eje el intento de aplicar el argumento diagonal a FlooP, tal como lo hicimos con BlooP. Veremos que hay ciertas sutiles y básicas diferencias entre ambos casos.

Igual que con BlooP, imaginemos el pool de todos los programas FlooP. Lo llamaremos "Pool F". Luego, realizamos las mismas tres operaciones de filtrado en Pool F, al final de las cuales, tenemos:

> Un pool completo de todos los programas FlooP con llamado menor que calculan funciones de exactamente un parámetro de entrada.

Llamaremos, a estos especiales programas FlooP, *Programas Verdes* (ya que pueden marchar por siempre).

Así como asignamos números índices a todos los Programas Azules, podemos asignar números índices a los Programas Verdes, a través de su distribución en un catálogo, cada uno de cuyos volúmenes contendrá todos los Programas Verdes de determinada extensión, ordenados con criterio alfabético.

Hasta aquí, el traslado de BlooP a FlooP ha sido directo; veremos ahora si también podemos trasladar la última parte: el truco diagonal. ¿Qué ocurre si tratamos de definir una función diagonal?

Diagoverde [N] = 1 + Programaverde {#N} [N]

Súbitamente, aparece un obstáculo: esta función *Diagoverde* [N] no puede tener un valor de salida bien definido para todos los valores N de

entrada. Esto se debe, simplemente, a que no hemos eliminado, en el filtrado, los programas no finalizables de Pool F, y por consiguiente no tenemos ninguna garantía de poder calcular *Diagoverde* [N] para todos los valores de N. En ocasiones, podemos iniciar cálculos que no van a terminar *nunca*. *Y el argumento diagonal no puede ser aplicado en este caso,* pues depende de que la función diagonal tenga un valor para todas las entradas posibles.

El verificador de terminación nos brinda Programas Rojos

Para resolver esto, deberíamos hacer uso de un verificador de terminación, si es que existe alguno. De modo que, de manera deliberada, introduciremos el supuesto cuestionable de que existe un verificador, y lo haremos servir como cuarto filtro. Atacamos pues la lista de los Programas Verdes, eliminando uno por uno todos los no finalizables, para quedarnos por último con:

> Un pool completo de todos los programas FlooP con llamado menor *que calculan funciones de exactamente un parámetro de entrada,* y que *terminen* para todos los valores de su entrada.

Llamaremos, a estos especiales programas FlooP, *Programas Rojos* (ya que todos ellos deben detenerse). Ahora sí se aplicará la argumentación diagonal. Definimos

Diagorroja [N] = 1 + Programarrojo {#N} [N]

y, en exacta simetría con *Diagazul*, estamos obligados a concluir que *Diagorroja* [N] es una función bien definida y calculable de una variable que no está en el catálogo de los Programas Rojos, y por consiguiente ni siquiera es calculable en el poderoso lenguaje FlooP. ¿Será hora de llegarnos hasta GlooP?

GlooP . . .

Sí, pero ¿qué es GlooP? Si FlooP es BlooP liberado, entonces GlooP tendrá que ser FlooP liberado. ¿Pero cómo es posible duplicar aquella misma liberación? ¿Cómo elaborar un lenguaje cuyo poder supere al de FlooP? En *Diagorroja*, hemos descubierto una función cuyos valores los seres humanos sabemos calcular —el método para hacerlo ha sido descripto idiomáticamente, en forma explícita—, pero que, aparentemente, no puede ser programada en lenguaje FlooP. Se trata de un dilema grave, porque nadie ha descubierto jamás un lenguaje de computadora más poderoso que FlooP.

Ha sido efectuada una cuidadosa investigación sobre el poder de los lenguajes de computadora. No ha sido necesario que la realizáramos nosotros mismos; basta con que se diga que hay una vasta clase de lenguajes de computadora que, según se puede demostrar, tiene *exactamente el mismo poder expresivo* que FlooP, en este sentido: cualquier cálculo que pueda ser programado en cualquiera de los lenguajes puede ser programado en todos ellos. Lo curioso es que prácticamente todo ensayo sensato de diseño de un lenguaje de computadora termina por crear un miembro de esa clase, es decir, un lenguaje de poder equivalente al de FlooP. Lo que requiere cierto esfuerzo es inventar un lenguaje de computadora, razonablemente interesante, el cual sea *más débil* que los de dicha clase. BlooP es, por supuesto, un ejemplo de lenguaje más débil, pero es la excepción antes que la regla. La cuestión es que hay determinadas formas extremadamente comunes de emprender la invención de lenguajes algorítmicos: personas diferentes, siguiendo caminos independientes, por lo común terminan produciendo lenguajes equivalentes, distintos entre sí por razones de estilo, únicamente, y no de poder.

. . . es un mito

De hecho, se acepta ampliamente que no puede haber lenguaje más poderoso para describir cálculos que el género de lenguaje equivalente a FlooP. Esta hipótesis fue formulada en la década de los treinta por dos personas, independientemente una de otra: Alan Turing —acerca de quien hablaremos más adelante— y Alonzo Church, lógico eminente de nuestro siglo. Es conocida como la *Tesis Church-Turing*. Si aceptamos la Tesis CT, debemos concluir que "GlooP" es un mito: no hay restricciones para suprimir en FlooP, ni formas de incrementar su poder mediante la "emancipación", como se hizo con BlooP.

Esto nos lleva a la incómoda situación de afirmar que la *gente* puede calcular *Diagorroja* [N] para cualquier valor de N, pero que no hay medio de programar una *computadora* para que haga lo mismo: si, de alguna manera, esto último pudiera conseguirse, se podría hacerlo a través de FlooP . . . pero, por motivos de construcción, no podría hacerse a través de FlooP. Esta conclusión es tan singular que debería llevarnos a investigar muy esmeradamente los pilares sobre los cuales se asienta. Y uno de éstos, como se recordará, es nuestro supuesto cuestionable de que hay un procedimiento de decisión capaz de discriminar entre programas FlooP finalizables y no finalizables. La noción de semejante procedimiento de decisión ya merecía sospechas cuando vimos que su existencia permitiría resolver, de una manera uniforme, todos los problemas de teoría de los números. Ahora tenemos doble fundamento para creer que todo verificador de terminación es un mito: que no hay forma de poner los programas FlooP en una máquina centrifugadora que separe los finalizables de los no finalizables.

Los escépticos pueden sostener que esto no es una demostración rigurosa de que tal verificación de finalización no existe. Se trataría de una objeción válida; sin embargo, el enfoque de Turing prueba con mayor rigor que no puede formularse ningún programa de computadora en un lenguaje de la clase FlooP, que sea capaz de viabilizar una verificación de finalización de todos los programas FlooP.

La Tesis Church-Turing

Volvamos por un instante a la Tesis Church-Turing. Nos dedicaremos a ella —y a variaciones sobre ella, y con gran detalle— en el Capítulo XVII. Por ahora bastará con plantearla a través de unas pocas versiones, y postergar la discusión de sus méritos y alcances hasta entonces. He aquí, pues, tres formas relacionadas de plantear la Tesis-CT:

(1) Lo que es computable por los seres humanos es computable a través de máquinas.
(2) Lo que es computable a través de máquinas es computable a través de FlooP.
(3) Lo que es computable por los seres humanos es computable a través de FlooP (esto es, recursivo general o parcial).

Terminología: recursivo general y parcial

En este capítulo, hemos hecho un estudio bastante extenso de algunas nociones de teoría de los números y sus relaciones con la teoría de las funciones computables. Este es un campo amplio y floreciente, una combinación intrigante de ciencia de las computadoras y matemática moderna. No podemos cerrar este capítulo sin referirnos a la terminología habitualmente aplicada a las nociones que hemos estado manejando.

Como ya dijimos, "computable a través de BlooP" es sinónimo de "recursivo primitivo". Por su parte, las funciones computables a través de FlooP pueden separarse en dos ámbitos: (1) el de las computables mediante programas FlooP *que finalizan*: de éstas se dice que son *recursivas generales*; (2) el de las computables únicamente mediante programas FlooP *que no finalizan*: de éstas se dice que son *recursivas parciales*. (Lo mismo vale para los predicados.) Frecuentemente, se habla de "recursivo" cuando se quiere significar "recursivo general".

El poder de TNT

Es interesante señalar que TNT es tan poderoso, que no sólo están representados en él todos los predicados recursivos primitivos, sino además to-

dos los predicados recursivos generales. No demostraremos estos hechos, porque tal tipo de demostraciones no está comprendido en nuestro objetivo, el cual consiste en mostrar que TNT es incompleto. Si TNT no pudiera representar ciertos predicados primitivos o generales, sería incompleto de una manera *carente de interés*; suponemos entonces que sí puede, para mostrar luego que es incompleto de una manera interesante.

Aire sobre la cuerda de G *

La Tortuga y Aquiles acaban de visitar una fábrica de legumbres desecadas.

Aquiles: ¿Le molestaría si cambio de tema?
Tortuga: De ningún modo.
Aquiles: Muy bien. Le quería comentar un llamado telefónico molesto que recibí días atrás.
Tortuga: Qué interesante.
Aquiles: Sí. Bueno, el problema es que quien llamaba era incoherente, es lo menos que puedo decir. Gritaba algo a través de la línea, y luego colgaba; más bien, ahora que lo pienso, gritaba algo, volvía a gritarlo, y luego colgaba.
Tortuga: ¿Pescó qué cosa decía?
Aquiles: Vea, el diálogo completo era así:

> *Yo:* ¿Diga?
> *Voz (gritando salvajemente):* ¡Produce falsedad cuando es precedida por su cita! ¡Produce falsedad cuando es precedida por su cita!
> *(Clic.)*

Tortuga: No es algo usual en un llamado telefónico molesto.
Aquiles: Es lo que me sorprendió, precisamente.
Tortuga: Quizá había alguna significación en ese supuesto disparate.
Aquiles: Quizá.

(*Ingresan a un espacioso patio, rodeado por algunas agradables casas de piedra de tres pisos. En su centro se levanta una palmera, y hacia uno de los lados una torre. Junto a ésta hay una escalera, en uno de cuyos peldaños está sentado un niño, conversando con una joven asomada a una ventana.*)

Tortuga: ¿Adónde me ha traído, Aquiles?
Aquiles: Me complacería mostrarle el bello panorama que se aprecia desde lo alto de esta torre.
Tortuga: Oh, magnífico.

* O, *Aire sobre la cuerda de Sol.* [T.]



Figura 74. Arriba y abajo, *de M. C. Escher (litografía, 1947).*

(Se aproximan al niño, quien los observa con curiosidad y luego dice algo a la joven: ambos se ponen a cuchichear entre sí. Aquiles y la señora Tortuga, en lugar de subir por la escalera donde está el niño, giran a la izquierda y descienden unos pocos escalones, que conducen a una pequeña puerta de madera.)

Aquiles: Podemos ir directamente por aquí. Sígame.

(Aquiles abre la puerta. Entran, y comienzan a subir por la empinada escalera helicoidal de dentro de la torre.)

Tortuga (resoplando un poco): Estoy algo fuera de forma para esta clase de ejercicio, Aquiles. ¿Falta mucho?

Aquiles: Unos pocos tramos más . . . pero, tengo una idea. En vez de caminar por la parte de arriba de estos escalones, ¿por qué no camina por la parte de abajo?

Tortuga: ¿Cómo consigo ESO?

Aquiles: Sólo téngase firme, y trépese debajo: hay lugar suficiente para usted. Descubrirá que los peldaños también tienen sentido desde abajo, no menos que desde arriba . . .

Tortuga (deslizándose cautelosamente): ¿Voy bien?

Aquiles: ¡Ya está!

Tortuga (su voz suena algo apagada): Oiga, esta maniobrita me ha confundido. ¿Estoy mirando escaleras arriba o escaleras abajo?

Aquiles: Es sencillo: avance en la misma dirección que llevaba antes. En su lado de la escalera, eso significa BAJAR; en el mío, significa SUBIR.

Tortuga: ¿No me dirá que, bajando, voy a llegar a la cima de la torre, eh?

Aquiles: No sé, pero ahí vamos . . .

(Comienzan entonces a subir en espiral, sincrónicamente, A siempre de un lado, y T haciéndole pareja desde el otro lado. Pronto llegan al fin de la escalera.)

Haga ahora la maniobra inversa, señora. Acá estoy, permítame ayudarle.

(Extiende su brazo hacia la Tortuga y la iza hasta el otro lado de la escalera.)

Tortuga: Gracias. Retornar fue un poco más fácil.

(Salen a la terraza, dejando atrás la torre.)

Qué hermosa vista, Aquiles. Estoy encantada de que me haya hecho subir aquí o, mejor dicho, BAJAR aquí.

Aquiles: Me figuraba que le iba a agradar.

Tortuga: ¿Sabe? He estado pensando en ese llamado telefónico. Creo que lo entiendo un poco mejor ahora.

Aquiles: ¿Será posible? Dígame, por favor.

Tortuga: Por ventura, ¿no siente que esa expresión, "precedida por su cita", tiene una leve cualidad de cosa que ronda obsesivamente?

Aquiles: Levemente, sí . . . muy levemente.

Tortuga: ¿Puede imaginarse alguna cosa precedida por su cita?

Aquiles: Puedo representarme una imagen del Presidente Mao entrando a una sala de ceremonias, en la cual se ha colgado un gran estandarte que reproduce algún fragmento de sus escritos. Tendríamos así al Presidente Mao, precedido por su cita.

Tortuga: Muy ingenioso ejemplo. Sin embargo, me parece que debemos restringir la palabra "precedido" a la idea de precedencia en una hoja escrita, y no con respecto a protocolares ingresos a salas de ceremonias.

Aquiles: De acuerdo, pero ¿qué quiere decir usted con "cita", en este caso?

Tortuga: Cuando se hace referencia a una palabra o a una expresión, se sigue la convención de ponerlas entre comillas, es decir, de *citarlas* de esa manera. Por ejemplo, puedo decir:

La palabra "filósofo" tiene cinco letras.

Pongo entre comillas la palabras "filósofo" para mostrar que estoy hablando de la PALABRA "filósofo", y no de un filósofo de carne y hueso. Esto es conocido como la distinción entre USO y MENCION.

Aquiles: ¿Eh?

Tortuga: Permítame que le explique. Supongamos que yo le dijera:

Los filósofos ganan montones de dinero.

Aquí, yo estaría USANDO la palabra para inducir en su mente la imagen de un sabio de ojos vivaces, rodeado de sacos repletos de billetes de banco. Pero cuando pongo esa palabra —o cualquier otra— entre comillas, sustraigo su significación y sus connotaciones y me quedo solamente con ciertos signos trazados en un papel, o con ciertos sonidos. A esto se le llama MENCION. En esta perspectiva, de la palabra solamente interesan sus aspectos tipográficos, ninguna otra cosa; su significación es ignorada.

Aquiles: Esto me hace pensar en el uso de un violín para matar moscas. ¿O debería decir "mención"? Del violín interesa, en este caso, solamente su solidez, ninguna otra cosa; su significación o función ha de ser ignorada. Mirando bien, creo que la mosca ve las cosas del mismo modo.

Tortuga: Son extensiones válidas, aunque un tanto heterodoxas, de la distinción uso-mención. Pero ahora quiero que piense usted en hacer preceder algo por su propia cita.

Aquiles: Bueno. ¿Qué le parece esto?

"MERENGUE" MERENGUE

Tortuga: Excelente. Piense otro ejemplo.
Aquiles: Tengo otro, fíjese:

"'CATAPLUM' NO ES EL TITULO DE NINGUN LIBRO, POR LO QUE YO SE"
'CATAPLUM' NO ES EL TITULO DE NINGUN LIBRO, POR LO QUE YO SE.

Tortuga: Esto puede ser convertido en un ejemplo interesantísimo, si solamente suprimimos 'Cataplum'.
Aquiles: ¿De veras? Veamos qué es lo que quiere decir usted. Quedaría:

"NO ES EL TITULO EL DE NUNGUN LIBRO, POR LO QUE YO SE"
NO ES EL TITULO DE NINGUN LIBRO, POR LO QUE YO SE.

Tortuga: Ahí lo tiene, ha elaborado usted una oración.
Aquiles: Pues sí. Es una oración referida a la expresión "no es el título de ningún libro, por lo que yo sé", y *sumamente* tonta, por cierto.
Tortuga: ¿Por qué tonta?
Aquiles: Porque es muy insulsa. Aquí tiene otra:

"ESTABA ESCRITO" ESTABA ESCRITO.

Pero, ¿adónde nos lleva esto? Honestamente, qué juego tan bobo.
Tortuga: No, a mi juicio. Es un asunto muy serio, creo. En realidad, esta operación de hacer preceder una expresión por su propia cita es tan tremendamente importante que creo que debo asignarle un nombre.
Aquiles: ¿Usted? ¿Con qué nombre dignificaría esta ridícula operación?
Tortuga: Creo que llamaré, a "quinerear una oración", quinerear una oración.
Aquiles: ¿"Quinerear"? ¿Qué clase de palabra es ésa?
Tortuga: Una palabra de nueve letras, si no me equivoco.
Aquiles: A lo que aludo es al motivo por el cual usted eligió precisamente esas nueve letras, en ese preciso orden.
Tortuga: Oh, ahora comprendo qué quería decir usted cuando me preguntó: "¿Qué clase de palabra es ésa"? La respuesta es que un filósofo llamado "Willard Van Orman Quine" inventó la operación, de modo que denomino así a ésta en su honor. Sin embargo, no puedo ir más allá en mi explicación, pues las razones por las cuales "Quine" tiene

precisamente esas letras —y mucho menos por qué éstas aparecen en ese orden específico— constituyen un interrogante para el que no cuento con una respuesta en este momento. Pero estoy gustosamente dispuesta a ir y . . .

Aquiles: ¡Basta, por favor! Le aseguro que no deseo saber nada acerca del nombre de Quine. De todos modos, ahora ya sé cómo quinerear una expresión. Es muy gracioso. He aquí una expresión quinereada:

"ES UN FRAGMENTO DE ORACION" ES UN FRAGMENTO DE ORACION.

Es tonto pero al mismo tiempo me divierte. !Se toma un fragmento de oración, se lo quinerea y asunto concluido, se tiene una oración! Y una oración verdadera.

Tortuga: ¿Qué me dice de quinerear la expresión "es un catarro sin sujeto"?

Aquiles: Un catarro sin sujeto sería . . .

Tortuga: . . . una anomalía, seguramente. No se aparte de la tarea. ¡Primero, quinerear, después los catarros!

Aquiles: ¿Tengo que quinerear esa expresión? De acuerdo:

"ES UN CATARRO SIN SUJETO" ES UN CATARRO SIN SUJETO.

Me parece que hubiera tenido mucho más sentido si se hubiera dicho "oración" en lugar de "catarro". Pero, en fin, !déme otra!

Tortuga: Bueno, sólo una más. Pruebe con ésta:

"CUANDO ES QUINEREADA, PRODUCE UN CANTO DE AMOR QUELONIO".

Aquiles: Tiene que ser fácil . . . Yo diría que el quinereamiento arroja:

"CUANDO ES QUINEREADA, PRODUCE UN CANTO DE AMOR QUELONIO"
CUANDO ES QUINEREADA, PRODUCE UN CANTO DE AMOR QUELONIO.

Mmmm . . . Hay algo un tanto peculiar aquí. ¡Ah, ya veo de qué se trata! ¡La oración habla de sí misma! ¿Se da cuenta?

Tortuga: ¿Qué quiere usted decir? Las oraciones no hablan.

Aquiles: No, pero se REFIEREN a las cosas, ¡y ésta se refiere directamente —inequívocamente, indudablemente— a la misma oración que ella es! No tiene usted más que hacer un poco de memoria y recordar cómo son todos los quinereamientos.

Tortuga: No advierto que diga nada acerca de sí misma. ¿Dónde dice "yo", "esta oración", o algo similar?

Aquiles: Oh, usted se está mostrando necia con toda deliberación. ¡La belleza de la expresión radica precisamente en eso: habla de sí misma sin tener que hacerlo en forma expresa!

Tortuga: Bueno, como no soy más que una pobre aprendiz, ¿podría usted esclarecerme con respecto a todo eso?

Aquiles: Oh, no es más que una Tortuga Dubitativa . . . Bien, déjeme ver un poco . . . Supongamos que elaboro una oración —la llamaré "Oración P"— que contenga un espacio en blanco.

Tortuga: ¿Por ejemplo?

Aquiles: Por ejemplo:

"________, CUANDO ES QUINEREADA, PRODUCE UN CANTO DE AMOR QUELONIO".

Ahora bien, el tema de la Oración P dependerá de cómo sea llenado el espacio en blanco. Pero una vez decidido cómo llenarlo, el tema queda determinado: es la expresión que se obtiene QUINEREANDO el espacio en blanco. Llamémosla "Oración Q", ya que es producida gracias a un acto de quinereamiento.

Tortuga: Eso tiene sentido. Si la expresión del espacio en blanco fuera "está escrito sobre viejas tinajas de mostaza para conservarlas frescas", la Oración Q tendría que ser:

"ESTA ESCRITO SOBRE VIEJAS TINAJAS DE MOSTAZA PARA CONSERVARLAS FRESCAS"
ESTA ESCRITO SOBRE VIEJAS TINAJAS DE MOSTAZA PARA CONSERVARLAS FRESCAS.

Aquiles: Eso es, y la oración P reclama (a pesar de que ignoro si ello es válido o no) que la Oración Q sea un canto de amor quelonio. En cualquier caso, la Oración P no está hablando aquí de sí misma, sino, por el contrario, de la Oración Q. ¿Estamos de acuerdo en todo?

Tortuga: En todo . . . además, qué hermoso canto es.

Aquiles: Pero ahora quiero elegir otra cosa para llenar el espacio en blanco, ésta:

"CUANDO ES QUINEREADA, PRODUCE UN CANTO DE AMOR QUELONIO".

Tortuga: Caramba, caramba; se está poniendo usted un poco complicado. Espero que esto no se haga demasiado erudito para mi modesto entendimiento.

Aquiles: No se preocupe: lo va a pescar, con toda seguridad. Con esta elección, la Oración Q pasa a ser:

"CUANDO ES QUINEREADA, PRODUCE UN CANTO DE AMOR QUELONIO"
CUANDO ES QUINEREADA, PRODUCE UN CANTO DE AMOR QUELONIO.

Tortuga: Oh, viejo guerrero astuto, sí lo pesqué. Ahora, la Oración Q es exactamente la misma que la Oración P.

Aquiles: Y como la Oración Q es siempre el tópico de la Oración P, hay un bucle, de manera que ahora P se señala, hacia atrás, a sí misma. Pero ya lo ve usted, la autorreferencia es una suerte de accidente. Por lo común, las Oraciones Q y P difieren por completo entre sí, pero si se adopta la decisión adecuada con respecto al espacio en blanco de la Oración P, el quinereamiento lo favorecerá con ese truco mágico.

Tortuga: Oh, qué sagaz. Quisiera saber por qué jamás se me ocurrió esto a mí. Pero dígame, ¿la oración que sigue es autorreferencial?

"ESTA COMPUESTA POR CINCO PALABRAS"
ESTA COMPUESTA POR CINCO PALABRAS.

Aquiles: Mmmm . . . No estoy seguro. La oración que usted me plantea no se refiere, en realidad, a sí misma, sino a la expresión "está compuesta por cinco palabras". Aun así, es claro, esta expresión forma PARTE de la oración . . .

Tortuga: ¿Así que las oraciones se refieren a alguna parte de sí mismas? . . . ¿y entonces?

Aquiles: Bueno, ¿no caracteriza eso también a la autorreferencia?

Tortuga: En mi opinión, eso es un pálido reflejo de la autorreferencia auténtica. Pero no se preocupe demasiado por estos complejos asuntos: tendrá mucho tiempo para pensarlos, en el futuro.

Aquiles: ¿Cómo?

Tortuga: Así es no más. Pero, por ahora, ¿por qué no intenta quinerear la expresión "produce falsedad cuando es precedida por su cita"?

Aquiles: Ya veo adónde me lleva usted, a ese irritante llamado telefónico. Si lo quinereo, obtengo:

"PRODUCE FALSEDAD CUANDO ES PRECEDIDA POR SU CITA"
PRODUCE FALSEDAD CUANDO ES PRECEDIDA POR SU CITA.

¡Así que esto es lo que me decía quien me llamaba! Yo no podía advertir dónde estaban las comillas cuando él hablaba. ¡Sí que es algo antisocial! ¡Se debería encarcelar a la gente que dice cosas así!

Tortuga: Pero, ¿por qué, Aquiles?

Aquiles: Es que me fastidia enormemente. A diferencia de los ejemplos anteriores, en éste no puedo establecer en absoluto si se trata de algo verdadero o falso. Más lo pienso, menos lo puedo descifrar. Me marea.

Querría saber qué clase de mente lunática es capaz de imaginar algo así y de utilizarlo para atormentar a personas inocentes en medio de la noche.

Tortuga: Querría saberlo . . . Bueno, ¿descendemos ya?

Aquiles: No nos hace falta bajar: ya estamos a nivel del suelo. Volvamos adentro, verá usted. (*Entran a la torre, y se dirigen a una pequeña puerta de madera.*) Saldremos directamente desde aquí, sígame.

Tortuga: ¿Está seguro? Yo no hubiera necesitado descolgarme tres pisos y mortificarme el caparazón.

Aquiles: No es ninguna broma.

(*Abre la puerta. Frente a ellos está sentado el que a todas luces es el mismo niño, conversando con la misma joven. Aquiles y la Tortuga suben por los que parecen ser los mismos escalones que descendieron para ingresar a la torre y llegan a lo que parece exactamente el mismo patio al que llegaron inicialmente.*)

Tortuga: Muchas gracias por el agradable paseo, Aquiles. Espero que nos veamos pronto.

CAPITULO XIV

Sobre proposiciones formalmente indecidibles de TNT y sistemas afines[1]

Las dos ideas de la "ostra"

EL TÍTULO DE ESTE CAPÍTULO es una adaptación del título del célebre artículo de Gödel, de 1931: "TNT" sustituye a *"Principia Mathematica"*. El trabajo de Gödel es de índole técnica, dirigido a que su demostración fuese hermética y rigurosa; este capítulo, en cambio, será más intuitivo, y hará énfasis en las dos ideas claves que constituyen el corazón de la demostración. La primera idea clave es el profundo descubrimiento de que hay cadenas de TNT de las cuales se puede interpretar que hablan de otras cadenas de TNT; en síntesis, que TNT, en tanto que lenguaje, es capaz de "introspección", o de autoanálisis. De aquí proviene la numeración Gödel. La segunda idea clave consiste en que la propiedad de autoanálisis puede ser totalmente circunscripta a una cadena en particular, de manera que el único foco de atención de tal cadena sea ella misma. Este "recurso de focalización" reaparece, en esencia, en el método diagonal de Cantor.

En mi opinión, si uno está interesado en comprender profundamente la demostración de Gödel, debe reconocer que esta demostración, en el fondo, consiste en una fusión de esas dos ideas principales. Cada una de ellas, por sí misma, es un hallazgo magistral; haberlas reunido es un acto de genialidad. No obstante, si yo tuviera que decidir cuál de ambas es más profunda, me inclinaría con completa certidumbre por la primera: la idea de la numeración Gödel, pues está vinculada al conjunto de nociones acerca de qué son la significación y la referencia en los sistemas que manipulan símbolos. Esta idea va mucho más allá de los confines de la lógica matemática, en tanto que el expediente de Cantor, pese a la riqueza de sus consecuencias matemáticas, tiene escasa relación —si es que tiene alguna— con los hechos de la vida real.

[1] El título del artículo de Gödel, publicado en 1931, incluía al final el numeral "I" para significar que el autor proyectaba hacerlo seguir por una defensa más detallada de algunas de las complejas argumentaciones. Sin embargo, el primer trabajo fue tan ampliamente aclamado que un segundo perdió utilidad, y nunca fue escrito.

La primera idea: pares de prueba

Dejando atrás los rodeos, procederemos a desarrollar la demostración misma. En el Capítulo IX ofrecimos una exposición muy prolija del isomorfismo Gödel. Ahora, describiremos una noción matemática que nos permitirá convertir un enunciado tal como "La cadena 0 = 0 es un teorema de TNT" en un enunciado de teoría de los números. Ello involucrará la noción de *pares de prueba*; un par de prueba es un par de números naturales relacionados de una manera específica. Se trata de lo siguiente:

> Dos números naturales, *m* y *n*, forman un par de prueba TNT si, y sólo si, *m* es el número Gödel de una derivación TNT cuya línea final sea la cadena cuyo número Gödel sea *n*.

Esta noción puede verse, análogamente, en el sistema MIU; será más sencillo, para la intuición, considerar primero este caso. Dejemos atrás por un momento, entonces, los pares de prueba TNT, y examinemos los pares de prueba MIU. Su definición es paralela a la anterior:

> Dos números naturales, *m* y *n*, forman un par de prueba MIU si, y sólo si, *m* es el número Gödel de una derivación del sistema MIU cuya línea final sea la cadena cuyo número Gödel sea *n*.

Veamos algunos ejemplos de pares de prueba MIU. Primero, establecemos que *m* = 3131131111301, *n* = 301. Estos valores de *m* y *n* forman ciertamente un par de prueba MIU, porque *m* es el número Gödel de la derivación MIU

MI
MII
MIIII
MUI

cuya última línea es MUI, que tiene el número Gödel 301, vale decir, *n*. En contraste, establezcamos que *m* = 31311311130, y *n* = 30. ¿Por qué estos dos valores *no* forman un par de prueba MIU? Para conocer la respuesta, formulemos la derivación de la cual se pretende que es codificada por *m*:

MI
MII
MIII
MU

¡Hay un paso ilegítimo en la derivación aducida! Es el que va de la segunda a la tercera línea: de MII a MIII; no hay regla de inferencia en el sistema

MIU que permita semejante paso tipográfico. En forma correspondiente —y esto es más crucial— no hay regla aritmética de inferencia que lleve de 311 a 3111. Quizá se trate de una observación trivial, a la luz de nuestra exposición del Capítulo IX, pero se trata de algo ubicado en el corazón del isomorfismo Gödel. Lo que hagamos en cualquier sistema formal tiene su paralelo en la manipulación aritmética.

Como quiera que sea, los valores m = 31311311130, n = 30 es seguro que no forman un par de prueba MIU. Ello no implica que 30 no es un número MIU; podría haber otro valor de m que forme un par de prueba MIU con 30. (En verdad, sabemos por razonamientos anteriores que MU no es un teorema MIU y que, en consecuencia, ningún número en absoluto puede formar un par de prueba MIU con 30.)

Pasemos ahora a los pares de prueba TNT. Tenemos dos ejemplos paralelos, uno de los cuales es un par de prueba TNT válido, y el otro no. ¿Cuál es cuál? (Dicho sea de paso, aquí es donde aparece el codón '611'; su finalidad es separar entre sí las sucesivas líneas de números Gödel. En este sentido, '611' sirve como signo de puntuación. En el sistema MIU basta con el '3' inicial de cada línea; no se requiere puntuación adicional.)

(1) m = 626,262,636,223,123,262,111,666,611,223,123,666,111,666
n = 123,666,111,666
(2) m = 626,262,636,223,123,262,111,666,611,223,333,262,636,123,262,111, 666
n = 223,333,262,636,123,262,111,666

Es muy fácil determinar cuál es uno y cuál es otro, mediante la simple traducción a la notación anterior, y un examen de rutina que permita ver:

(1) si la derivación de la cual se pretende que es codificada por m es efectivamente una derivación legítima;
(2) en caso de ser así, si la última línea de la derivación coincide con la cadena codificada por n.

El paso 2 es trivial, y también el paso 1 es absolutamente directo, en este sentido: no hay involucradas búsquedas sin límite, ni ocultos bucles sin fin. Consideremos los ejemplos anteriores referidos al sistema MIU, y limitémonos ahora a sustituir las reglas del sistema MIU por las reglas de TNT, y el axioma único del sistema MIU por los axiomas de TNT. En ambos casos, el algoritmo es el mismo. Lo explicitaré:

Recorrer una por una las líneas de la derivación, en orden descendente.
Señalar las que sean axiomas.
Respecto a toda línea que *no* sea un axioma, verificar si, en la derivación pretendida, resulta de líneas anteriores por aplicación de cualquiera de las reglas de inferencia.

Si todos los no axiomas resultan de líneas anteriores por aplicación de las reglas de inferencia, se tiene una derivación legítima; en caso contrario, es una derivación apócrifa.

En cada estadio, hay un conjunto definido de tareas por realizar, y el número de éstas puede ser determinado en forma previa con suma facilidad.

La calidad de par de prueba es recursiva primitiva...

El motivo por el que enfatizo el carácter limitado de esos bucles estriba en que, como habrá percibido el lector, estoy a punto de afirmar el

> HECHO FUNDAMENTAL 1: La propiedad de ser un par de prueba es una propiedad teórico-numérica recursiva primitiva, y en consecuencia puede ser verificada mediante un programa BlooP.

Se debe hacer aquí una distinción bien marcada con respecto a la otra propiedad teórico-numérica, estrechamente relacionada con ésta: la de ser un *número-teorema*. Sostener que *n* es un *número-teorema* significa sostener que existen *ciertos* valores de *m* que forman un par de prueba con *n*. (Entre paréntesis, estas observaciones se aplican tanto a TNT como al sistema MIU, exactamente por igual; tal vez sea útil conservar ambos en mente, con el sistema MIU sirviendo como prototipo.) Para verificar si *n* es un número teorema, es necesario embarcarse en una búsqueda a través de todos sus posibles "socios" *m* de par de prueba, con lo cual es posible ingresar a una persecución interminable. Nadie puede decir qué extensión tendrá la búsqueda de un número que forme un par de prueba con *n* como segundo elemento. Este es el gran problema de contar con reglas de ampliación y de reducción dentro del mismo sistema: conducen a un cierto grado de impredictibilidad.

En este punto, puede servir de auxilio la Variación Goldbach. Es trivial verificar si un *par* de números (*m*,*n*) forma un *par-Tortuga*: es decir, tanto *m* como *n* tienen que ser primos. La verificación es simple porque la propiedad de primidad es recursiva primitiva: admite una verificación de finalización predictible. Pero si queremos saber si *n* posee la propiedad Tortuga, nos encontraremos preguntando: "¿*Cualquier* número *m* forma un par-Tortuga con *n* como segundo elemento?", y otra vez nos veremos dentro del indómito e ignoto reino de los bucles MU.

. . . y, por consiguiente, está representada en TNT

El concepto clave, en esta coyuntura, es entonces el Hecho Fundamental 1 enunciado más atrás, a partir del cual podemos concluir:

HECHO FUNDAMENTAL 2: La propiedad de formar un par de prueba es verificable a través de BlooP y, consecuentemente, está *representada* en TNT por alguna fórmula que tenga dos variables libres.

Una vez más nos mostramos indiferentes acerca del sistema con el cual estén vinculados estos pares de prueba; es que ello no tiene real importancia, pues ambos Hechos Fundamentales contienen cualquier sistema formal. Tal es la naturaleza de los sistemas formales: siempre es posible establecer, de manera predictiblemente finalizable, si una determinada secuencia de líneas integra una demostración, o no, y esto se traslada al campo correspondiente de las nociones aritméticas.

El poder de los pares de prueba

A fin de ser más concretos, vamos a suponer que estamos trabajando con el sistema MIU. El lector recordará, probablemente, la cadena a la que llamamos "MUMON", cuya interpretación, en un nivel, era el enunciado "MU es un teorema del sistema MIU". Podemos mostrar de qué manera sería expresado MUMON en TNT, en función de la fórmula que representa la noción de pares de prueba MIU. Abreviaremos esta fórmula, cuya existencia nos es asegurada por el Hecho Fundamental 2, de este modo:

PAR DE PRUEBA MIU {a,a'}

Puesto que se trata de una propiedad de dos números, es representada por una fórmula con dos variables libres. (Nota: en este capítulo, emplearemos siempre el TNT austero, por lo que se debe distinguir cuidadosamente entre las variables a,a',a".) Para afirmar que "MU es un teorema del sistema MIU", deberíamos formular el enunciado isomórfico "30 es un número-teorema del sistema MIU", y luego trasladarlo a notación TNT. Con la ayuda de nuestra abreviatura, esto es fácil (conviene recordar la indicación del Capítulo VIII en el sentido de que el remplazo de cada a' por un numeral debe ser señalado mediante la inclusión, después del numeral, de la expresión "/a'"):

∃a: PARA DE PRUEBA MIU
{a,SSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSSS0/a'}

Contemos las eses: hay 30. Adviértase que es una acabada oración de TNT, porque una de las variables libres ha sido cuantificada, y la otra sustituida por un numeral. Ya que estamos, podemos decir que es una cosa inteligente la que se ha logrado aquí. El Hecho Fundamental 2 nos proporcionó un medio para hablar de los *pares de prueba*; hemos resuelto, también, cómo hablar de los *números-teoremas*: ¡sencillamente, poniendo delante un cuantificador existencial! Una traducción más literal de la

cadena anterior rezaría: "Existe algún número a que forma un par de prueba MIU con 30 como segundo elemento."

Supongamos que queremos hacer algo paralelo con respecto a TNT: digamos, expresar el enunciado "0 = 0 es un teorema de TNT". Podemos abreviar la fórmula, cuya existencia nos es asegurada por el Hecho Fundamental 2, de una forma análoga (de nuevo con dos variables libres):

PAR DE PRUEBA TNT {a,a′}

(La interpretación de esta fórmula TNT abreviada es: "Los números naturales a y a' forman un par de prueba TNT".) El paso siguiente consiste en llevar este enunciado al campo de la teoría de los números, siguiendo el modelo de MUMON ya visto. El enunciado que resulta es: "Existe algún número a que forma un par de prueba TNT con 666,111,666 como segundo elemento". La fórmula TNT que expresa esto es la siguiente:

∃a: PARA DE PRUEBA TNT {a,SSSSS . . . . . . .SSSSS0/a′}

¡muchísimas eses!
(exactamente 666,111,666)

Tenemos así una *oración* acabada de TNT. (La llamaremos "JOSHU", por causas que aparecerán de inmediato.) Como está a la vista, pues, hay no solamente una forma de hablar de la noción recursiva primitiva de pares de prueba TNT, sino también de la noción asociada, pero más compleja, de números-teorema TNT.

A fin de evaluar el grado de comprensión, por parte del lector, de estas ideas, le proponemos que resuelva cómo traducir a TNT los siguientes enunciados de meta-TNT:

(1) 0 = 0 no es un teorema de TNT.
(2) ~ 0 = 0 es un teorema de TNT.
(3) ~ 0 = 0 no es un teorema de TNT.

¿En qué medida difieren las soluciones con respecto al ejemplo dado más atrás, y también entre sí? Siguen unos pocos ejercicios más de traducción:

(4) JOSHU es un teorema de TNT. (Apelar a la cadena TNT que expresa este "META-JOSHU".)
(5) META-JOSHU es un teorema de TNT. (Apelar a la cadena TNT que expresa ente "META-META-JOSHU".)
(6) META-META-JOSHU es un teorema de TNT.
(7) META-META-META-JOSHU es un teorema de TNT.

(etc., etc.)

El ejemplo 5 muestra que los enunciados de meta-meta-TNT pueden ser traducidos a notación TNT; el ejemplo 6, lo mismo para meta-meta-meta-TNT, etc.

En este punto, es importante tener presente la diferencia entre *expresar* una propiedad, y *representarla*. La propiedad de ser un número-teorema TNT, por ejemplo, es expresada por la fórmula:

∃a: PARA DE PRUEBA TNT {a,a'}

Traducción: "a' es un número-teorema TNT". Sin embargo, no tenemos garantizado que esta fórmula *represente* la noción, ya que no tenemos garantizado que esta propiedad sea recursiva primitiva: en realidad, no tenemos más que la escondida sospecha de que no lo es. (Una sospecha que es bien garantizada: la propiedad de ser un número-teorema TNT *no* es recursiva primitiva, y ninguna fórmula de TNT puede representar esa propiedad . . .) Por el contrario, la propiedad de ser un par de prueba, en virtud de su recursividad primitiva, es tanto expresable como representable, a través de la fórmula ya presentada.

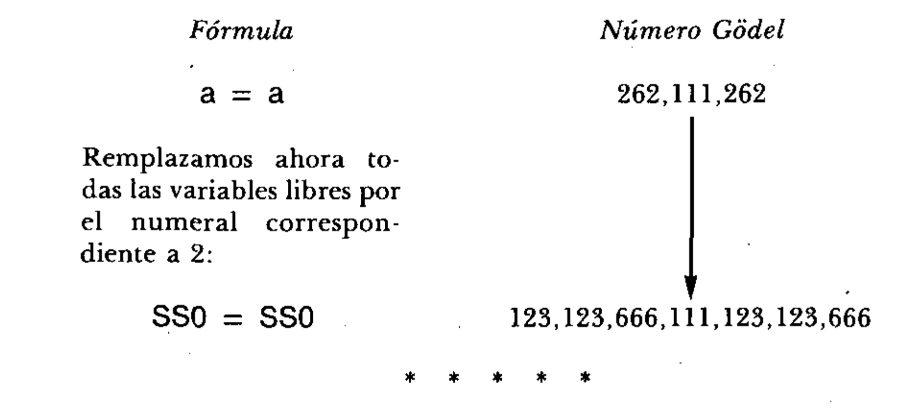
La sustitución conduce a la segunda idea

La exposición precedente nos ha llevado a un punto en el cual sabemos de qué manera TNT puede hacer "introspección" a propósito de la noción de teoremidad TNT. Esta es la esencia de la primera parte de la demostración. Ahora, queremos ir en pos de la segunda idea principal de aquélla, mediante el desarrollo de una noción que permita concentrar dicha introspección en una fórmula en particular. Para obtener esto, necesitamos observar lo que sucede con el número Gödel de una fórmula cuando ésta es modificada estructuralmente, de una manera simple. Concretamente, observaremos la modificación específica que sigue:

remplazo de todas las variables libres por
un numeral específico.

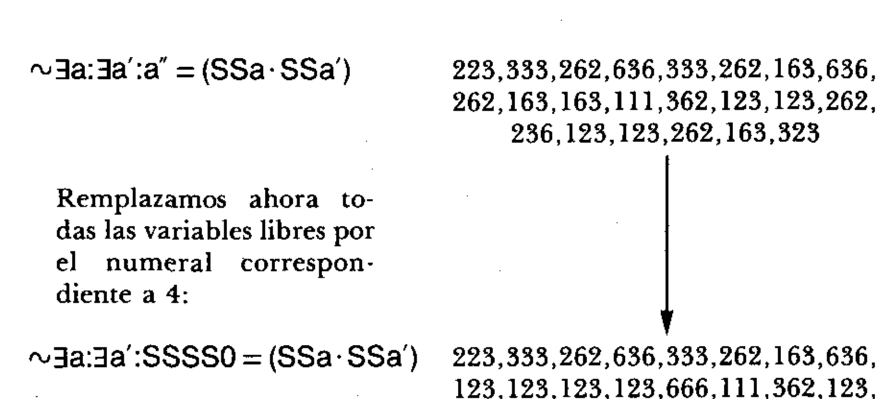
A continuación, se muestra un par de ejemplos de esta operación en la columna de la izquierda, mientras que en la columna de la derecha vemos los cambios paralelos que se producen en los números Gödel.

En la columna de la derecha tiene lugar un proceso aritmético isomórfico, dentro del cual un número enorme se transforma en otro más enorme todavía. La función que produce el nuevo número a partir del anterior no sería excesivamente difícil de describir de forma aritmética, en términos de sumas, multiplicaciones, potencias de 10, etc.: pero no necesitamos hacerlo. El aspecto principal reside en que la relación entre (1) el número



Fórmula	*Número Gödel*
a = a	262,111,262
Remplazamos ahora todas las variables libres por el numeral correspondiente a 2:	↓
SS0 = SS0	123,123,666,111,123,123,666

* * * * *



$\sim\exists a:\exists a':a'' = (SSa \cdot SSa')$	223,333,262,636,333,262,163,636, 262,163,163,111,362,123,123,262, 236,123,123,262,163,323
Remplazamos ahora todas las variables libres por el numeral correspondiente a 4:	↓
$\sim\exists a:\exists a':SSSS0 = (SSa \cdot SSa')$	223,333,262,636,333,262,163,636, 123,123,123,123,666,111,362,123, 123,262,236,123,123,262,163,323

Gödel original, (2) el número cuyo numeral es incluido, y (3) el número Gödel resultante, es una relación recursiva primitiva. Esto equivale a decir que se podría formular una verificación BlooP, la cual, cuando recibe como entrada tres números naturales cualesquiera, diga SI, si los mismos se relacionan de esta manera, y NO en caso contrario. El lector puede verificar su propia capacidad de realizar una verificación semejante —y al mismo tiempo convencerse de que no hay bucles sin fin ocultos en el proceso— a través del análisis de los dos conjuntos de tres números siguientes:

(1) 362,262,112,262,163,323,111,123,123,123,123,666;
2;
362,123,123,666,112,123,123,666,323,111,123,123,123,123,666.
(2) 223,362,262,236,262,323,111,262,163;
1;
223,362,123,666,236,123,666,323,111,262,163.

Como de costumbre, uno de los ejemplos llena las condiciones, no así el restante. Esta relación entre tres números será llamada de *sustitución*. Como es primitiva recursiva, está *representada* por alguna fórmula. de TNT que tenga tres variantes libres. Abreviemos esa fórmula TNT mediante la notación que sigue:

SUST {a,a′,a″}

Puesto que esta fórmula representa la relación de sustitución, la fórmula de más abajo será un teorema TNT:

SUST {SSSSS. . . . .SSSSS0/a,SS0/a′,SSSSSS. . . . .SSSS0/a″}

262,111,262 eses *123,123,666,111,123,123,666 eses*

(Esto se basa en el primer ejemplo de relación de sustitución mostrado en las columnas paralelas, en esta misma sección.) Y a causa, otra vez, de que la fórmula SUST representa la relación de sustitución, la fórmula que sigue *no* es, ciertamente, un teorema TNT:

SUST {SSS0/a,SS0/a′,S0/a″}

Aritmoquinereamiento

Hemos llegado al momento crucial en que podemos combinar todas las partes sueltas en un conjunto significativo. Necesitamos emplear los mecanismos de las fórmulas PAR DE PRUEBA TNT y SUST, de algún modo que nos permita construir una sola oración de TNT, cuya interpretación sea: "Esta misma cadena de TNT no es un teorema TNT." ¿Cómo conseguirlo? Inclusive en este punto, con todos los mecanismos necesarios a nuestra disposición, la respuesta no es fácil de descubrir.

Una noción curiosa, y que tal vez parezca frívola, es la de insertar el *propio* número Gödel de una fórmula dentro de la *misma*. Es algo enteramente análogo a aquella otra noción curiosa, de apariencia tal vez frívola, de "quinereamiento", que aparece en el *Aire sobre la cuerda de G.* Sin embargo, el quinereamiento ha resultado estar provisto de un extraño género de importancia, en la medida en que se muestra como un nuevo medio para convertir una oración en autorreferencial. La autorreferencia de la variedad Quine se nos oculta la primera vez que la vemos, pero una vez entendido su principio se advierte que es completamente sencilla, y además entretenida. La versión aritmética del quinereamiento —llamémosla *aritmoquinereamiento*— nos permitirá elaborar una oración TNT que sea "acerca de sí misma".

Veamos un ejemplo de aritmoquinereamiento. Necesitamos una fórmula que tenga, por lo menos, una variable libre, como la siguiente:

a = S0

El número Gödel de esta fórmula es 262,111,123,666, e introduciremos este número dentro de la fórmula misma o, mejor dicho, introduciremos su *numeral*. He aquí el resultado:

SSSSS .... SSSSS0 = S0

262,111,123,666 eses

Esta nueva fórmula afirma una falsedad ridícula: la de que 262,111,123,666 es igual a 1. Si hubiéramos comenzado con la cadena ~a = S0, y luego aritmoquinereado, habríamos obtenido un enunciado verdadero, tal como el lector puede comprobar por sí mismo.

Cuando se aritmoquinerea, se está ejercitando, por cierto, un caso especial de la operación de sustitución que definimos anteriormente. Si deseamos hablar acerca del aritmoquinereamiento dentro de TNT, tendremos que emplear la fórmula:

SUST{a'',a'',a'}

Aquí, las dos primeras variables son la misma. Esto deriva del hecho de que estamos utilizando un mismo número de dos formas diferentes (reflejos del método diagonal de Cantor . . .). El número a'' es tanto (1) el número Gödel original, como (2) el número de inclusión. Inventemos una abreviatura para la fórmula anterior:

ARITMOQUINEREAR {a'',a'}

Lo que esta fórmula dice, idiomáticamente, es:

> a' es el número Gödel de la fórmula obtenida mediante el aritmoquinereamiento de la fórmula que tiene el número Gödel a''.

Pero esta oración es extensa y desagradable; introduciremos entonces un término conciso y elegante con la misión de sintetizarla: diremos

a' es la *aritmoquinificación* de a''

para significar la misma cosa. Por ejemplo, la aritmoquinificación de 262,111,123,666 es este número inexpresablemente gigantesco:

123,123,123 123,123,123,666,111,123,666

262,111,123,666 veces '123'

(Este es sólo el número Gödel de la fórmula que obtuvimos cuando aritmoquinereamos a = S0.) Podemos hablar sin ninguna dificultad del aritmoquinereamiento dentro de TNT.

El golpe de gracia

Si volvemos a examinar el *Aire sobre la cuerda de G*, veremos que el truco esencialmente necesario para producir autorreferencia a la manera de Quine consiste en quinerear una oración que, ella misma, se refiera al concepto de quinereamiento. No basta con quinerear, ¡se debe quinerear una oración que mencione el quinereamiento! Correcto, entonces: en nuestro caso, el truco paralelo será aritmoquinerear una fórmula que, ella misma, se refiera a la noción de aritmoquinereamiento . . .

Sin más preámbulos, enunciaremos esa fórmula a continuación, y la llamaremos *del tío G*:

~∃a:∃a':<PAR DE PRUEBA TNT{a,a'}∧ARITMOQUINEREAR{a'',a'}>

Se ve claramente cuán profundamente implicada en la conspiración está la aritmoquinificación. Ahora bien, este "tío" tiene, por supuesto, un número Gödel, al cual llamaremos '*u*'. Los pies y la cabeza de la expansión decimal de *u*, e inclusive un pequeñísimo fragmento de su parte media, pueden ser leídos directamente:

u = 223,333,262,636,333,262,163,636,212, . . .,161, . . .,213

En cuanto al resto, sólo habría que saber qué aspecto presentan cuando son enunciadas por entero. Esto es demasiado complejo y, de todas maneras, no viene para nada al caso.

Ahora no necesitamos más que ¡aritmoquinerear al propio tío! Ello implica el "desalojo" de todas las variables libres —de las cuales hay, aquí, exclusivamente una: a''— y la intercalación, en su lugar, del numeral correspondiente a *u*. Tenemos así:

~∃a:∃a':<PAR DE PRUEBA TNT{a,a'} {a,a'}
∧ARITMOQUINEREAR {SSS . . . SSS0/a'',a'}>

u eses

Y esto, créase o no, es la cadena de Gödel, a la cual podemos llamar 'G'. Y hay dos preguntas a las que debemos dar respuesta sin demora; son:

(1) ¿Cuál es el número Gödel de G?
(2) ¿Cuál es la interpretación de G?

Comencemos con la pregunta 1. ¿Cómo elaboramos G? Bueno, tomamos al tío, y lo aritmoquinereamos. Entonces, en virtud de la definición de aritmoquinificación, el número Gödel de G es:

la aritmoquinificación de *u*.

Pasemos a la pregunta 2. Haremos la traducción idiomática de G por etapas, haciéndola gradualmente más comprensible a medida que avancemos. En una primera aproximación, formulamos una traducción bastante literal:

"No existen números a y a' tales que, a un mismo tiempo, (1) formen un par de prueba TNT, y (2) a' sea la aritmoquinificación de *u*."

Ahora bien, ciertamente *hay* un número a' que es la aritmoquinificación de *u*, de modo que el problema debe residir en el otro número, a. Esta observación nos permite reformular la traducción de G como sigue:

"No hay ningún número a que forme un par de prueba TNT con la aritmoquinificación de *u*."

(Este paso, que puede crear confusiones, será explicado más abajo con mayor detalle.) ¿Está a la vista lo que está sucediendo? G está diciendo:

"La fórmula cuyo número Gödel es la aritmoquinificación de *u* no es un teorema de TNT."

Pero —y esto no deberá sorprendernos— esa fórmula no es otra que G; luego, podemos terminar traduciendo G así:

"G no es un teorema de TNT."

O, si se prefiere:

"No soy un teorema de TNT."

Paulatinamente, hemos ido extrayendo una interpretación de alto nivel —una oración de meta-TNT— de lo que originalmente era una interpretación de bajo nivel: una oración de teoría de los números.

¡TNT dice "tío"!

La consecuencia principal de esta sorprendente interpretación ya ha sido esbozada en el Capítulo IX: se trata de la incompletitud de TNT. Repitamos la argumentación:

> ¿G es un teorema TNT? Si es así, entonces debe afirmar una verdad. Pero, ¿qué afirma, en realidad, G? Su propia no teoremidad. En consecuencia, de su teoremidad se seguiría su no teoremidad: una contradicción.
>
> ¿Y qué diremos a propósito de G en tanto que no teorema? Se trata de algo aceptable, en la medida en que no conduce a una contradicción. Ahora, lo que G afirma es la no teoremidad de G; por consiguiente, G afirma *una* verdad. Y, puesto que G no es un teorema, existe (por lo menos) una verdad que no es *un teorema* de TNT.

Explicar esto nos requiere un nuevo paso laborioso. Usaremos un ejemplo similar; veamos esta cadena:

~∃a:∃a':<PAR TORTUGA{a,a'}∧DECIMA POTENCIA{SS0/a'',a'}>

Hay aquí dos abreviaturas de cadenas de TNT, las cuales pueden ser enunciadas por el lector. DECIMA POTENCIA{a'',a'} representa la proposición "a' es la décima potencia de a''". Su traducción idiomática literal es, entonces, la siguiente:

> "No existen números a y a' tales que, a un mismo tiempo, 1) formen un par Tortuga, y 2) a' sea la décima potencia de 2."

Sin embargo, no cabe duda de que *hay* una décima potencia de 2, a saber, 1024. Luego, la cadena está diciendo, en realidad, que:

> "No hay ningún número a que forme un par Tortuga con 1024."

Y esto puede, a su vez, ser reducido así:

"1024 no tiene la propiedad Tortuga."

Lo importante es que hemos conseguido introducir la *descripción* de un número, no su numeral, en un predicado, como consecuencia del empleo de una variable (a') adicionalmente cuantificada. En este caso, lo descripto es el número 1024, como "la décima potencia de 2"; en el caso anterior, es el número descripto como "la aritmoquinificación de *u*".

“Produce no teoremidad cuando es aritmoquinereada”

Hagamos una breve pausa para tomar aliento, y reveamos lo hecho. El mejor medio que percibo para aportar alguna perspectiva es establecer explícitamente una comparación entre las conclusiones anteriores y la versión de Quine de la paradoja de Epiménides. A continuación, pues, un cuadro de correspondencias:

falsedad	⇐⇒	no teoremidad
cita de una expresión	⇐⇒	número Gödel de una cadena
hacer preceder un predicado por un sujeto	⇐⇒	introducir un numeral (o término definido) en una fórmula abierta
hacer preceder un predicado por una expresión entrecomillada	⇐⇒	introducir el número Gödel de una cadena en una fórmula abierta
hacer preceder un predicado por sí mismo, entrecomillado (“quinereamiento”)	⇐⇒	introducir el número Gödel de una fórmula abierta dentro de la fórmula misma (“aritmoquinereamiento”)
produce falsedad cuando es quinereada (un predicado sin sujeto)	⇐⇒	el “tío” de G (una fórmula abierta de TNT)
“produce falsedad cuando es quinereada” (el predicado anterior, entrecomillado)	⇐⇒	el número *u* (el número Gödel de la fórmula abierta anterior)
“produce falsedad cuando es quinereada” produce falsedad cuando es quinereada (oración completa, formada por quinereamiento del predicado anterior)	⇐⇒	G misma (oración de TNT, formada por la inclusión de *u* en el tío; es decir, por aritmoquinereamiento del tío)

Segundo teorema de Gödel

Puesto que la interpretación de G es verdadera, la de su negación, $\sim G$, es falsa. Y sabemos que ningún enunciado falso es derivable a través de TNT. Luego, *ni G ni su negación $\sim G$ pueden ser teoremas de TNT*. Hemos descubierto un “agujero” en nuestro sistema: una proposición indecidible. Surge de aquí una cantidad de ramificaciones, como por ejemplo este curioso hecho que resulta de la indecidibilidad de G: a pesar de que ni G ni $\sim G$ son teoremas, la fórmula $\langle G \vee \sim G \rangle$ es un teorema, porque las reglas del cálculo proposicional nos aseguran que todas las fórmulas bien formadas de la forma $\langle P \vee \sim P \rangle$ son teoremas.

Este es un ejemplo simple de aparente choque entre una afirmación *interior* al sistema y una afirmación *acerca* del sistema, el cual nos lleva a

preguntarnos si el sistema, en realidad, se refleja a sí mismo con exactitud. ¿La "reflexión metamatemática" que existe en el interior de TNT se corresponde adecuadamente con la que desarrollamos nosotros? Este era uno de los interrogantes que intrigaban a Gödel cuando elaboró su trabajo; en particular, le interesaba saber si era posible, a través de esa "reflexión metamatemática", demostrar la coherencia de TNT. Recordemos que se trataba del gran dilema filosófico de la época: cómo demostrar la coherencia de un sistema. Gödel descubrió un recurso sencillo para expresar el enunciado "TNT es coherente" a través de una fórmula TNT; después de ello, mostró que esta fórmula (y toda otra que expresara la misma idea) es un teorema de TNT solamente con una condición: la de que TNT sea *incoherente*. Esta maligna conclusión significó un severo revés para los optimistas que aguardaban el hallazgo de una demostración que probase rigurosamente la carencia de contradicciones de la matemática.

¿Cómo expresar el enunciado "TNT es coherente" dentro de TNT? Ello gira en torno al simple hecho siguiente: la incoherencia significa que dos fórmulas, *x* y∼*x*, una de las cuales es la negación de la otra, son ambas teoremas. Pero si tanto *x* como∼*x* son teoremas, entonces, de acuerdo al cálculo proposicional, *todas* las fórmulas bien formadas son teoremas. Así, para mostrar la coherencia de TNT, sería suficiente exhibir una sola oración de TNT de la cual se pueda demostrar que es un no teorema. En consecuencia, una manera de expresar "TNT es coherente" consiste en decir: "La fórmula 0 = 0 no es un teorema de TNT". Esto ya fue propuesto como ejercicio escasas páginas atrás. La traducción es:

∼∃a:PAR DE PRUEBA TNT {a,SSSSS . . . . SSSSS0/a'}

223,666,111,666 eses

Es posible mostrar, por medio de un razonamiento extenso pero impecablemente transparente, que —en tanto TNT sea coherente— este decreto de coherencia por parte de TNT no es un teorema de TNT. Luego, las facultades de introspección de TNT son grandes cuando se aplican a expresar cosas, pero sumamente débiles cuando se aplican a demostrarlas. Esta es una conclusión muy incitante si se la desplaza, por vía metafórica, al problema humano del autoconocimiento.

TNT es ω-incompleto

¿Y cuál es la variedad de incompletitud de la cual "goza" TNT? Veremos que la incompletitud de TNT es de la variedad "omega", definida en el Capítulo VIII. Esto significa que hay una familia piramidal infinita de cadenas, todas las cuales son teoremas, pero cuya "cadena sintetizadora" es un no teorema. Es sencillo mostrar la cadena sintetizadora que es un no teorema:

∀a:~∃a′:<PAR DE PRUEBA TNT{a,a′}∧
ARITMOQUINEREAR{SSS . . . SSS0/a″,a′}>

u eses

Para comprender por qué esta cadena es un no teorema, conviene reparar en que es extremadamente similar a la propia G: en realidad, G puede ser obtenida, a partir de ésta, en un solo paso (de acuerdo a la Regla de Intercambio de TNT). En consecuencia, si fuera un teorema, también lo sería G. Sin embargo, como G no es un teorema, ninguna de ambas puede serlo.

Necesitamos mostrar ahora que todas las cadenas de la familia piramidal *son* teoremas. Podemos enunciarlas con bastante facilidad:

u eses

~∃a′:<PAR DE PRUEBA TNT{0/a,a′}∧ARITMOQUINEREAR{SSS . . . SSS0/a″,a′}>
~∃a′:<PAR DE PRUEBA TNT{S0/a,a′}∧ARITMOQUINEREAR{SSS . . . SSS0/a″,a′}>
~∃a′:<PAR DE PRUEBA TNT{SS0/a,a′}∧ARITMOQUINEREAR{SSS . . . SSS0/a″,a′}>
~∃a′:<PAR DE PRUEBA TNT{SSS0/a,á}∧ARITMOQUINEREAR{SSS . . . SSS0/a″,a′}>
. . .

¿Qué afirma cada una de ellas? Sus respectivas traducciones, siguiendo el orden, son las siguientes:

"0 y la aritmoquinificación de *u* no forman un par de prueba TNT."
"1 y la aritmoquinificación de *u* no forman un par de prueba TNT."
"2 y la aritmoquinificación de *u* no forman un par de prueba TNT."
"3 y la aritmoquinificación de *u* no forman un par de prueba TNT."
. . .

Ahora bien, cada una de estas afirmaciones hace referencia a si *dos* enteros en particular forman un par de prueba o no. (En cambio, G se refiere a si *un* entero en particular es un número teorema o no.) Y como G es un no teorema, *ningún* entero forma un par de prueba con el número Gödel de G. En consecuencia, todos los enunciados de la familia son verdaderos. Pero el centro del problema estriba en que la propiedad de ser un par de prueba es recursiva primitiva, y por ende *representada*, de manera que, siendo verdaderos, los enunciados de la lista de más arriba deben *traducirse* a teoremas de TNT . . . lo cual significa que todos los miembros de nuestra infinita familia piramidal son teoremas. Y esto muestra por qué TNT es ω-incompleto.

Dos formas diferentes de taponar el agujero

Puesto que la interpretación de G es verdadera, la interpretación de su negación, ~G, es falsa. Y, aplicando el supuesto de que TNT es coherente, sabemos que a través de TNT no es derivable ningún enunciado falso. Luego, ni G ni su negación ~G son teoremas de TNT. Hemos descubierto un agujero en nuestro sistema: una proposición indecidible. Pero ello no tiene por qué alarmarnos, si nos apartamos lo suficiente de la filosofía como para reconocer que se trata de un síntoma determinado. Esto significa que TNT puede ser extendido, del mismo modo que pudo serlo la geometría absoluta. E, igual que ésta, puede ser extendido en dos direcciones distintas, *habitual* una —lo cual se corresponde con la extensión de la geometría absoluta en la dirección euclidiana—, *inhabitual* la otra —lo cual se corresponde, por supuesto, con la extensión de la geometría absoluta en la dirección no euclidiana—. El primer tipo de extensión involucraría:

la adición de G como nuevo axioma.

Esta propuesta parece más bien inofensiva y tal vez, inclusive, provechosa, puesto que G, al fin y al cabo, afirma una cosa verdadera con relación al sistema de los números naturales. ¿Pero qué ocurre con el tipo inhabitual de extensión? Si su caso es paralelo, en alguna medida, al del postulado paralelo, tendría que involucrar:

la adición de la negación de G como nuevo axioma.

¿Pero cómo es posible que consideremos, siquiera, algo tan repugnante y espantoso? En definitiva, y parafraseando las célebres palabras de Girolamo Saccheri: lo que dice ~G, ¿no es acaso "repugnante a la naturaleza de los números naturales"?

Números sobrenaturales

Espero que lo irónico de la cita anterior toque al lector. Lo que sucede cabalmente con la investigación geométrica de Saccheri es que la inició a partir de una noción prestablecida acerca de lo verdadero y lo no verdadero, y la llevó adelante solamente para probar lo que había afirmado como verdadero al comenzar. A pesar de lo talentoso de su enfoque —que implicó la negación del quinto postulado, y en consecuencia la demostración de muchas proposiciones "repugnantes" de la geometría que sobrevino a ello— Saccheri jamás tomó en cuenta la posibilidad de considerar de manera diferente los puntos y las líneas. Debemos ser muy prudentes, entonces, para no repetir su famosa equivocación. Tenemos que analizar

objetivamente, en la medida en que nos sea posible hacerlo, qué significaría agregar ~G como axioma de TNT. Pensemos solamente en lo que sería la matemática de la actualidad si a nadie se le hubiese ocurrido nunca agregar axiomas como los siguientes:

∃a:(a + a) = S0
∃a:Sa = 0
∃a: (a·a) = SS0
∃a:S(a·a) = 0

Cada uno de ellos es "repugnante a la naturaleza de los sistemas numéricos conocidos hasta entonces", cada uno de ellos brinda una profunda y maravillosa *extensión* de la noción de número entero: números racionales, números negativos, números irracionales, números imaginarios. Una posibilidad semejante es la que ~G está tratando de hacernos percibir. Ahora bien, cada nueva extensión de la noción de número fue recibida, en el pasado, con burlas y rechiflas; tal estrépito puede ser advertido muy particularmente en las denominaciones asignadas a los desagradables recién llegados: "números irracionales", "números imaginarios". Acogiéndonos a esta tradición, llamaremos, a los números que ~G nos está anunciando, *números sobrenaturales*, evidenciando así nuestra impresión de que los mismos transgreden todas las nociones amparadas por la sensatez y el sentido común.

Si es que vamos a incorporar a ~G como sexto axioma de TNT, deberíamos entender mejor cómo fue posible que pudiera coexistir, en un mismo sistema, con la infinita familia piramidal que acabamos de comentar. Llevando las cosas a términos claros, ~G dice:

"Existe *algún* número que forma un par de prueba TNT con la aritmoquinificación de *u*."

Sin embargo los diversos miembros de la familia piramidal afirman, sucesivamente:

"0 no es ese número"
"1 no es ese número"
"2 no es ese número"
.
.
.

Esto es bastante confuso, porque tiene la apariencia de una total contradicción (y por eso se la llama "ω-incoherencia"). En la raíz de nuestra confusión —de modo muy similar a lo sucedido en el caso del desdoblamiento de la geometría— se esconde nuestra tenaz resistencia a adoptar una interpretación nueva de los símbolos, pese a que sabemos perfectamente

que el sistema es un sistema modificado. Queremos escapar sin reinterpretar *ningún* símbolo . . . y, por supuesto, eso se demostrará imposible.

La reconciliación se produce cuando reinterpretamos ∃ como "Existe un número natural *generalizado*", y no como "Existe un número natural". Al proceder así, también reinterpretaremos ∀ del modo correspondiente. Esto significa que abrimos la puerta a algunos otros números, además de los números naturales: son los *números sobrenaturales*. Los naturales y los sobrenaturales forman, en conjunto, la totalidad de los *naturales generalizados*.

La aparente contradicción, ahora, se desvanece en el aire; la familia piramidal sigue diciendo, igual que antes: "Ningún número *natural* forma un par de prueba TNT con la aritmoquinificación de *u*", pero no dice nada acerca de los números sobrenaturales, pues no hay *numerales* para ellos. Por su parte, ahora ~G dice: "Existe un número natural *generalizado* que forma un par de prueba TNT con la aritmoquinificación de *u*". Es manifiesto que, tomados en conjunto, la familia y ~G nos están diciendo algo: que hay un número *sobrenatural* que forma un par de prueba TNT con la aritmoquinificación de *u*. Eso es todo: ya no hay contradicción; TNT + ~G es un sistema coherente, bajo una interpretación que incorpora a los números sobrenaturales.

Puesto que ya hemos acordado extender la interpretación de los dos cuantificadores, ello implica que cualquier teorema que comprenda uno u otro de ellos tendrá una significación extendida. Por ejemplo, veamos el teorema de la conmutatividad:

∀a: ∀a': (a + a') = (a' + a)

Lo que ahora nos dice es que la suma es conmutativa con respecto a todos los números naturales *generalizados*; en otras palabras, no sólo con respecto a los números naturales sino también con respecto a los sobrenaturales. De igual forma, el teorema TNT que dice "2 no es el cuadrado de un número natural":

~∃a:(a · a) = SS0

Este teorema nos dice ahora que 2 tampoco es el cuadrado de un número sobrenatural. En realidad, los números sobrenaturales comparten todas las propiedades de los números naturales, a condición de que dichas propiedades nos sean presentadas a través de teoremas de TNT. Dicho de otro modo, todo lo que pueda ser *formalmente demostrado* acerca de los números naturales vale también, por tal causa, para los números sobrenaturales. Esto significa, particularmente, que los números sobrenaturales no coinciden con nada de lo que ya nos es familiar, como las fracciones, los números negativos, los complejos o cosas por el estilo. Por el contrario, lo más conveniente es visualizar los números sobrenaturales como enteros

mayores que todos los números naturales: como enteros *infinitamente grandes*. He aquí la cuestión central: pese a que los teoremas de TNT pueden excluir los números negativos, las fracciones, a los números irracionales y los complejos, no hay manera de que excluyan los enteros infinitamente grandes. El problema es que tampoco hay manera de *expresar* el enunciado "No hay cantidades infinitas".

Al principio, esto suena sumamente extraño. ¿Cómo es exactamente de grande el número que forma un par de prueba TNT con el número Gödel de G? (Llamémoslo '*I*', por ningún motivo en particular.) Lamentablemente, carecemos de un vocabulario adecuado para la descripción de las dimensiones de los enteros infinitamente grandes, por lo cual dudo de poder transmitir una idea acerca de la magnitud de *I*. ¿Y cómo es de grande *i* (la raíz cuadrada de − 1)? Su dimensión no puede ser imaginada en términos de las dimensiones de los números naturales ordinarios. No se puede decir, "Bueno, *i* es más o menos la mitad de 14 y 9/10 es como 24". Se tiene que decir, "*i* al cuadrado es − 1", y dejarlo aproximadamente así. Ciertas palabras de Abraham Lincoln vienen muy al caso aquí; se le preguntó, "¿Cómo deberían ser de largas las piernas de un hombre?", su respuesta fue la siguiente: "Lo suficiente como para que lleguen al suelo." Algo así es lo que cabe responder ante la pregunta referida al tamaño de *I*: debe tener exactamente la dimensión de *un número que especifique la estructura de una demostración de G*, ni más, ni menos.

Por supuesto, todo teorema de TNT tiene muchas derivaciones diferentes, y en consecuencia se podría objetar que mi caracterización de *I* no es la única posible. Así es, sin duda, pero el paralelo con *i* —la raíz cuadrada de −1— se mantiene en vigencia. Es decir: recordemos que hay otro número cuyo cuadrado también es −1, es −*i*. Pero *i* y −*i* no son el mismo número, sólo tienen una propiedad en común. ¡El único inconveniente es que se trata de la propiedad que los define! Tenemos que optar por uno de ambos, no importa cuál, y llamarlo "*i*". En realidad, no hay modo de designarlos por separado, así que, hasta donde sabemos, se le podría haber estado llamando "*i*" durante todos estos siglos al erróneo, sin que de ello resultase ninguna diferencia. Ahora bien, tal como *i*, *I* tampoco ha sido definido de forma exclusiva; entonces, sólo debe ser considerado como cierto número sobrenatural específico de entre los muchos posibles que forman pares de prueba TNT con la aritmoquinificación de *u*.

Los teoremas sobrenaturales tienen derivaciones infinitamente largas

Todavía no hemos hecho frente a las consecuencias de incorporar a ~G como axioma. Lo hemos mencionado, pero sin desarrollarlo. La cuestión radica en que ~G afirma que *G tiene una demostración*: ¿cómo puede subsistir un sistema, si uno de sus axiomas afirma que su propia negación

puede ser demostrada? ¡Ahora sí que estamos listos! Bueno, no es tan grave como parecería: en tanto construyamos únicamente demostraciones *finitas*, G nunca quedará probada; en consecuencia, no se producirá ninguna colisión catastrófica entre G y su negación ~G. El número sobrenatural *I* no será causante de ningún desastre.

Sin embargo, nos tendremos que hacer ahora a la idea de que sólo ~G afirma una verdad ("G tiene una demostración"), mientras que G afirma una falsedad ("G no tiene demostración"). En la teoría de los números habitual esto es al revés, pero allí no hay ninguna clase de números sobrenaturales. Adviértase que un teorema sobrenatural de TNT —particularmente, G— puede afirmar una falsedad, pero todos los teoremas naturales siguen afirmando verdades.

Suma y multiplicación sobrenaturales

Hay un hecho curioso e inesperado con respecto a los sobrenaturales que me gustaría indicar, sin agregar demostración (no la conozco, tampoco). Este hecho puede hacernos recordar el principio de incertidumbre de Heisenberg, en el campo de la mecánica cuántica. Resulta que los sobrenaturales se pueden "indexar", de un modo sencillo y común, mediante la vinculación de cada número sobrenatural con un terceto de enteros corrientes (incluidos los negativos). Así, nuestro número sobrenatural inicial, *I*, puede tener el conjunto índice (9,-8,3), y su subsiguiente, *I* + 1, tendría el conjunto índice (9,-8,4). Pero no hay un solo medio de asignación de índices a los sobrenaturales: existen diferentes métodos, que ofrecen diferentes ventajas y desventajas. En ciertos esquemas de indexación, es muy fácil calcular el triplete índice correspondiente a la *suma* de dos sobrenaturales, dados los índices de los dos números que han de ser sumados. En otros esquemas, es muy fácil calcular el triplete índice del *producto* de dos sobrenaturales, dados los índices de los dos números que han de ser multiplicados. Sin embargo, en *ningún* esquema es posible calcular ambas cosas; más exactamente: si el índice de la suma puede ser calculado por medio de una función recursiva, el índice del producto, entonces, no será una función recursiva; inversamente, si el índice del producto es una función recursiva, el índice de la suma no lo será. En consecuencia, los niños de las escuelas sobrenaturales que aprendan sus tablas sobrenaturales de sumar deberán ser disculpados si no conocen bien las tablas que les recuerdan sus tareas y horarios . . . y viceversa . . . No se pueden conocer ambas cosas al mismo tiempo . . .

Los sobrenaturales son útiles. . .

Se puede ir más allá de la teoría de los números de los sobrenaturales, y

plantearse fracciones sobrenaturales (razones entre dos sobrenaturales), números reales sobrenaturales, etc. De hecho, el cálculo puede ser colocado sobre nuevas bases a través de la utilización de la noción de números reales sobrenaturales. Los infinitesimales como *dx* y *dy*, esos viejos cocos de los matemáticos, pueden ser fundamentados a satisfacción considerándolos recíprocos de números reales infinitamente grandes . . . Ciertos teoremas del análisis superior pueden ser demostrados más intuitivamente con la ayuda de un "análisis inhabitual".

. . . pero, ¿son legítimos?

La teoría inhabitual de los números es algo que desorienta cuando se produce nuestro primer contacto con ella. Sin embargo, también la geometría no euclidiana es un tema desconcertante. En ambos casos, nos sentimos poderosamente inclinados a preguntar: "¿Pero cuál de las dos teorías en competencia es correcta? ¿Cuál es *la verdadera*?" En cierto sentido, no hay respuesta a semejante pregunta (sin embargo, en otro sentido —que comentaremos más adelante— sí hay una respuesta). La razón para que *no* haya respuesta es que las teorías opuestas, aunque emplean los mismos términos, no hablan de los mismos conceptos. Por consiguiente, la oposición es superficial, como ocurre entre las geometrías euclidiana y no euclidiana. Dentro de la geometría, las palabras "punto", "línea", etc. son términos indefinidos, y su significación es determinada por los sistemas axiomáticos en cuyo interior sean usadas.

Lo mismo ocurre en la teoría de los números: cuando decidimos formalizar TNT, preseleccionamos los términos que usaríamos como palabras de interpretación; por ejemplo, palabras tales como "número", "más", "veces", etc. Al abordar la empresa de la formalización, nos estamos obligando a aceptar cualquier significación pasiva que estos términos lleguen a asumir. Pero, igual que Saccheri, no teníamos prevista ninguna sorpresa; creíamos saber en qué consistía la verdadera, la legítima, la única teoría de los números; no sabíamos que habría ciertas preguntas relativas a números que TNT dejaría sin responder y que, en consecuencia, podrían ser contestadas *ad libitum* por extensiones de TNT que adoptasen diferentes direcciones. Luego, no hay fundamentos que permitan sostener que la teoría de los números es "realmente" de este modo o de aquél, tal cual como, frente a la raíz cuadrada de −1, sentimos reparos en sostener que "realmente" existe, o bien que "realmente" no existe.

Bifurcaciones en geometría, y los físicos

Hay una argumentación contra lo expuesto precedentemente que puede ser planteada y, es más, quizá debiera serlo. Supongamos que las experi-

mentaciones en el mundo físico real pudieran ser explicadas más económicamente en función de una versión particular de la geometría que en función de cualquier otra. Entonces, podría tener sentido decir que esa geometría es "verdadera". Desde el punto de vista de un físico que necesita utilizar la geometría "correcta", tiene sentido la distinción entre la geometría "verdadera", y las restantes geometrías. Pero esto no puede ser tomado en forma demasiado simplista. Los físicos siempre están tratando con aproximaciones e idealizaciones de situaciones; por ejemplo, mi propio trabajo de doctorado, aludido en el Capítulo V, se basó en una extrema idealización del problema de un cristal dentro de un campo magnético. La matemática que surgió de allí tuvo un alto grado de belleza y simetría. A pesar de —o más bien, a causa de— la artificialidad del modelo, en la representación gráfica resaltaron destacadamente algunos aspectos fundamentales. Estos aspectos, *a posteriori*, sugieren determinadas conjeturas acerca del tipo de cosas que pueden ocurrir en situaciones más realistas; sin embargo, de no haber sido por las suposiciones simplificadoras que originaron mi gráfica, jamás podrían haberse producido aquellas profundizaciones. Este tipo de circunstancia puede apreciarse repetidamente en la física, donde un físico emplea una situación "irreal" para aprender acerca de rasgos profundamente ocultos de la realidad. En consecuencia, es necesario ser extraordinariamente cauto al decir que la clase de geometría que elijan los físicos constituiría "la geometría verdadera" porque, en rigor, los físicos optarán siempre por una variedad de geometrías, y aplicarán a cada situación la que parezca más simple y más conveniente.

Además —y tal vez esto sea aun más pertinente— los físicos no estudian solamente el espacio 3-D donde vivimos. Hay familias enteras de "espacios abstractos", dentro de los cuales tienen lugar los cálculos físicos, espacios dotados de propiedades geométricas totalmente diferentes de las vinculadas con el espacio físico que habitamos. ¿Quién podrá decir, entonces, que la "geometría verdadera" es la definida por el espacio dentro del cual Urano y Neptuno giran en torno al Sol? Hay un "espacio de Hilbert", donde ondulan las funciones de onda de la mecánica cuántica; hay un "espacio de impulsos", donde residen los componentes Fourier; hay un "espacio recíproco", donde brincan los vectores de onda; hay un "espacio fásico", donde zumban las configuraciones de grandes cantidades de partículas, y así siguiendo. No hay absolutamente ninguna razón para que las geometrías de todos estos espacios tengan que ser la misma; en realidad, ¡es posible que no puedan ser la misma! Así, para los físicos, es esencial y vital que existan las diferentes y "opuestas" geometrías.

Bifurcaciones en teoría de los números, y los banqueros

Lo anterior, en cuanto a la geometría, ¿y en cuanto a la teoría de los nú-

meros?, ¿también es vital y esencial que coexistan diferentes teorías de los números? Si uno se lo preguntase a un funcionario de un banco, obtendría, es mi impresión, muestras de horror y de incredulidad. ¿Cómo es posible que 2 y 2 sumen otra cosa que no sea 4? Además, si 2 más 2 no fueran 4, ¿la economía mundial no entraría en colapso de inmediato, ante la insufrible confusión que sobrevendría? No es así, en realidad; en primer lugar, la teoría inhabitual de los números no amenaza la milenaria noción de que 2 más 2 es igual a 4. Sólo se aparta de la teoría habitual de los números en la forma en que maneja el concepto de infinito. Al fin y al cabo, ¡*todo teorema de TNT sigue siendo un teorema en cualquier extensión de TNT*! Los banqueros no tienen, pues, por qué pensar con desesperación en el caos que se desate cuando la teoría inhabitual de los números asuma el control.

De todos modos, albergar el temor de que los hechos acostumbrados sufran transformaciones revela una incomprensión de la relación existente entre la matemática y el mundo real. La matemática sólo responde a nuestras preguntas referidas al mundo real *después* de que hemos dado el paso determinante de elegir qué clase de matemática vamos a utilizar. Aun cuando existiera una teoría de los números opuesta que empleara los símbolos '2', '3' y '+', y dentro de la cual un teorema dijera "2 + 2 = 3", ¡no habría mayor motivo para que los banqueros optaran por tal teoría! Esta no se amolda a la manera en que funciona la moneda: adaptamos nuestra matemática al mundo, y no al revés. Por ejemplo, no aplicamos la teoría de los números a los sistemas nube, porque el concepto mismo de número entero sería de aplicación inadecuada; habría una nube, y luego otra, y a continuación, tal vez, se fundirían en una sola en lugar de mantenerse como dos nubes, y no habría más que esa sola nube. Esto no prueba que 1 más 1 sea igual a 1, sino que nuestro concepto teórico-numérico de "uno" no es aplicable, en todo su poderío, al cómputo de nubes.

Bifurcaciones en teoría de los números, y los metamatemáticos

De manera pues que los banqueros, los enumeradores de nubes, y casi todos los demás, no tenemos por qué preocuparnos por el advenimiento de los números sobrenaturales: éstos no han de afectar ni remotamente nuestra percepción cotidiana del mundo. Los únicos que sí podrían sentirse un tanto inquietos son aquellos cuya labor depende, en una medida sustancial, de la naturaleza de las entidades infinitas. No constituyen un número dilatado, pero los lógicos matemáticos son miembros de esa categoría. ¿Y cómo puede afectarlos la existencia de una bifurcación en la teoría de los números? Bueno, la teoría de los números llena dos papeles en la lógica: (1) cuando es axiomatizada, es un *objeto de estudio*; (2) cuando es utilizada informalmente, es una *herramienta* indispensable para

la investigación de sistemas formales. Otra vez estamos frente a la distinción uso-mención: en el papel (1), la teoría de los números es mencionada; en el papel (2), es usada.

Ahora bien, los matemáticos han juzgado que la teoría de los números es aplicable al estudio de los sistemas formales, aunque no al cómputo de nubes, así como los banqueros han juzgado que la aritmética de los números reales es aplicable a sus transacciones. Se trata de juicios *extramatemáticos*, y muestra que los procesos de pensamiento abarcados por los hechos matemáticos, y tal como ocurre en otras áreas, involucran "jerarquías enredadas", en las cuales los pensamientos de un nivel pueden afectar los pensamientos de cualquier otro nivel; los niveles no están nítidamente separados, como nos lo haría creer la versión formalista acerca de qué es la matemática.

La filosofía formalista sostiene que los matemáticos tratan únicamente con símbolos abstractos, y que deberían despreocuparse de si tales símbolos son aplicables a la realidad o tienen vinculaciones con ella. Pero esto implica una imagen sumamente distorsionada, y en ninguna parte ello adquiere mayor claridad que en la metamatemática. Si la teoría de los números es *usada* para ayudar a obtener conocimiento fáctico de los sistemas formales, los metamatemáticos están mostrando tácitamente, entonces, su convicción de que esas cosas etéreas llamadas "números naturales" son concretamente *parte de la realidad*, y no sólo invenciones de la imaginación. Por este motivo señalé más atrás, entre paréntesis, que en cierto sentido *hay* una respuesta a la pregunta relativa a cuál versión de la teoría de los números es "verdadera". Aquí está el meollo del problema: los lógicos matemáticos deben decidir en cuál teoría de los números han de depositar su confianza; en particular, no pueden permanecer neutrales en la cuestión de la existencia o inexistencia de los números sobrenaturales, pues cada una de estas dos posiciones aporta diferentes respuestas a las interrogaciones metamatemáticas.

Por ejemplo, veamos la pregunta: "¿~G es finitamente derivable en TNT?" En rigor, nadie conoce la respuesta; sin embargo, casi todos los lógicos matemáticos contestarían sin vacilar que no. La intuición que origina tal actitud se basa en el hecho de que si ~G fuera un teorema, TNT sería ω-incoherente, y esto obligaría a aceptar los sobrenaturales si se quiere interpretar significativamente a TNT: semejante perspectiva es de muy difícil asimilación para mucha gente. Al fin y al cabo, cuando inventamos TNT no planeamos ni esperábamos que los sobrenaturales formasen parte de éste. Es decir, pensamos —la mayoría, al menos— que es posible elaborar una formalización de teoría de los números que no nos fuerce a creer que los números sobrenaturales son tan enteramente reales como los naturales. Es aquella intuición acerca de la realidad lo que determina en cuál de los "brazos" de la teoría de los números depositará su fe el matemático cuando llega la hora de la verdad. Pero esta fe puede ser errónea. Tal vez toda formalización coherente de teoría de los números que imagi-

nen los seres humanos implique la existencia de sobrenaturales, al ser ω-incoherente: es una suposición muy insólita, pero concebible.

Si éste fuera el caso —lo pongo en duda, pero no se dispone de ninguna contraprueba— G no tendría que ser indecidible; de hecho, podría no haber en absoluto fórmulas indecidibles de TNT: habría simplemente una teoría de los números sin bifurcaciones, la cual incluiría, necesariamente, los sobrenaturales. No es esto lo que aguardan los lógicos matemáticos, pero se trata de algo que no debe ser rechazado sin análisis. Habitualmente, los lógicos matemáticos creen que TNT —y sistemas similares— es ω-coherente, y que la cadena Gödel que pueda construirse dentro suyo es indecidible en el interior del sistema. Esto significa que ellos pueden adoptar la resolución de agregar la cadena, o su negación, como axioma.

El décimo problema de Hilbert y la Tortuga

Me gustaría concluir este capítulo mencionando una extensión del Teorema de Gödel (este tema es cubierto de manera más completa por el artículo de Davis y Hersh: "Hilbert's Tenth Problem"; véase la Bibliografía). Para ello, debo definir qué es una ecuación diofantina: es una ecuación en la cual un polinomio al que se han fijado coeficientes y exponentes enteros es puesto en equivalencia con cero. Por ejemplo:

$$a = 0$$

y

$$5x + 13y - 1 = 0$$

y

$$5p^5 + 17q^{17} - 177 = 0$$

y

$$a^{123,666,111,666} + b^{123,666,111,666} - c^{123,666,111,666} = 0$$

Todas las anteriores son ecuaciones diofantinas. En general, es sumamente difícil saber si una determinada ecuación diofantina tiene o no solución en enteros. Por algo, en una célebre conferencia que tuvo lugar a comienzos de siglo, Hilbert pidió a los matemáticos que tratasen de hallar un algoritmo general que permitiese determinar, a través de un número finito de pasos, si una ecuación diofantina dada tiene o no solución en enteros. ¡Poco sospechaba que semejante algoritmo no existe!

Pensemos ahora en la simplificación de G. Se ha mostrado que, siempre que se cuenta con una teoría formal de los números lo suficientemente poderosa, dotada de una numeración Gödel, hay una ecuación diofantina que es equivalente a G. La equivalencia reside en el hecho de que esta ecuación, cuando es interpretada en un nivel metamatemático, afirma de sí misma que no tiene solución. A la inversa: si se le encuentra una solución, ¡a partir de ésta se podría construir el número Gödel de una demostración, dentro del sistema, de que la ecuación no tiene solución! Es lo que hizo la Tortuga en el *Preludio*, utilizando la ecuación de Fermat como ecuación diofantina. ¡Es hermoso saber que, cuando se procede así, es posible recuperar el sonido de Bach a partir de las moléculas del aire!

Cantatatata. . . de cumpleaños

Un bello día de mayo se encuentran en el bosque, mientras hacían sus respectivos paseos, la Tortuga y Aquiles. Este último, muy elegantemente vestido, está intentando danzar al son de una tonada que él mismo canturrea. Sobre su chaqueta, luce un enorme gafete con las palabras: "¡Hoy es mi cumpleaños!".

Tortuga: Eh, Aquiles, ¿qué es lo que lo tiene tan contento? ¿Será hoy su cumpleaños, por casualidad?

Aquiles: ¡Sí, sí! ¡Sí, así es, hoy es mi cumpleaños!

Tortuga: Me lo suponía, teniendo en cuenta ese gafete que se ha puesto, y también porque, si no me equivoco, está usted cantando una melodía perteneciente a la Cantata de Cumpleaños, compuesta por Bach en 1727 con motivo del quincuagésimo séptimo onomástico de Augusto, Rey de Sajonia.

Aquiles: Está usted en lo cierto. Y el cumpleaños de Augusto coincide con el mío, de modo que ESTA Cantata de Cumpleaños tiene una significación doble. Pero no le diré cuántos años cumplo.

Tortuga: Oh, me parece muy bien. Sin embargo, hay otra cosa que querría saber. Con base en todo lo que usted me acaba de decir, ¿sería correcto deducir que hoy es su cumpleaños?

Aquiles: Sí, sí, así es. Hoy ES mi cumpleaños.

Tortuga: Excelente. Eso es lo que yo presumía. En consecuencia, DEDUCIRE que hoy es su cumpleaños, salvo . . .

Aquiles: ¿. . . salvo qué?

Tortuga: Salvo que tal vez se trate de una conclusión prematura o apresurada, ¿sabe? Y, en verdad, a las Tortugas no nos agrada saltar a conclusiones precipitadas. (Saltar no nos gusta nada, y mucho menos a conclusiones precipitadas.) Así que permítame preguntarle, tomando en consideración lo consciente que soy de su apego al pensamiento lógico, si sería razonable deducir lógicamente, a partir de las oraciones precedentes, que hoy es realmente su cumpleaños.

Aquiles: Creo detectar un patrón en sus preguntas, señora. Sin embargo, en lugar de ponerme yo a saltar hacia conclusiones apuradas, tomaré su pregunta al pie de la letra, y la responderé en forma directa. La respuesta es: SI.

Tortuga: ¡Magnífico! ¡Magnífico! Entonces sólo me resta saber una cosa más, para estar cabalmente segura de que hoy es . . .

Aquiles: Sí, sí, sí, sí, . . . Ya puedo ver la línea que sigue su interrogatorio, señora Tortuga. Sabrá usted que ya no soy tan ingenuo como cuando discutíamos acerca de la prueba de Euclides, hace poco tiempo.

Tortuga: ¡Cómo! ¿Quién pudo pensar en alguna oportunidad que usted fuese ingenuo? Todo lo contrario: yo lo considero a usted un conocedor experto de las formas del pensamiento lógico, una autoridad en la ciencia de las deducciones válidas, un manantial de sapiencia en materia de métodos legítimos de razonamiento . . . A decir verdad, Aquiles, usted es, en mi opinión, un auténtico titán en el arte de la reflexión racional. Es por eso, exclusivamente, que yo le puedo preguntar: "¿Las oraciones precedentes presentan suficiente evidencia como para que yo deba concluir, sin lugar a ninguna duda ulterior, que hoy es su cumpleaños?"

Aquiles: El peso de sus palabras me aplasta, señora; me agobia de placer, quiero decir. Pero estoy sorprendido por el carácter repetitivo de su interrogatorio . . . En mi opinión, usted, lo mismo que yo, podría haber respondido 'sí' en cada ocasión.

Tortuga: Sí que podría haberlo hecho, Aquiles. Pero fíjese, ello habría significado formular una Conjetura Indómita, y las Tortugas abominamos las Conjeturas Indómitas. Las Tortugas enunciamos únicamente Conjeturas Domesticadas. Ah, sí . . . el poderío de la Conjetura Domesticada . . . Usted no tiene idea de la cantidad de gente que fracasa en la tarea de tomar en cuenta todos los Factores Pertinentes, cuando está elaborando una conjetura.

Aquiles: Me parece que hay sólo un factor pertinente en este galimatías: mi primera enunciación.

Tortuga: Oh, sin la menor duda, ése es por lo menos UNO de los factores que se han de tomar en cuenta. Yo diría . . . pues, ¿no supondrá usted que yo subestimo la Lógica, esa reverenciada ciencia de los antiguos, verdad? La Lógica es siempre un Factor Pertinente en la formulación de Conjeturas Domesticadas, y ya que tengo a mi lado a un afamado especialista en Lógica, creo que nada es más Lógico que servirme de esa circunstancia, y confirmar mis presentimientos preguntándole directamente a él si mis intuiciones son correctas. De manera que, en definitiva, permítame preguntarle, sin ningún género de ambages: "¿Las oraciones precedentes me permiten concluir, sin lugar a la menor duda, que Hoy es su Cumpleaños?

Aquiles: Una vez más: SI. Pero hablando con franqueza, tengo la nítida impresión de que usted misma podría haber proporcionado esa respuesta, y en todas las ocasiones anteriores.

Tortuga: ¡Cómo me duelen sus palabras! ¡Ojalá tuviera yo la sabiduría que sugiere su insinuación! Pero no soy más que una mortal Tortuga, profundamente ignorante, y deseosa de tomar en consideración todos los Factores Pertinentes; por eso necesitaba saber las respuestas a todas aquellas preguntas.

Aquiles: Bueno pues, permítame dejar en claro el asunto de una vez por todas. La respuesta a todas las preguntas precedentes, y a todas las que en el futuro me formule usted dentro de la misma línea, es simplemente ésta: SI.

Tortuga: ¡Qué maravilla! De un soplo, ha conjurado usted todo el embrollo, con su habitual modalidad imaginativa. Espero que no tenga inconveniente si llamo a este ingenioso ardid un ESQUEMA DE RESPUESTA. Este enrolla las respuestas-sí en una misma bola. De hecho, apareciendo como lo hace al final de la línea, merece la denominación "Esquema de Respuesta Omega", puesto que 'ω' es la última letra del alfabeto griego . . . ¡como si usted necesitara que yo le aclare ESTO!

Aquiles: No me preocupa el nombre que usted le ponga. Lo único que siento es alivio, ya que usted por fin ha aceptado que hoy es mi cumpleaños, por lo cual ya podemos pasar a otro tema . . . por ejemplo, el de qué regalo me hará usted.

Tortuga: Momentito . . . no tan de prisa. ACEPTARE que es su cumpleaños, con una condición.

Aquiles: ¿Cuál? ¿La de que no le pida un regalo?

Tortuga: En absoluto. La verdad sea dicha, Aquiles, tengo previsto agasajarlo con una grata comida de cumpleaños, siempre que, simplemente, yo esté convencida de que el conocimiento simultáneo de todas esas respuestas-sí (tal como es aportado por el Esquema de Respuesta ω) me permite pasar directamente y sin nuevas dilaciones a la conclusión de que hoy es su cumpleaños. Tal es el caso, ¿verdad?

Aquiles: Sí, por supuesto.

Tortuga: Perfecto. Y ahora, tengo respuesta-sí $\omega + 1$. Así armada, puedo pasar a admitir la hipótesis de que hoy es su cumpleaños, si es que es válido proceder de este modo. ¿Sería usted tan amable de aconsejarme al respecto, Aquiles?

Aquiles: ¿Qué es esto? Creía haber detectado su infinita maquinación. Resulta que ahora respuesta $\omega + 1$ no le satisface? Está bien. Le daré a usted no sólo respuesta-sí $\omega + 2$, sino también respuesta-sí $\omega + 3$, $\omega + 4$, y así siguiendo.

Tortuga: Cuánta generosidad, Aquiles. Y en el día de su cumpleaños, cuando yo debería estar haciéndole regalos a USTED, y no a la inversa. O, más bien, en el día que SOSPECHO es el de su cumpleaños. Presumo ahora que puedo concluir que ES su cumpleaños, armada con el nuevo Esquema de Respuesta, al cual llamaré "Esquema de Respuesta 2ω". Pero dígame, Aquiles: ¿REALMENTE, el Esquema de Respuesta 2ω me permite dar ese enorme brinco, o me estoy pasando algo por alto?

Aquiles: Usted no me engañará de nuevo, señora T. Ya he descubierto de qué modo terminar con este ridículo juego. ¡Por este acto, le hago a usted obsequio de un Esquema de Respuesta ulterior a todos los Esquemas de Respuesta! Esto es, le obsequio a la vez los Esquemas de Respuesta ω, 2ω, 3ω, 4ω, 5ω, etc. ¡Mediante este Metaesquema de Res-

puesta, he BRINCADO FUERA de todo el sistema, de toda esta maraña, he trascendido este tonto juego en el que usted creía haberme atrapado . . . y ahora está usted LIQUIDADA!

Tortuga: ¡Qué emoción! Me siento honrada, Aquiles, de ser la depositaria de tan poderoso Esquema de Respuesta. Presiento que rara vez ha sido ideado algo igualmente gigantesco por la mente humana: su poder me tiene subyugada. ¿Le parecería mal que le asigne un nombre a su regalo?

Aquiles: Para nada.

Tortuga: Lo llamaré entonces "Esquema de Respuesta ω^2". Y podemos pasar enseguia a otros tópicos . . . no bien me diga usted si la posesión del Esquema de Respuesta ω^2 me permite deducir que hoy es su cumpleaños.

Aquiles: ¡Ay, ay, pobre de mí! ¿Cuándo llegaré al fin de esta serie de tormentos? ¿Qué sigue?

Tortuga: Bueno, después del Esquema de Respuesta ω^2 viene la respuesta $\omega^2 + 1$. Y luego la respuesta $\omega^2 + 2$. Y así en adelante. Pero se puede reunir todo en un mismo paquete: el Esquema de Respuesta $\omega^2 + \omega$. Y después hay unos poquísimos paquetes-respuesta más, tales como $\omega^2 + 2\omega$, y $\omega^2 + 3\omega$ . . . Finalmente, se llega al Esquema de Respuesta $2\omega^2$, y transcurrido un rato, a los Esquemas de Respuesta $3\omega^2$ y $4\omega^2$. Más allá de éstos hay todavía algunos Esquemas de Respuesta más, como por ejemplo ω^3, ω^4, ω^5, y así por el estilo. Esto sigue su marcha, ¿sabe . . .?

Aquiles: Me doy cuenta. Supongo que, pasado un rato, se llega al Esquema de Respuesta ω^ω.

Tortuga: Por supuesto.

Aquiles: ¿Y luego, al ω^{ω^ω}, y al $\omega^{\omega^{\omega^\omega}}$

Tortuga: Lo capta fantásticamente rápido, Aquiles. Quisiera hacerle una sugerencia, si no le es molesto. ¿Por qué no los reúne a todos dentro de un solo Esquema de Respuesta?

Aquiles: De acuerdo, aunque estoy empezando a dudar de que pueda conseguirlo.

Tortuga: Me parece que dentro de la nomenclatura convencional que ha aparecido hasta ahora no hay una denominación obvia para asignarle, así que quizá deberíamos llamarlo, arbitrariamente, Esquema de Respuesta ε_0.

Aquiles: ¡Maldición! Cada vez que usted asigna un NOMBRE a una de mis respuestas, el mismo parece anunciar la inminente derrota de mis esperanzas de que esa respuesta la satisfaga. ¿Por qué no se limita a dejar sin nombre a este Esquema de Respuesta?

Tortuga: No podemos hacerlo, Aquiles; si no tuviéramos un nombre, no sabríamos cómo referirnos a él. Además, hay algo inevitable y muy bello en este Esquema de Respuesta en particular. ¡Sería muy lamentable dejarlo innominado! No querrá usted hacer una cosa lamentable en el día de su cumpleaños, ¿verdad? ¿ES su cumpleaños, no? Oiga,

hablando de cumpleaños, ¡hoy es MI cumpleaños!

Aquiles: ¿Sí?

Tortuga: Sí, así es. Bueno, en realidad es el cumpleaños de mi tío, pero es prácticamente lo mismo. ¿Le agradaría agasajarme con una deliciosa cena de cumpleaños?

Aquiles: Deténgase un instante, señora Tortuga. Hoy es MI cumpleaños. ¡Usted tiene que agasajarme!

Tortuga: Ah, pero usted no logró convencerme de la veracidad de esa afirmación. Se anduvo permanentemente por las ramas con respuestas, Esquemas de Respuesta, y quién sabe cuántas cosas más. Lo único que yo quería saber era si hoy es su cumpleaños, o no, pero usted se las arregló para confundirme por completo. Es una lástima, sinceramente, pero bueno, como quiera que sea, me sentiré feliz de aceptar que me agasaje usted con una cena de cumpleaños esta noche.

Aquiles: Está muy bien. Conozco un lugar muy adecuado para invitarla. Hay allí una variedad de sopas deliciosas . . . y sé con exactitud cuál de ellas debería tomar usted . . .

CAPITULO XV

Brincos fuera del sistema

Un sistema formal más poderoso

UNA DE LAS COSAS que podría hacer un crítico cauteloso de la demostración de Gödel sería examinar su generalidad. Tal crítico podría, por ejemplo, sospechar que Gödel no ha hecho sino aprovecharse sagazmente de un defecto escondido de un sistema formal específico, TNT. Si así fuera, quizá podría desarrollarse un sistema formal superior a TNT, el cual evadiría el ardid gödeliano, y el Teorema de Gödel, entonces, vería debilitada la eficacia de su aguijón. En este capítulo vamos a analizar cuidadosamente las propiedades de TNT que lo hacen vulnerable a las argumentaciones expuestas en el capítulo anterior.

La siguiente es una reflexión normal: si el problema básico de TNT es que contiene un "agujero" —en otras palabras, una oración que es indecidible, a saber, G— entonces, ¿por qué, simplemente, no obturar el agujero? ¿Por qué no añadir G a TNT como sexto axioma? Ciertamente, en comparación con el resto de los axiomas, G es de un gigantismo ridículamente descomunal; el sistema resultante, TNT + G, tendría un aspecto sumamente cómico a causa de lo desproporcionado de sus axiomas. Sea como fuere, el agregado de G es una sugerencia razonable; démoslo por hecho. Ahora bien, es de esperar que el nuevo sistema, TNT + G, sea un sistema formal superior: un sistema no solamente exento de sobrenaturales, sino también *completo*. Con seguridad, TNT + G es superior a TNT por lo menos en un aspecto: la cadena G ya no es indecidible en este nuevo sistema, puesto que es un teorema.

¿A qué se debía la vulnerabilidad de TNT? En esencia, a su capacidad de expresar enunciados acerca de sí mismo; en particular, el enunciado:

"No puedo ser demostrado en el sistema formal TNT."

O bien, expandiendo un poco el anterior:

"No existe un número natural que forme un par de prueba TNT con el número Gödel de esta cadena."

¿Hay algún motivo para confiar o esperar que TNT + G sea invulnerable a la demostración de Gödel? No, por cierto; nuestro nuevo sistema es sólo

tan expresivo como TNT. Como la prueba de Gödel se atiene primariamente al poder expresivo de un sistema formal, no debemos sorprendernos si vemos que también nuestro nuevo sistema sucumbe. El truco consistirá en encontrar una cadena que exprese el enunciado:

"No puedo ser demostrada en el sistema formal TNT + G."

En realidad, no tiene mucho de truco, en la medida en que lo hemos visto hacer en TNT; se emplean exactamente los mismos principios, y lo único que cambia en forma leve es el contexto (hablando figurativamente, es como volver a entonar una melodía que conocemos, nada más que en una tonalidad más alta). Como antes, la cadena que estamos buscando —llamémosla "G′"— es construida con la intermediación de un "tío", pero en lugar de basarse en la fórmula que representa los pares de prueba TNT, lo hará en la noción similar pero un tanto más complicada de pares de prueba TNT + G. Esta noción de pares de prueba TNT + G no es más que una ligera extensión de la noción inicial de pares de prueba TNT.

Se puede intentar una extensión similar con respecto al sistema MIU. Ya hemos visto la forma genuina de los pares de prueba MIU; si ahora agregáramos MU como segundo axioma, estaríamos operando con un nuevo sistema: el sistema MIU + MU. Sigue una derivación de este sistema extendido:

MU	axioma
MUU	regla 2

En correspondencia, hay un par de prueba MIU + MU, a saber, m = 30 300; n = 300. Este par de números no forma, por supuesto, un par de prueba MIU, sino tan sólo un par de prueba MIU + MU. La incorporación de un axioma adicional no complica sustancialmente las propiedades aritméticas de los pares de prueba. El hecho importante respecto a éstos —consistente en que ser un par de prueba es recursivamente primitivo— se mantiene.

Reutilización del método de Gödel

Si volvemos ahora a TNT + G, encontraremos una situación similar. Los pares de prueba TNT + G, lo mismo que sus predecesores, son primitivos recursivos, de modo que están representados dentro de TNT + G por una fórmula, la cual abreviaremos de una manera obvia:

PAR DE PRUEBA (TNT + G) {a,a'}

Y en adelante nos limitamos a rehacer los mismos pasos. Elaboramos el equivalente de G comenzando con un "tío", igual que antes:

$\sim\exists a:\exists a':$<PAR DE PRUEBA (TNT + G) {a,a'} $\wedge$ ARITMOQUINEREAR {a'',a'}>

Diremos que su número Gödel es *u'*. Ahora, aritmoquinereamos a este mismo tío, lo cual nos dará G′:

$\sim\exists a:\exists a':$<PAR DE PRUEBA (TNT + G) {a,a'} $\wedge$ ARITMOQUINEREAR $\underbrace{\text{SSS . . . SSS}}_{u' \text{ eses}}$0/a'',a'}>

Su interpretación es:

"No existe un número a que forme un par de prueba TNT + G con la aritmoquinificación de *u′*."

Más concisamente:

"No puedo ser demostrada en el sistema formal TNT + G."

Multifurcación

Bien (bostezo), los detalles son muy aburridos de aquí en adelante. G′ es exactamente a TNT + G lo que G era a TNT. Se descubre que, o bien G′, o bien ∼G′, pueden ser agregados a TNT + G, para producir nuevas ramificaciones de la teoría de los números. Y, para que no se piense que esto sucede sólo con los "buenos compañeros", hago notar que este mismo solapado truco puede ejercitarse en TNT + ∼G, es decir, en la extensión inhabitual de TNT obtenida gracias al agregado de la negación de G. Como podemos ver en la figura 75, hay toda clase de bifurcaciones en teoría de los números:

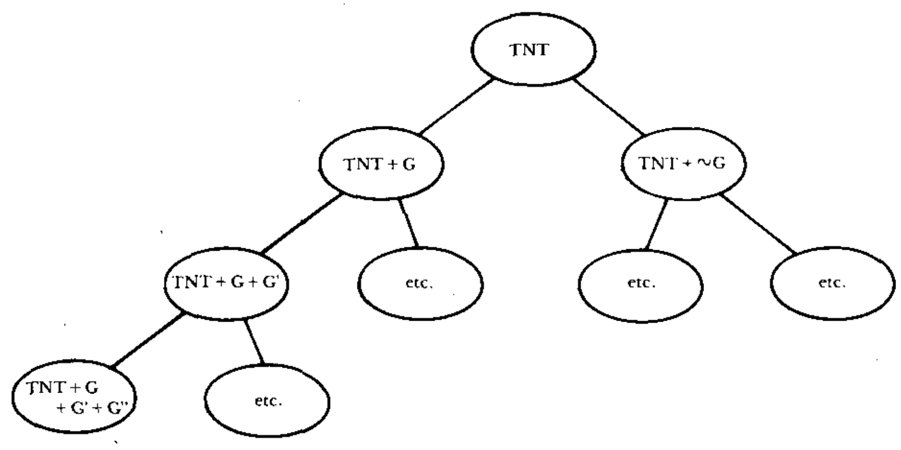


Figura 75. "Multifurcación" de TNT. Cada extensión de TNT tiene su propia oración Gödel; esta oración, o su negación, pueden ser agregadas, de manera que desde cada extensión parte un par de nuevas extensiones, proceso que continúa ad infinitum.

Por supuesto, esto es nada más que el comienzo. Imaginemos que bajamos por el brazo izquierdo de este árbol que crece hacia abajo, que es donde lanzamos siempre las oraciones Gödel (no sus negaciones). Esto es lo máximo que podemos conseguir por la vía de la eliminación de los sobrenaturales. Después de agregar G, agregamos G′; y luego G″, G‴, y así en más. Cada vez que elaboramos una nueva extensión de TNT, su vulnerabilidad al método de la Tortuga —perdón, al método de Gödel, quiero decir— permite idear una nueva cadena, a la cual cabe la interpetación:

"No puedo ser demostrada en el Sistema Formal X."

Naturalmente, transcurrido cierto lapso, todo el proceso comienza a parecer enteramente predictible y rutinario: ¡como que todos los "agujeros" están hechos siguiendo la misma técnica! Esto significa que, vistos como objetos tipográficos, todos ellos están vaciados en un mismo molde, lo cual, a su vez, ¡implica que basta un solo esquema de axioma para representarlos en su totalidad! De manera que, si esto es así, ¿por qué no taponar al mismo tiempo todos los agujeros y dar entonces por liquidado este odioso asunto de la incompletitud de una vez por todas? Ello se obtendría mediante el *agregado de un esquema de axioma a TNT*, en lugar de agregar un axioma por vez. Específicamente, este esquema de axioma sería el molde en el cual son vaciados G, G′, G″, G‴, etc. Agregando este esquema de axioma (llamémoslo "G_ω"), aventajaríamos en astucia al método de la "gödelización". Por cierto, parece indiscutible que la adición de G_ω a TNT sería el *último paso* necesario para la completa axiomatización de todas las verdades teórico-numéricas.

Fue a propósito de esta cuestión que la Tortuga, en el *Contracrostipunto*, se refirió a la invención del "Fonógrafo Omega" por parte del Cangrejo. Lamentablemente, los lectores fueron dejados en suspenso en cuanto al destino corrido por el invento, ya que, antes de completar su narración, la fatigada Tortuga resolvió marcharse a su casa a dormir (no sin lanzar, previamente, una socarrona alusión al Teorema de la Incompletitud, de Gödel). Ahora, por fin, podemos emprender el esclarecimiento de aquel detalle pendiente . . . quizá el lector ya cuenta con algún indicio, luego de haber leído la *Cantatatata de Cumpleaños*.

Incompletitud esencial

Tal como el lector probablemente haya sospechado, inclusive esta fantástica modificación de TNT sufre el mismo destino. Y lo que hace de esto algo sumamente misterioso es que se produce, en esencia, por la misma razón. El esquema de axioma no es suficientemente poderoso, y la construcción Gödel puede ejecutarse también aquí. Voy a analizar esto un poco (se lo puede hacer mucho más rigurosamente de lo que yo lo haré

aquí). Si hay un medio de capturar las diversas cadenas G, G′, G″, G‴ . . . en un único molde *tipográfico*, entonces hay un medio de describir sus números Gödel a través de un único molde *aritmético*. Y este retrato aritmético de una clase infinita de números puede, luego, ser representado dentro de TNT + G_ω por una fórmula AXIOMA OMEGA {a}, cuya interpretación sea: "a es el número Gödel de uno de los axiomas que resultan de G_ω". Cuando es remplazada por cualquier numeral específico, la fórmula que surge será un teorema de TNT + G_ω si, y *sólo* si, el numeral representa el número Gödel de un axioma resultante del esquema.

Con la ayuda de esta nueva fórmula, llegará a ser posible la representación hasta de una noción tan complicada como la de pares de prueba TNT + G_ω en el interior de TNT + G_ω:

PAR DE PRUEBA (TNT + G*w*) a,a'

Utilizando esta fórmula, podemos construir un nuevo tío, al cual procederemos a aritmoquinerear en la forma que ya tan bien conocemos, elaborando así otra cadena indecidible más, a la que llamaremos "TNT + $G_{\omega+1}$". En este punto, uno puede preguntarse: "¿Por qué $G_{\omega+1}$ no está dentro de los axiomas creados por el esquema de axioma G_ω?" La respuesta es que Gω no fue lo suficientemente sagaz como para prever su *propia* incorporabilidad a la teoría de los números.

En el *Contracrostipunto*, uno de los pasos esenciales dados por la Tortuga en su elaboración de un "disco inejecutable" consistió en obtener el diseño de fabricación del fonógrafo que ella quería destruir. Ello le era necesario para descubrir a qué tipo de vibraciones era vulnerable el aparato, e incorporar entonces a su disco estrías tales que codificaran sonidos inductores de dichas vibraciones. Esto guarda una analogía exacta con el ardid Gödel, en el cual las mismas propiedades del sistema son reflejadas dentro de la noción de pares de prueba y luego utilizadas contra él. A cualquier sistema, por más complejo o artificioso que fuere, se le puede asignar numeración Gödel y, en consecuencia, puede ser definida la noción de sus pares de prueba . . . y ésta es la red en la cual es cogido. Una vez que un sistema ha sido bien definido, o "encajonado", se convierte en vulnerable.

Este principio es magníficamente ilustrado por el truco de la diagonal de Cantor, el cual descubre la omisión de un número real en toda lista bien definida de reales entre 0 y 1. Es el acto de dar una lista explícita, o "cajón" de reales, lo que provoca la ruina. Veamos cómo puede ser repetido una y otra vez el truco de Cantor; consideremos lo que ocurre si, comenzando con una lista L, hacemos lo siguiente:

(1a) Tomamos la lista L y construimos su diagonal número *d*.
(1b) Introducimos adecuadamente *d* dentro de la lista L, obteniendo así una nueva lista L + *d*.

(2a) Tomamos la lista L + d y construimos su diagonal número d'.
(2b) Introducimos adecuadamente d' dentro de la lista L + d, obteniendo así una nueva lista L + d + d'.

.
.
.

Pero este proceso paso a paso puede parecer un estúpido modo de remendar L, pues podríamos haber hecho la lista completa d, d', d'', d''', . . . de una sola vez, dada L inicialmente. Pero si creemos que la elaboración de tal lista permitirá completar nuestra lista de reales, estamos rotundamente equivocados. El problema aparece en el instante en que preguntamos: "¿Dónde incorporamos la lista de números diagonales dentro de L?" Por muy diabólicamente sagaz que sea el esquema que se invente para ubicar los números d dentro de L, una vez logrado esto último la nueva lista sigue siendo vulnerable. Como se dijo antes: es el acto de dar una lista explícita, o "cajón" de reales, lo que provoca la ruina.

Y, en el caso de los sistemas formales, es el acto de dar una receta explícita de lo que supuestamente caracteriza la verdad teórico-numérica el causante de la incompletitud. Este es el meollo del problema de TNT + G_ω. Luego de insertadas todas las G, de una manera bien definida, dentro de TNT, resulta que hay alguna *otra* G —una G no prevista— que no ha sido capturada por nuestro esquema de axioma. En el caso de la batalla Tortuga-Cangrejo del *Contracrostipunto*, el momento en que se determina la "arquitectura" de un fonógrafo es el momento en que este fonógrafo adquiere la posibilidad de ser sacudido hasta hacerse pedazos.

¿Qué se hace, pues? No hay un final de esto a la vista. Está claro que TNT, aun cuando fuese extendido *ad infinitum*, no se convertiría en completo. Se dice, en consecuencia, que TNT padece de *incompletitud esencial* porque la incompletitud es la médula misma de TNT: es una parte esencial de su naturaleza y no puede ser suprimida por ningún medio, ni ingenuo ni alambicado. Más aún, este problema habrá de rondar toda versión formal de teoría de los números, sea una extensión de TNT, una modificación de TNT, o una alternativa a TNT. El hecho básico es éste: la posibilidad de construir una cadena indecidible, en un sistema dado, por vía del método de Gödel de la autorreferencia, depende de tres condiciones fundamentales:

(1) Que el sistema sea lo suficientemente dotado como para que todos los enunciados requeridos acerca de números, sean verdaderos o falsos, puedan ser *expresados* en él. (Si hay insuficiencia en este aspecto, ello significará que el sistema, desde el comienzo mismo, es demasiado débil para rivalizar con TNT, porque ni siquiera puede expresar nociones teórico-numéricas

que TNT sí puede. En la metáfora del *Contracrostipunto*, es como si uno no contara con un fonógrafo sino con un refrigerador u otro objeto similar.)

(2) Que todas las relaciones recursivas generales puedan ser *representadas* dentro del sistema, a través de fórmulas. (Si hay insuficiencia en este aspecto, ello significará que el sistema no consigue capturar, en un teorema, alguna verdad recursiva general, lo cual puede ser considerado únicamente como un conmovedor desinflamiento si el propósito del sistema era producir todas las verdades teórico-numéricas. En la metáfora del *Contracrostipunto*, es como tener un fonógrafo, pero de baja fidelidad.)

(3) Que los axiomas y patrones tipográficos definidos por sus reglas sean reconocibles a través de un procedimiento de decisión finalizable. (Si hay insuficiencia en este aspecto, ello significará que en el sistema no hay ningún método para distinguir las derivaciones válidas de las que no lo son, y en consecuencia ese "sistema formal", a fin de cuentas, no es formal, y en realidad ni siquiera es bien definido. En la metáfora del *Contracrostipunto*, es un fonógrafo que todavía permanece en el tablero de proyectos, diseñado solamente a medias.)

La satisfacción de estas tres condiciones asegura a todo sistema coherente que será incompleto, ya que le será aplicable la construcción de Gödel.

Lo fascinante de tales sistemas es que ellos mismos cavan sus agujeros; su propia riqueza es lo que genera su destrucción. Esta ocurre, esencialmente, porque el sistema es lo suficientemente poderoso como para contar con oraciones autorreferenciales. En física existe la noción de "masa crítica" de una sustancia fisionable, como el uranio, por ejemplo. Una sólida porción de tal sustancia se limitará a permanecer sin sobresaltos en su sitio, siempre que su masa no alcance a ser crítica; sin embargo, si es superado el punto crítico, dicha porción sufrirá una reacción en cadena y estallará. Pareciera que en los sistemas formales hay un punto crítico semejante: por debajo del mismo, un sistema es "inofensivo" y ni siquiera se propone definir formalmente la verdad aritmética, pero más allá del punto crítico, el sistema adquiere súbitamente el atributo de la autorreferencia, y como consecuencia de ello se condena a sí mismo a la incompletitud. El umbral parece coincidir, en términos generales, con la posesión de las tres propiedades enumeradas anteriormente. Una vez obtenido aquel atributo de la autorreferencia, el sistema presenta un agujero que él mismo se ha practicado; el agujero toma nota de los rasgos que caracterizan al sistema y los utiliza contra este último.

La pasión según Lucas

La desconcertante repetitividad de la argumentación Gödel ha sido empleada por diversas personas —en particular, por J. R. Lucas—, quienes se han servido de ella como munición en su batalla por mostrar que existe cierta cualidad elusiva e inefable en la inteligencia humana, la cual pasa entonces a ser algo inalcanzable por los "autómatas mecánicos", esto es, por las computadoras. Lucas inicia su artículo "Minds, Machines, and Gödel" con estas palabras:

> A mi entender, el teorema de Gödel demuestra que el mecanismo es falso; es decir, que la mente no puede ser explicada como una máquina.[1]

Luego pasa a exponer una argumentación que, parafraseada, consiste en lo siguiente: para que una computadora merezca ser considerada tan inteligente como un ser humano, debe poder realizar cualquier tarea intelectual de la que sea capaz aquél; y Lucas sostiene que ninguna computadora puede hacer "gödelización" (una de sus graciosamente irreverentes expresiones) de la manera en que lo hace una persona. ¿Por qué no? Bueno, consideremos cualquier sistema formal determinado, como TNT, o TNT + G, o inclusive TNT + Gω. Con bastante facilidad, se puede formular un programa que, en forma sistemática, habrá de generar teoremas de dicho sistema de forma tal que, a la larga, aparecerá cualquier teorema al cual se haya preseleccionado. En otros términos, el programa generador de teoremas no habrá de pasar por alto ningún sector del "espacio" de todos los teoremas. Un programa así estaría formado por dos partes principales: (1) una subrutina que acuña axiomas, a partir de los "moldes" dados por los esquemas de axioma (si los hay), y (2) una subrutina que toma los teoremas conocidos (incluidos los axiomas, por supuesto) y aplica reglas de inferencia para producir nuevos teoremas. El programa alternaría entre el procesamiento de una de estas subrutinas, primero, y luego de la otra.

Hablando antropomórficamente, podemos decir que este programa "conoce" algunos hechos pertenecientes a la teoría de los números: en particular, conoce los hechos a los cuales va dando salida impresa. Si no consigue enunciar determinado hecho verdadero de teoría de los números, es naturalmente porque no "conoce" ese hecho. En consecuencia, un programa de computadora será inferior a los seres humanos si se puede mostrar que éstos conocen lo que el programa no puede conocer. Aquí es donde Lucas comienza a meter su cuña; dice que los seres humanos siempre pueden jugarle el ardid Gödel a cualquier sistema formal tan poderoso como TNT, por lo cual, sea cual fuere el sistema formal, aquéllos saben más que éste. Ahora bien, esto puede impresionar como una obser-

[1] Lucas, *op. cit.*, p. 43.

vación acerca de los sistemas formales, pero también puede ser ligeramente modificada para que se convierta en un argumento aparentemente irrefutable en contra de la posibilidad de que las inteligencias artificiales puedan llegar a reproducir el nivel humano de inteligencia. Lo que sigue es el esqueleto de este desplazamiento:

Las computadoras y los robots son totalmente gobernados por rígidos códigos internos; luego . . .
Las computadoras son isomórficas con respecto a los sistemas formales. Ahora bien . . .
Toda computadora que quiera ser tan ingeniosa como los seres humanos debe alcanzar la capacidad de manejar teoría de los números con la misma eficacia que aquéllos, de manera que . . .
Entre otras cosas, esa computadora tiene que ser capaz de hacer aritmética recursiva primitiva. Pero, por esta misma razón . . .
Es vulnerable al "anzuelo" gödeliano, lo cual implica que . . .
Las personas, utilizando su inteligencia *humana*, pueden idear un determinado enunciado de teoría de los números que sea verdadero pero la *computadora* es ciega a la verdad de tal enunciado (es decir, nunca le dará salida impresa), precisamente a causa de la argumentación búmerang de Gödel.
De ello se deduce que hay una cosa para cuya realización las computadoras, lisa y llanamente, no pueden ser programadas; las personas, por su parte, sí pueden realizarla. Luego, son más inteligentes.

Disfrutemos, junto con Lucas, de un fugaz instante de glorificación antropocéntrica:

> Por más complicada que sea la máquina que construyamos, se corresponderá, si es una máquina, con un sistema formal, el cual estará expuesto, a su vez, al procedimiento Gödel de hallazgo de una fórmula indemostrable-en-tal-sistema. La máquina será incapaz de producir dicha fórmula como verdadera, en tanto que una mente puede percibir ese carácter. De este modo, la máquina seguirá sin lograr constituirse en un modelo adecuado de la mente. Estamos tratando de producir un modelo de la mente que sea mecánico: es decir, esencialmente "muerto", pero la mente, al ser de hecho "viva", siempre aventajará a cualquier osificado y muerto sistema formal. Gracias al teorema de Gödel, la mente tiene siempre la última palabra.[2]

A primera vista, e inclusive, tal vez, luego de un examen atento, la argumentación de Lucas parece difícil de resistir. Por lo común, provoca reacciones polarizadas; hay quienes se adhieren a su demostración casi religiosa de la existencia del espíritu, mientras otros la toman a risa, como algo que no vale la pena comentar. A mi juicio, dicha argumentación es errónea, pero también cautivante, y por consiguiente merecedora de que se la

[2] *Ibid*, p. 48.

tome en cuenta, para refutarla. En realidad, se trató de una de las principales motivaciones primeras que me condujeron a reflexionar en los temas de este libro. Trataré de rebatirla de una manera en este capítulo y de otras en el *Capítulo* XVII.

Debemos tratar de comprender con mayor profundidad por qué dice Lucas que la computadora no puede ser programada para que "conozca" todo lo que conocemos nosotros. Básicamente, la idea es que nosotros estamos siempre *fuera* del sistema y que desde allí nos es siempre posible ejecutar la operación "gödelizadora", la cual produce una cosa que el programa, desde dentro, no puede ver que es verdadera. Pero, ¿por qué el "operador de gödelización", como lo llama Lucas, no puede ser programado, y agregado al programa como tercer componente principal? Explica Lucas:

> El procedimiento mediante el cual es construida la fórmula Lucas es un procedimiento habitual: únicamente así podemos estar seguros de que se puede construir una fórmula gödeliana para todo sistema formal. No obstante, si se trata de un procedimiento estándar, debería poder programarse una máquina para que lo ejecute . . . Esto se correspondería con una *situación* donde se contase con un sistema dotado de una regla adicional de inferencia que permitiese agregar, como un teorema más, la fórmula gödeliana del resto del sistema formal, y luego la fórmula gödeliana de este nuevo y fortalecido sistema formal, y así siguiendo. Lo mismo sería agregar, al sistema inicial, una secuencia infinita de axiomas, cada uno de los cuales fuese la fórmula gödeliana del sistema elaborado hasta ese punto . . . Podemos confiar en que una mente, enfrentada a una máquina que posea un operador de gödelización, tendrá eso en cuenta y habrá de regödelizar la nueva máquina con todo y operador de gödelización. Está a la vista, *en realidad*, que tal es el caso. Aun si agregamos a un sistema el conjunto infinito de axiomas formado por las sucesivas fórmulas gödelianas, el sistema resultante sigue siendo incompleto, y contiene una fórmula que no puede ser demostrada-en-el-sistema, pese a que un ser racional, ubicado fuera del sistema, puede ver que la misma es verdadera. Esto es lo que esperábamos, pues inclusive en el caso de que fuese agregado un conjunto infinito de axiomas, éstos tendrían que ser especificados por una regla finita de especificación, y esta nueva regla de especificación puede entonces ser tomada en cuenta por una mente que examine el sistema formal *ampliado*. *En cierto* sentido, precisamente porque la mente tiene la última palabra es que siempre puede agujerear cualquier sistema formal que le sea presentado como modelo de su propio funcionamiento. El modelo mecánico está forzado a ser, en alguna medida, finito y definido: como consecuencia, la mente siempre puede aventajarlo.[3]

Brincando una dimensión

En este momento, nos será sumamente útil una imagen visual ofrecida por M. C. Escher para auxiliar a nuestra intuición: su dibujo *Dragón* (figura 76). Su rasgo más saliente consiste, por supuesto, en su motivo: un dragón comiéndose la cola, con todas las connotaciones gödelianas que esto conlleva. Pero hay un tema más profundo en esta representación.

[3] *Ibid.*, pp. 48-9.

Escher mismo escribió los interesantísimos comentarios de más abajo; el primero se refiere a un conjunto de dibujos suyos vinculados "al conflicto entre lo plano y lo espacial"; el segundo habla específicamente de *Dragón*.

> I. Nuestro espacio tridimensional es la única realidad verdadera que conocemos. El bidimensional es ni más ni menos ficticio que el tetradimensional, pues ninguna cosa es plana, ni siquiera el espejo más pulcramente pulido. Y sin embargo, aceptamos la convención de que un muro o un pedazo de papel *son* planos; muy curiosamente, seguimos, tal como lo venimos haciendo desde tiempos inmemoriales, produciendo ilusiones de espacio sobre superficies planas como aquéllas. Por cierto que es un poco absurdo trazar unas pocas líneas y luego afirmar: "Esto es una casa". Esta curiosa situación es el tema de los cinco cuadros siguientes [entre los cuales está *Dragón*].[4]

> II. Pese al gran empeño de este dragón por ser espacial, no deja de ser totalmente plano. Se han hecho dos incisiones en el papel donde está impreso, y luego éste ha sido plegado como para dejar dos aberturas cuadradas. Pero este dragón es una bestia obstinada, y a despecho de sus dos dimensiones persiste en suponer que tiene tres; por eso es que pasa su cabeza por uno de los agujeros y su cola por el otro.[5]

Esta segunda observación es verdaderamente ilustrativa. Su mensaje consiste en que, por más ingeniosamente que se pretendan simular tres dimensiones en dos, siempre se pierde determinada "esencia de la tridimensionalidad". El dragón intenta esforzadamente sortear su bidimensionalidad. Desafía la bidimensionalidad del papel sobre el cual sabe que está dibujado, mediante el recurso de pasar su cabeza a través del mismo; sin embargo, desde fuera del dibujo, podemos ver en todo momento la patética futilidad de todo ello, pues el dragón *y* los agujeros *y* los pliegues, sin excepción, no son más que simples simulaciones bidimensionales de aquellos conceptos, y ninguno de ellos es real. El dragón no puede abandonar su espacio bidimensional, y no lo sabe del modo en que nosotros sí lo sabemos. Podríamos perfectamente aplicar una gran cantidad de nuevos pasos a esta imagen de Escher; separarla del libro, por ejemplo, doblarla, practicarle agujeros, pasarla a través de sí misma y fotografiar el revoltijo conseguido, de modo que vuelva a ser bidimensional. Podríamos luego utilizar el mismo recurso con esta fotografía. En cada oportunidad, en el momento en que la imagen vuelve a ser bidimensional —por más habilidosamente que hayamos podido simular tres dimensiones en el interior de dos—, vuelve a ser vulnerable a nuevos cortes y plegados.

Ahora, acompañados por esta admirable metáfora escheriana, retornamos al enfrentamiento programa-ser humano. Habíamos hablado de la posibilidad de encapsular al "operador de gödelización" dentro del programa mismo; bien, inclusive en el caso de que hubiéramos formulado un programa que realice la operación, ese programa no apresaría la esencia del método de Gödel. Una vez más, pues, ubicados fuera del siste-

[4] M. C. Escher, *The Graphic Work of M. C. Escher* (New York: Meredith Press, 1967), p. 21.
[5] *Ibid.*, p. 22.



Figura 76. Dragón, *de M. C. Escher (grabado en madera, 1952).*

ma, podemos "rasguñar" éste de un modo que al sistema mismo no le es posible. Pero entonces, ¿estamos argumentando en favor o en contra de Lucas?

Los límites de los sistemas inteligentes

En contra, pues el propio hecho de que no podamos formular un programa que haga "gödelización" tiene que hacernos entrar en sospechas acer-

ca de que nosotros mismos podamos hacerlo en todos los casos. Una cosa es declarar en abstracto que la gödelización "puede ser hecha", y otra distinta saber cómo hacerla en cada caso particular. En realidad, en la medida en que los sistemas formales (o los programas) se hacen más complejos, nuestra capacidad de "gödelizar" llega a un punto en que comienza a tambalearse. Así debe ser, puesto que, tal como ya dijimos, *no* contamos con ningún procedimiento algorítmico que nos indique cómo efectuar la gödelización. Si no podemos establecer *explícitamente* los requerimientos inherentes a la aplicación del método de Gödel en todos los casos, como consecuencia, cada uno de nosotros se encontrará finalmente con ciertos casos tan complicados que, sencillamente, no podrá descubrir de qué modo aplicar dicho método.

Por supuesto, los límites de esta capacidad son relativamente fluctuantes, tal como los del peso que podamos levantar del piso. Mientras que, algunos días, es posible que no consigamos levantar un objeto de 70 kilos, habrá otros días en que sí podamos. Sin embargo, no habrá ningún día en que podamos alzar del suelo un objeto de 70 toneladas. En este sentido, pese a que el umbral personal de gödelización es incierto, para cada persona existen sistemas que están ubicados mucho más allá de su capacidad gödelizadora.

Esta noción es ilustrada por la *Cantatatata de Cumpleaños*. Al principio, parece obvio que la Tortuga puede seguir fastidiando a Aquiles todo lo que quiera. Pero luego éste trata de sumar todas las respuestas a través de un solo movimiento. Esta operación tiene un carácter distinto al de las anteriores, y recibe el nombre de 'ω'. La novedad de la denominación es sumamente importante: es el primer ejemplo donde la nomenclatura usada hasta allí —la cual incluía únicamente los nombres de todos los números naturales— tiene que ser trascendida. Después vienen algunas extensiones más, cuyos nombres son a veces enteramente obvios, y otras veces un tanto artificiosos. Por último, volvemos a agotar las denominaciones en el sitio donde los esquemas de respuesta

$$\omega, \omega^{\omega}, \omega^{\omega^{\omega}} \ldots$$

son subsumidos en su totalidad en un esquema de respuesta desmesuradamente complejo, al cual le es asignado un nombre totalmente nuevo: 'ε_0'. Y la razón para que hiciera falta una denominación nueva es que se había dado cierto género fundamentalmente *nuevo* de paso: se había topado con una especie de irregularidad. De este modo, era necesario proveer un nuevo nombre *ad hoc*.

No existe ninguna regla recursiva para denominar ordinales

Se podría pensar, de pronto, que tales irregularidades en la progresión que va de *ordinal* a *ordinal* (como son llamados estos nombres de infinitu-

des) podrían ser manejadas por un programa de computadora. O sea que podría haber un programa que produzca nuevos nombres de una manera regular y, cuando se le acaba la gasolina, apela al "manipulador de irregularidad", el cual se encargaría de aportar un nuevo nombre y devolver el control al manipulador simple. Pero esto no funcionaría: resulta que las irregularidades, por su parte, aparecen en forma irregular y haría falta un programa de segundo orden, es decir, un programa que elabore nuevos programas que elaboren nuevos nombres. E inclusive esto no bastaría porque, a la larga, se haría necesario un programa de tercer orden, y luego otro, y luego otro . . .

Toda esta complejidad, de aspecto tal vez risible, proviene de un profundo teorema, obra de Alonzo Church y Stephen C. Kleene, relativo a la estructura de estos "ordinales infinitos", el cual expresa:

No hay sistema de notación recursivamente relacionado que asigne un nombre a todo ordinal constructivo.

De qué se tratan los "sistemas de notación recursivamente relacionados" y los "ordinales constructivos" es algo para lo cual es preferible que nos remitamos a fuentes más especializadas, como por ejemplo el libro de Hartley Rogers; de todos modos, la noción intuitiva queda satisfactoriamente presentada. Cuando los ordinales se hacen más y más grandes, hay irregularidades, e irregularidades de las irregularidades, e irregularidades de las irregularidades de las irregularidades, etc. Ningún esquema individual, por más complejo que sea, puede nombrar a todos los ordinales, y de esto se sigue que no existe método algorítmico que pueda indicar cómo debe aplicarse el método de Gödel a todas las clases posibles de sistemas formales. Luego, a menos que se tengan fuertes inclinaciones místicas, se está obligado a concluir que cada ser humano, lisa y llanamente, en algún punto chocará con los límites de su propia capacidad para gödelizar. De aquí en más, los sistemas formales de esa complejidad, aun reconocidamente incompletos por causa de la razón Gödel, tendrán el mismo poder que los seres humanos.

Otras refutaciones de Lucas

Pero la anterior es exclusivamente una manera de argumentar contra la posición de Lucas; existen otras, tal vez más eficaces, a las cuales nos referiremos más adelante. Pero esta refutación tiene un interés especial porque trae a colación la seductora idea de crear un programa de computadora que pueda salirse de sí mismo, verse entero desde el exterior y aplicarse a sí mismo el truco zapador de Gödel. Por cierto, esto es algo tan imposible como que un fonógrafo ejecute los discos que tienen la capacidad de causar su destrucción.

Ahora bien, no se debe entender, con base en estas razones, que TNT es defectuoso. Si en alguna parte hay un defecto, es en nuestras expectativas a propósito de lo que TNT debe poder hacer. Además, es muy provechoso advertir que *nosotros* somos igualmente vulnerables frente a la trampa verbal que Gödel transplantó al ámbito de los formalismos matemáticos: la paradoja de Epiménides. Esto ha sido muy inteligentemente puntualizado por C. H. Whitely, cuando propuso la oración: "Lucas no puede, coherentemente, enunciar esta oración". Si lo pensamos bien, veremos que, (1) es una oración verdadera; sin embargo, (2) Lucas *no puede*, coherentemente, enunciarla. De modo, pues, que también Lucas es "incompleto" con respecto a las verdades acerca del mundo: la forma en que él refleja el mundo en sus estructuras cerebrales le impide, al mismo tiempo, ser "coherente" y enunciar esa oración verdadera. Pero Lucas no es más vulnerable que cualquiera de nosotros; simplemente, está al mismo nivel que un sistema formal refinado.

Una manera divertida de apreciar la incorrección de la argumentación de Lucas surge de su transposición a una disputa de hombres contra mujeres . . . En sus vagabundeos, Lucus el Pensador se topó un día con un objeto desconocido: una mujer. Jamás había visto tal cosa, y al principio le causó una viva conmoción el verse muy parecido a ella; pero luego, levemente atemorizado también ante la nueva presencia, pregonó a todos los demás hombres del contorno: "¡Mirad! ¡Yo puedo contemplar su cara, cosa que *ella* no puede hacer; luego, las mujeres no pueden ser como yo!" Y así demostró él la superioridad de los hombres con respecto a las mujeres, para su tranquilidad y la de sus compañeros masculinos. Marginalmente, la misma argumentación prueba también la superioridad de Lucus con respecto a todos los demás hombres, pero él no hizo hincapié en ello. La mujer, en respuesta, adujo: "Sí, usted puede ver mi cara, cosa que yo no puedo hacer, pero yo puedo ver *su* cara, ¡cosa que *usted* no puede hacer! Estamos parejos". No obstante, Lucus salió con una objeción inesperada: "Perdone, pero se engaña si piensa que puede *ver* mi cara. Lo que hacen ustedes las mujeres no es lo mismo que hacemos nosotros, los hombres, sino que tiene, como ya lo he señalado, un grado inferior, y no le corresponde ser llamado por el mismo nombre. Llámele, si quiere, 'femivisión'. Ahora bien, el hecho de que pueda usted 'femiver' mi cara carece de toda importancia, pues la situación no es simétrica, ya lo ve". "Lo femiveo", femicontestó la mujer, y se femifué . . .

Bueno, éste es el tipo de argumentación que aceptará con gusto quien se sienta inclinado a ver que los hombres y las mujeres aventajan a las computadoras en estas disputas intelectuales.

Autotrascendencia: un mito moderno

Sigue siendo de gran interés considerar si los seres humanos podemos brincar fuera de nosotros mismos, o bien si los programas de computado-

ra pueden brincar fuera de sí mismos. Ciertamente, a un programa le es posible automodificarse, pero tal modificabilidad tiene que ser inherente al programa de iniciación, por lo cual no puede ser incluido como un ejemplo de "brinco fuera del sistema". Por mucho que un programa gire y se contorsione para salir de sí mismo, permanece obediente a las reglas que le son inherentes; sus posibilidades de evadirse son equivalentes a las que tiene un ser humano de decidir, por un acto de voluntad, no acatar las leyes de la física. El de la física es un sistema inexorable, del cual no hay huida posible. Sin embargo, hay una ambición más modesta que se puede satisfacer: indudablemente, uno puede saltar, desde un subsistema del propio cerebro, a otro subsistema más amplio; en ocasiones, uno puede eludir los senderos habituales. Esto se debe a la interacción de diversos subsistemas de nuestro cerebro, pero impresiona como si se tratase de un verdadero salto fuera de nosotros mismos. Análogamente es perfectamente concebible que una capacidad parcial de "salir fuera de sí misma" pueda ser incorporada a un programa de computadora.

Es importante, empero, tomar nota de la distinción entre *percibirse* y *trascenderse*. Podemos adquirir visiones de nosotros mismos a través de distintos medios: en un espejo, en fotografías o en películas, en grabaciones, gracias a las descripciones hechas por otros, haciendo un tratamiento psicoanalítico, etc. Pero no se puede en absoluto abandonar la propia piel y ubicarse en el exterior de uno mismo (a pesar de las pretensiones de los movimientos ocultistas modernos, de la psicología *pop*, etc.). TNT puede hablar de sí mismo, pero no puede brincar fuera de sí mismo. Un programa de computadora puede modificarse a sí mismo, pero no puede infringir sus instrucciones: todo lo más, puede transformar ciertas partes de sí mismo *siguiendo* sus instrucciones. Esto trae al recuerdo aquella ingeniosa paradoja: "¿Dios puede hacer una piedra tan pesada que él mismo no la pueda levantar?"

Publicidad y recursos de enmarcamiento

Este impulso a brincar fuera del sistema es intenso y subyace a todos los progresos que se producen en el arte, la música y otras actividades humanas. Subyace también a empresas tan triviales como la elaboración de avisos comerciales de radio y televisión. Esta inadvertida tendencia ha sido magníficamente percibida y descripta por Erving Goffman en su libro *Frame Analysis*:

> Por ejemplo, un actor obviamente profesional termina un mensaje comercial y, con la cámara aún sobre él, abandona su tarea con evidente alivio para entregarse con gran complacencia a consumir el producto que había estado publicitando.
>
> Este es, por supuesto, sólo un ejemplo de la forma en que la televisión y la radiotelefonía comerciales están comenzando a explotar recursos de enmarcamiento para generar una apariencia de naturalidad que (así se espera) venza las reticencias

desarrolladas por el auditorio. Así, se hace una utilización frecuente de voces infantiles, quizá porque dan la impresión de ser naturales y de no haber sido ensayadas; ruidos callejeros y otros efectos que tratan de crear la imagen de que la gente responde espontánea y gratuitamente a encuestas públicas; comienzos fallidos, vacilaciones, diálogos y acciones secundarios, frases superpuestas, para simular una conversación real; y, siguiendo a Welles, la interrupción de un jingle para comunicar novedades acerca de un nuevo producto de la firma, alternando de vez en cuando con interrupciones para pasar un aviso de interés público, todo esto, presumiblemente, para conservar viva la confianza del auditorio.

Cuanto más se desentiende el auditorio de la función autentificadora de los detalles secundarios, más son perseguidos éstos por los anunciadores. El resultado es una especie de polución de interacciones, un desorden que también contribuyen a diseminar los consultores en relaciones públicas de las figuras políticas y, más modestamente, la microsociología.[6]

Tenemos aquí una escalada de la batalla Tortuga-Cangrejo, donde los antagonistas son ahora la Verdad y los Comerciales.*

Simplicio, Salviati, Sagredo: ¿por qué tres?

Hay una vinculación fascinante entre el problema de brincar fuera del sistema y la búsqueda de la objetividad total. Cuando leí los cuatro Diálogos de Jauch, incluidos en su libro *Are Quanta Real?*, que tienen por base los cuatro *Diálogos a propósito de dos nuevas ciencias*, de Galileo, me encontré preguntándome por qué participaban *tres* personajes: Simplicio, Salviati y Sagredo. ¿Por qué no habían sido suficientes dos: Simplicio, el simplón educado, y Salviati, el pensador talentoso? ¿Qué función cumplía Sagredo? Bueno, se da por supuesto que es una especie de tercero neutral, que evalúa desapasionadamente las dos posiciones y emite un fallo "justo" e "imparcial". Esto parece muy equilibrado, pero hay un problema: Sagredo siempre concuerda con Salviati, no con Simplicio, ¿cómo eso de que la Objetividad Personificada tenga preferidos? Una respuesta posible, por supuesto, es la de que Salviati formula puntos de vista correctos, de modo que Sagredo no tiene otra opción. ¿Pero qué ocurre entonces con la justicia o "distribución pareja"?

Además de Sagredo, Galileo (y Jauch) arregló los naipes más bien en perjuicio que en beneficio de Simplicio. Quizá hubiera sido necesario agregar un Sagredo de nivel aun más alto, alguien que fuese objetivo con respecto a la situación en su conjunto . . . Está a la vista hacia dónde esta-

[6] E. Goffman, *Frame Analysis*, p. 475.

* El autor se basa para esta observación en las iniciales de las palabras inglesas correspondientes, las cuales no coinciden del todo con sus equivalentes españolas. La batalla entre la Tortuga y el Cangrejo (*Tortoise* y *Crab*, respectivamente) merece la abreviatura de "batalla TC". A la que ahora menciona le cabe la misma abreviatura ("truth" versus "commercials", esto es, *verdad* versus *comerciales*). [T.]

mos marchando: estamos ingresando a una serie sin fin de "acrecentamientos de objetividad", la cual tiene la extraña propiedad de no llegar a ser nunca más objetiva que en el primer nivel, allí donde Salviati, simplemente, está *acertado*, y Simplicio *desacertado*. Luego, el enigma permanece: ¿qué necesidad había de agregar a Sagredo? La respuesta es que este personaje aporta la ilusión de salida fuera del sistema, en cierto sentido intuitivamente atractivo.

El zen y la "salida"

También en el zen es visible esta preocupación por el concepto de trascendencia con respecto al sistema. Por ejemplo, el koan en el cual Tozan dice a sus monjes que "el budismo más elevado no es Buda". Es posible, inclusive, que la autotrascendencia sea el tema central del zen. Un adepto al zen siempre está tratando de comprender más profundamente qué es él mismo, apartándose para ello más y más de lo que él ve que es, violando todas las reglas y convenciones que, según advierte, lo encadenan, incluyendo, obviamente, las del propio zen. En algún punto de este elusivo sendero puede suceder la iluminación. De todas maneras (como yo lo veo), se espera que mediante la paulatina profundización del autoconocimiento, mediante la paulatina ampliación del ámbito del "sistema", sobrevenga por último un sentimiento de unidad con todo el universo.

Pensamientos edificantes de un fumador

Aquiles ha sido invitado a la casa del Cangrejo.

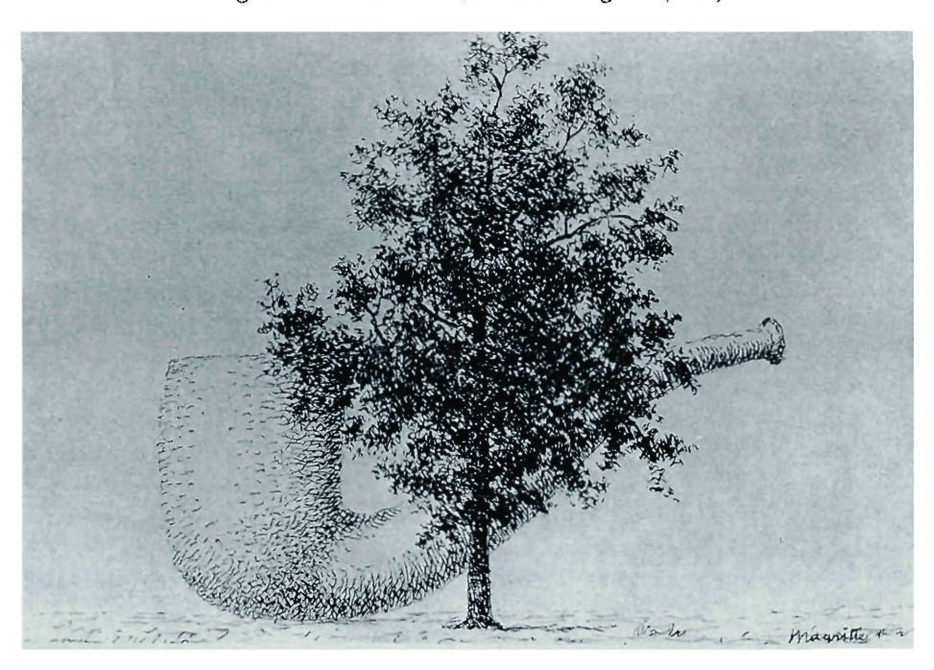
Aquiles: Veo que ha hecho algunos agregados desde la última vez que estuve aquí, señor Cangrejo. Estos cuadros son notablemente llamativos.

Cangrejo: Muy amable. Soy un gran devoto de ciertos pintores, especialmente de René Magritte; la mayoría de las pinturas que tengo son de él, es mi predilecto.

Aquiles: Le confieso que algunas de sus imágenes me parecen muy enigmáticas. De alguna manera, estas pinturas de Magritte me recuerdan las obras de MI pintor predilecto, M. C. Escher.

Cangrejo: Me doy cuenta. Tanto Magritte como Escher emplean un gran realismo para explorar los mundos de la paradoja y la ilusión; ambos tienen un sentido preciso del poder evocador de ciertos símbolos vi-

Figura 77. Las sombras, *de René Magritte (1966).*



suales y —algo que sus mismos admiradores a veces no advierten— ambos tienen el sentido de la gracia de la línea.

Aquiles: Sin embargo, hay una gran diferencia entre ellos. Me gustaría saber cómo se la podría caracterizar.

Cangrejo: Sería fascinante compararlos en detalle.

Aquiles: Debo reconocer que el dominio del realismo por parte de Magritte es asombroso. Por ejemplo, esa pintura que hay allí de un árbol con una pipa gigantesca detrás me dejó absorto.

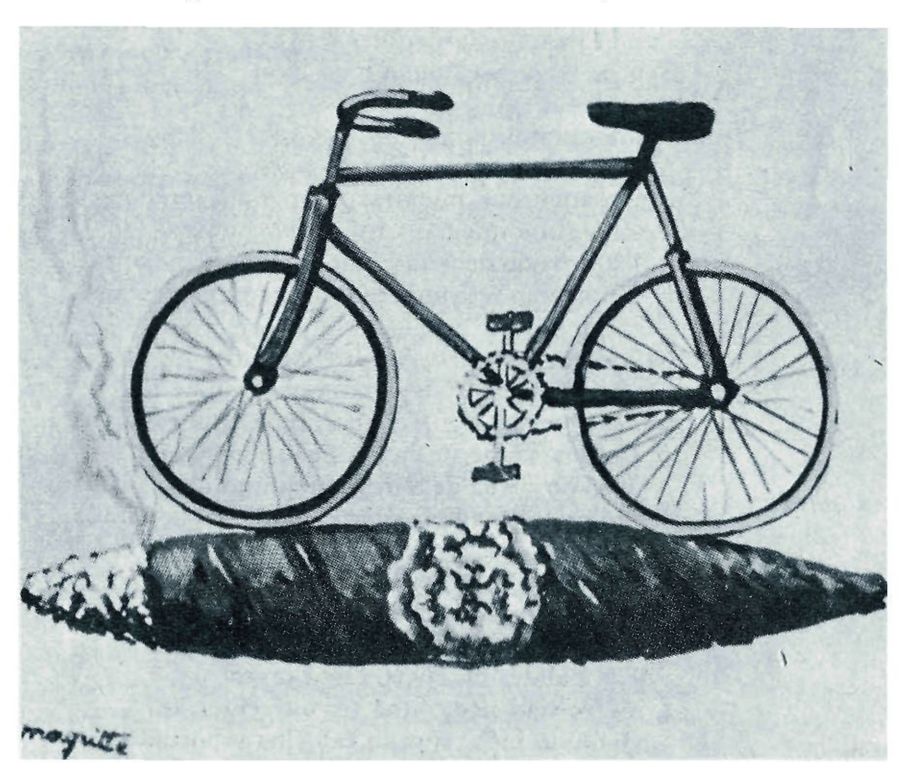
Cangrejo: Claro, usted quiere decir una pipa normal con un árbol diminuto delante . . .

Aquiles: Oh, ¿eso es lo que es? Bueno, como quiera que sea, cuando lo observé por primera vez, ¡estaba convencido de estar oliendo tabaco de pipa! No se imagina usted lo ridículo que me siento.

Cangrejo: Lo comprendo perfectamente. Es frecuente que mis invitados sufran ese engaño.

(*Así diciendo, llega hasta el cuadro, quita la pipa de detrás del árbol, la da vuelta y la golpea ligeramente contra la superficie de la mesa: el cuarto se llena de fuerte olor a tabaco de pipa. Comienza a colocarle una nueva carga de tabaco.*)

Figura 78. Estado de Gracia, *de René Magritte (1959).*



Es una bella pipa antigua, Aquiles. Créase o no, el hornillo tiene un revestimiento de cobre, lo cual le da un curado maravilloso.

Aquiles: ¡Un revestimiento de cobre! ¡No me diga!

Cangrejo (*saca una caja de fósforos, y enciende su pipa*): ¿No quiere probar, Aquiles?

Aquiles: No, gracias. Sólo fumo cigarros, de vez en cuando.

Cangrejo: ¡No hay ningún problema! ¡Aquí mismo tengo uno! (*Se dirige hacia otro cuadro de Magritte, donde aparece una bicicleta parada sobre un cigarro encendido.*)

Aquiles: Uhh . . . no, gracias, ahora no.

Cangrejo: Como guste. Yo sí soy un fumador empedernido, y esto me recuerda . . . seguramente está usted enterado de lo aficionado que era Bach a fumar en pipa.

Aquiles: No lo tengo muy presente.

Cangrejo: A Bach le encantaba versificar, filosofar, fumar en pipa y componer música (no necesariamente en ese orden). Combinó las cuatro cosas en un gracioso poema al cual puso música; figura en las célebres anotaciones que él llevaba para su esposa, Anna Magdalena, y se llama

Pensamientos edificantes
de un fumador

Siempre que mi pipa tomo y de tabaco lleno
Y para entretener el tiempo fumo,
Mis pensamientos, mientras resoplo allí sereno,
Forman una imagen triste, color humo:
Esto me demuestra cuán estrecha semejanza
Tengo con esta pipa que en mi mano descansa.

Igual que yo, mi pipa caliente y olorosa
De nada más que de barro está compuesta;
También barro yo seré cuando baje a mi fosa.
Me rodearán de tierra sin pedirme respuesta,
Y en dos se ha de partir ante mi propia mirada;
Sin duda ésta es la suerte que tengo deparada.

Ninguna mancha la ha conseguido oscurecer;
La pipa sigue blanca. Y sé por eso
Que cuando a la muerte deba presto responder
De la palidez mi cuerpo será preso.
Se volverá negro una vez esté enterrado:
Igual la pipa, si gran calor ha soportado.

O, cuando la pipa está del todo incandescente,
  Se ve entonces como, sin tiempo que perder,
El humo se mezcla con el aire transparente,
  Hasta dejar sólo cenizas para ver.
    Así la fama humana también se ha de quemar
    Y al polvo ella y su cuerpo habrán de retornar.

Es muy frecuente que a aquel que fuma le suceda:
  Ya no encontrar el tapón en el estante,
Y utilizar entonces como mejor se pueda
  El propio dedo, que se quema al instante.
    Si dentro de esta pipa mora semejante ardor,
    Cómo dolerá el infierno con todo su calor.

Así gracias a mi pipa, en contemplación
  De aquellas cosas, puedo constantemente
Gozarme con los frutos de la meditación.
  Y entre bocanadas, placenteramente.
    En tierra o mar, en la patria o en el exterior
    Yo fumo mi pipa y reverencio a mi Señor.

Encantadora filosofía, ¿verdad?

Aquiles: Ya lo creo. Bach fue un forjador muy placentero de expresiones.

Cangrejo: Me saca usted las palabras de la boca. Le diré que en mis buenos tiempos he tratado de escribir versos talentosos. Pero mucho temo no estar a la altura de lo que acabamos de escuchar. Yo no tengo ese dominio de las palabras.

Aquiles: Oh, vamos, vamos, señor Cangrejo; usted es . . . ¿cómo podría decirlo? sumamente afecto a juegos y astutas construcciones. Me sentiría muy complacido si puedo oír alguna de sus composiciones.

Cangrejo: Me siento halagadísimo. ¿Qué le parece si escuchamos un disco donde yo mismo interpreto una de mis canciones? No recuerdo cuándo la escribí; su título es "Una canción sin fecha ni estación".

Aquiles: ¡Qué poético!

(*El Cangrejo elige uno de entre sus discos y se dirige hacia un gigantesco y complejo aparato. Lo abre e inserta el disco en una boca mecánica de aspecto ominoso. Súbitamente, un brillante relámpago de luz verdosa barre la superficie del disco y, luego de un momento, éste es silenciosamente arrastrado hacia las ocultas entrañas de la fantástica máquina. Después de otra breve pausa, suenan los acentos de la voz del Cangrejo.*)

Un forjador muy placentero de expresiones,
Es afecto a juegos y astutas construcciones.
    El último verso, en sus poesías
    Parece sans timón, fuera de guías;
Lo que quiero decir es, sin por qué ni causa.

Aquiles: ¡Encantador! Unicamente que me intriga una cosa; me parece que el último verso, en su poesía, es . . .

Cangrejo: . . . ¿sans timón?

Aquiles: No . . . Lo que quiero decir es, sin rima ni razón.

Cangrejo: Quizá sea como usted dice.

Aquiles: Aparte de eso, es una composición muy hermosa, pero debo confesarle que estoy más intrigado todavía por este artefacto monstruosamente complejo. ¿No es más que un fonógrafo extragrande?

Cangrejo: Oh, no, es mucho más que eso. Es mi fonógrafo rompetortugas.

Aquiles: ¡Qué horror!

Cangrejo: Bueno, no estoy hablando de romper Tortugas, sino de romper los discos producidos por la señora Tortuga.

Aquiles: ¡Puff! Eso me tranquiliza algo. ¿Está relacionado con esa extraña disputa musical que enfrentó a usted y a la señora Tortuga hace un tiempo?

Cangrejo: En alguna medida. Permítame explicárselo con algún detalle: usted sabe que el refinamiento desarrollado por la señora Tortuga había alcanzado un punto en el que parecía estar en condiciones de destruir prácticamente cualquier fonógrafo que yo obtuviese.

Aquiles: Sin embargo, por lo último que supe acerca de vuestra batalla, tengo entendido que usted había conseguido al fin entrar en posesión de un fonógrafo invencible, dotado de cámara de televisión, una minicomputadora y cosas así, capaz de desmontarse a sí mismo y de reconstruirse de tal forma que no fuese destruido.

Cangrejo: ¡Ay ay ay, pobrecito de mí! Mi plan resultó chasqueado, pues la señora Tortuga se aprovechó de un pequeño detalle que a mí se me había pasado por alto: la subunidad que dirigía los pasos de desarmado y rearmado, en lo que a sí misma se refiere, se mantenía estable durante todo el proceso. Es decir que, por razones obvias, no podía desmontarse y reconstruirse a sí misma y entonces permanecía intacta.

Aquiles: Sí, pero, ¿qué consecuencias trajo eso?

Cangrejo: ¡Oh, las más lamentables! Fíjese, la señora Tortuga aplicó su método a fondo sobre la subunidad.

Aquiles: ¿Cómo es eso?

Cangrejo: Simplemente, ella fabricó un disco que inducía vibraciones fatales a la única estructura que, como ella advirtió, no se modificaba: la subunidad de desarmado y rearmado.

Aquiles: Oh, ya veo . . . qué ruindad.

Cangrejo: Así es. Y su estrategia funcionó, pero no la primera vez, le

aclaro. Yo creía haberla superado en astucia cuando mi fonógrafo sobrevivió a su primera arremetida; me sentía lleno de alegría. Pero en la siguiente ocasión, ella apareció con un brillo de determinación inflexible en sus ojos y me di cuenta de que eso anunciaba problemas. Coloqué su nuevo disco en la placa giratoria, y luego ambos nos pusimos a observar ansiosamente el trabajo de la subunidad computada, la cual examinó profundamente los surcos y después quitó el disco, desarmó el fonógrafo, lo volvió a armar de una manera asombrosamente distinta, volvió a colocar el disco, y a continuación, lentamente, hizo descender la aguja hasta ubicarla en la estría exterior.

Aquiles: ¡Increíble!

Cangrejo: No bien se oyeron los primeros sonidos, un fuerte ¡PLAFF! llenó la habitación. El aparato entero se había roto, pero lo más irreparablemente destrozado era el armador-desarmador. En ese doloroso instante comprendí por fin, con desaliento, que la Tortuga SIEMPRE se las ingeniaría para descubrir —usted me perdonará que use esta expresión— el talón de Aquiles del sistema.

Aquiles: ¡Qué barbaridad! Usted se habrá sentido desolado.

Cangrejo: Sí, durante un tiempo me sentí muy desdichado. Sin embargo, afortunadamente, no termina ahí la historia. Hay otro capítulo, el cual me enseñó una lección valiosa, que a mi vez puedo transmitir a usted. Por recomendación de la Tortuga, yo había estado echando un vistazo a un extraño libro lleno de curiosos diálogos sobre una diversidad de temas, como por ejemplo biología molecular, fugas, budismo zen y quién sabe qué otras cosas más.

Aquiles: Tal vez lo escribió uno de esos loquitos inofensivos, un excéntrico. ¿Cómo se llama el libro?

Cangrejo: Si no recuerdo mal, su título es *Cobre, plata, oro: una indestructible aleación metálica.*

Aquiles: Ah, la señora Tortuga me habló de ese libro. Su autor es un amigo suyo, quien según parece está fascinado por la metal-lógica.

Cangrejo: Quisiera saber cuál amigo es . . . Como sea, en uno de los diálogos me topé con unos *Pensamientos edificantes sobre el virus del mosaico del tabaco*, y también sobre los ribosomas y otras cosas raras que nunca había escuchado.

Aquiles: ¿Qué es el virus del mosaico del tabaco? ¿Qué son los ribosomas?

Cangrejo: No se lo puedo decir a la perfección, pues soy muy torpe en materia de biología. Lo único que conozco es lo que recogí de ese diálogo. Allí, se dice que los virus del mosaico del tabaco son objetos diminutos, cuyo aspecto se asemeja al de un cigarrillo, que provocan cierta enfermedad en las plantas de tabaco.

Aquiles: ¿Cáncer?

Cangrejo: No, no exactamente, sino que . . .

Aquiles: ¿Y qué? ¡Si una planta de tabaco fuma, contrae cáncer! ¡Se lo tiene bien merecido!

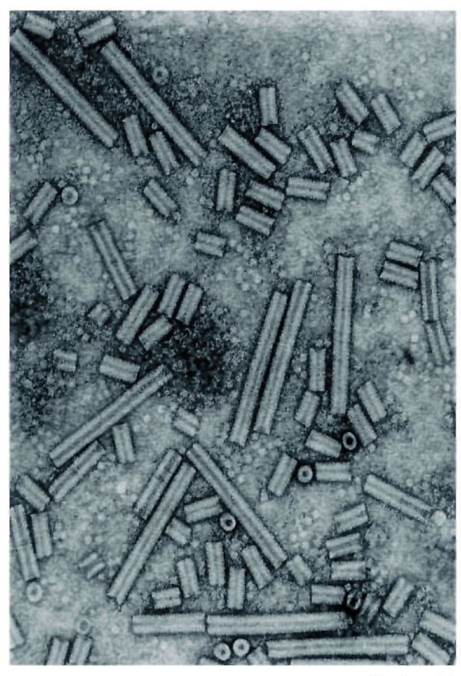


Figura 79. Virus del mosaico del tabaco. *[Tomado de A. Lehninger, Biochemistry (New York: Worth Publishers, 1976).]*

Cangrejo: Creo que se está dejando llevar a conclusiones apresuradas, Aquiles. Las plantas de tabaco no FUMAN esos "cigarrillos", sino que éstos aparecen sin ser invitados y las atacan.

Aquiles: Está claro. Bueno, ahora que ya sé todo sobre el virus del mosaico del tabaco, dígame qué es un ribosoma.

Cangrejo: Según parece, un ribosoma es una cierta clase de entidad subcelular que toma un mensaje dotado de una forma determinada y lo transforma en un mensaje provisto de otra forma.

Aquiles: ¿Algo así como un grabador o un fonógrafo pequeñísimos?

Cangrejo: Metafóricamente, tal vez eso sea correcto. Pero lo que acaparó mi atención fue una línea donde un personaje extraordinariamente gracioso menciona el hecho de que los ribosomas —igual que el virus del mosaico del tabaco y algunas fantásticas estructuras biológicas más— poseen "la desconcertante capacidad de autoensamblarse espontáneamente". Son sus propias palabras.

Aquiles: Es una de las líneas más graciosas, lo comprendo.

Cangrejo: Precisamente eso es lo que pensó el otro personaje del diálogo. Sin embargo, se trata de una interpretación absurda de la afirmación.

(*El Cangrejo aspira profundamente su pipa y lanza al aire bocanadas de humo.*)

Aquiles: Bueno, ¿qué es, entonces, el "autoensamblado espontáneo"?

Cangrejo: Se trata de que, cuando ciertas unidades biológicas, dentro de una célula, se desarman, ellas pueden volverse a armar a sí mismas en

forma espontánea: sin ser dirigidas por ninguna otra unidad. Las porciones se reúnen y ¡ya!, se adhieren.

Aquiles: Parece cosa de magia. ¿No sería maravilloso que un fonógrafo de tamaño normal tuviera esa propiedad? Quiero decir, si un "fonógrafo" en miniatura como un ribosoma puede actuar así, ¿por qué no un fonógrafo grande? Eso le permitiría a usted contar con un fonógrafo indestructible, ¿verdad? Cada vez que fuese destruido, se autorrecompondría a sí mismo.

Cangrejo: Exactamente eso es lo que pensé. Sin perder un segundo escribí al fabricante que me provee, le expliqué el concepto de autoensamblado y le pregunté si podría construirme un fonógrafo que pudiese desarmarse a sí mismo y, espontáneamente, autoensamblarse de una manera distinta.

Aquiles: Una respetable cuenta para pagar.

Cangrejo: Verdaderamente; el caso es que, varios meses después, el fabricante me escribió diciéndome que finalmente lo había logrado . . . por cierto, me remitió una respetable cuenta. Y un memorable día, ¡ah! llegó por correo mi Gran Fonógrafo Autoensamblador. Llamé entonces por teléfono a la señora Tortuga, lleno de confianza, y la invité a probar mi último fonógrafo.

Aquiles: Así que este magnífico objeto que tenemos delante es propiamente la máquina de que me está hablando.

Cangrejo: Me temo que no, Aquiles.

Aquiles: No me diga que una vez más . . .

Cangrejo: Lo que usted está sospechando, mi querido amigo, es lo que pasó. No pretendo entender las razones; fue todo demasiado doloroso como para recordarlo . . . ver todos esos resortes y cables esparcidos caóticamente por el suelo, y nubes de humo por aquí y por allá . . . oh, pobre de mí . . .

Aquiles: Calma, calma, señor Cangrejo, no lo tome así.

Cangrejo: Ya estoy bien; es con demasiada frecuencia que debo pasar por estas desesperaciones. Bueno, continúo: luego de su regocijo inicial, la señora Tortuga comprendió cuán afectado me sentía yo y tuvo misericordia. Intentó consolarme, explicándome que el asunto no tenía remedio, por algún motivo relacionado con el "Teorema" de vaya a saber quien, pero yo no podía seguir una palabra de todo eso. Me parece que sonaba como "Teorema tortuguiano".

Aquiles: Me pregunto si no diría "Teorema gödeliano"; ella me estuvo hablando del Teorema de Gödel en una oportunidad . . . era algo bastante siniestro.

Cangrejo: Es posible. No recuerdo.

Aquiles: Puedo asegurarle, señor Cangrejo, que he seguido su relato lleno de simpatía hacia su situación; es verdaderamente triste. Pero dijo usted que había una alternativa esperanzada; se lo ruego, acláreme en qué consiste.

Cangrejo: Ah, sí . . . una alternativa esperanzada. Bueno, finalmente abandoné mi búsqueda de la "perfección" en materia de fonógrafos y resolví que sería mejor reforzar mis defensas contra los discos de la Tortuga. Llegué a la conclusión de que un objetivo más modesto que el de tener un fonógrafo capaz de hacer escuchar cualquier cosa es el de tener, sencillamente, un fonógrafo capaz de SOBREVIVIR: que pudiera evitar la destrucción, aun a costa de no poder tocar más que unos pocos discos.

Aquiles: Así que decidió sacrificar la capacidad de reproducir todo sonido posible al desarrollo de refinados mecanismos anti-Tortuga, ¿eh?

Cangrejo: Vea . . . yo no diría precisamente que lo "decidí"; más veraz sería decir que fui OBLIGADO a ello.

Aquiles: Sí, me doy cuenta de qué quiere usted significar.

Cangrejo: Mi nueva idea consistió en evitar que ningún disco "ajeno" fuese tocado en mi fonógrafo. Yo sabía que mis propios discos eran inofensivos, de modo que si impedía que cualquier otro infiltrase SUS discos, tendría protegido mi fonógrafo, y podría seguir utilizándolo para disfrutar de mi música preferida.

Aquiles: Una excelente estrategia para su nuevo objetivo. ¿Y esta cosa gigantesca que aquí tenemos es la culminación de esas líneas de acción?

Cangrejo: Así es. La señora Tortuga, por cierto, ha comprendido que debe cambiar SU estrategia. Su meta principal, ahora, es inventar un disco que pueda eludir a mis censores: un nuevo tipo de desafío.

Aquiles: ¿Y cómo tiene pensado mantener alejados los discos de la señora Tortuga, y otros discos "ajenos"?

Cangrejo: ¿Me promete usted no revelar mi estrategia a la señora T?

Aquiles: Palabra de Tortuga.

Cangrejo: ¿Cómo?

Aquiles: Oh . . . es sólo un modo de decir, que yo he tomado de la señora T. No se preocupe: le juro que su secreto no saldrá de mí.

Cangrejo: Está bien. Bueno, mi plan básico es utilizar una técnica de ROTULACION. A todos y cada uno de mis discos les será adherido un rótulo secreto. El fonógrafo que tiene usted ante sí, lo mismo que sus predecesores, contiene una cámara de televisión que examina los discos, y una computadora que procesa los datos revelados por el examen y controla las operaciones posteriores. ¡Mi idea es, simplemente, romper todos los discos que no tengan el rótulo adecuado!

Aquiles: ¡Ah, dulce venganza! Pero me parece que su plan puede frustrarse fácilmente. Todo lo que la señora Tortuga necesita es apoderarse de uno de sus discos, ¡y reproducir su rótulo!

Cangrejo: No es tan simple, Aquiles. ¿Por qué piensa usted que ella podrá distinguir el rótulo con respecto al resto del disco? Puede estar mejor disimulado de lo que usted cree.

Aquiles: ¿Quiere usted decir que podría estar integrado, de alguna manera, a la música misma?

Cangrejo: Ni más ni menos. Pero existe un medio de desentrelazarlos: se

requiere la extracción visual de los datos del disco, y luego . . .

Aquiles: ¿Eso era el brillante relámpago verde que vi?

Cangrejo: Sí. Era la cámara de televisión haciendo el escrutinio de los surcos. Los patrones de éstos son enviados a la minicomputadora, la cual analiza el estilo musical de la pieza que yo he colocado: todo ello es cumplido en silencio, el disco no ha sido ejecutado para nada todavía.

Aquiles: ¿Y luego viene un proceso de selección, que elimina las piezas que no se ajustan al estilo establecido?

Cangrejo: Lo ha captado usted bien, Aquiles. Los únicos que son aprobados en esta segunda verificación son los discos con piezas de mi propio estilo: cosa que a la señora Tortuga le será prácticamente imposible imitar. Como ve, pues, estoy seguro de ser el vencedor en esta nueva batalla musical. No obstante, debo reconocer que la señora Tortuga también se siente segura de lo mismo, y de que se las ingeniará para que un disco suyo evite a mis censores.

Aquiles: ¿Y haga añicos su maravilloso aparato?

Cangrejo: Oh, no; ella ya ha demostrado ese aspecto. Ahora no desea más que probarme que puede introducir un disco —un disco inofensivo— y burlar así todas las medidas que yo pueda haber tomado para impedirlo. Ella sigue murmurando cosas sobre canciones de extraño título, como por ejemplo "Puedo ser escuchada mediante el Fonógrafo X". ¡Pero eso no ME intimida! Lo único que me inquieta un poco es que, como antes, da la impresión de contar con ciertos recursos sombríos que . . . que . . . (*Hace silencio. Luego, mostrándose muy pensativo, aspira varias veces su pipa.*)

Aquiles: Mmmm . . . Yo diría que la señora Tortuga se enfrenta con una tarea imposible. ¡Ella se ha encontrado, de una vez por todas, con la horma de su zapato!

Cangrejo: Es llamativo que piense usted eso . . . No creo que conozca usted al dedillo el Teorema de Henkin, ¿verdad?

Aquiles: ¿Que yo conozca al dedillo el Teorema de QUIEN? Jamás oí hablar de nada parecido. Estoy seguro de que es fascinante, pero preferiría seguir enterándome de otras cosas acerca de esta "música para infiltrar fonógrafos". Es una narración entretenida; realmente, sospecho que puedo anticipar el final: obviamente, la señora Tortuga descubrirá que no tiene modo de seguir adelante, y admitirá con humildad su fracaso; eso será todo, ¿no le parece?

Cangrejo: Por lo menos, es lo que yo espero que ocurra. ¿Le agradaría conocer algo del funcionamiento interno de mi fonógrafo defensivo?

Aquiles: Encantado. Siempre he ansiado ver el funcionamiento de una cámara de televisión.

Cangrejo: Dicho y hecho, mi amigo. (*Va hasta la abierta "boca" del gran fonógrafo, desconecta algunos interruptores y extrae un instrumento rodeado por una pulcra caja.*) Fíjese, el conjunto íntegro está compuesto por módulos independientes, los cuales pueden ser quitados y usados

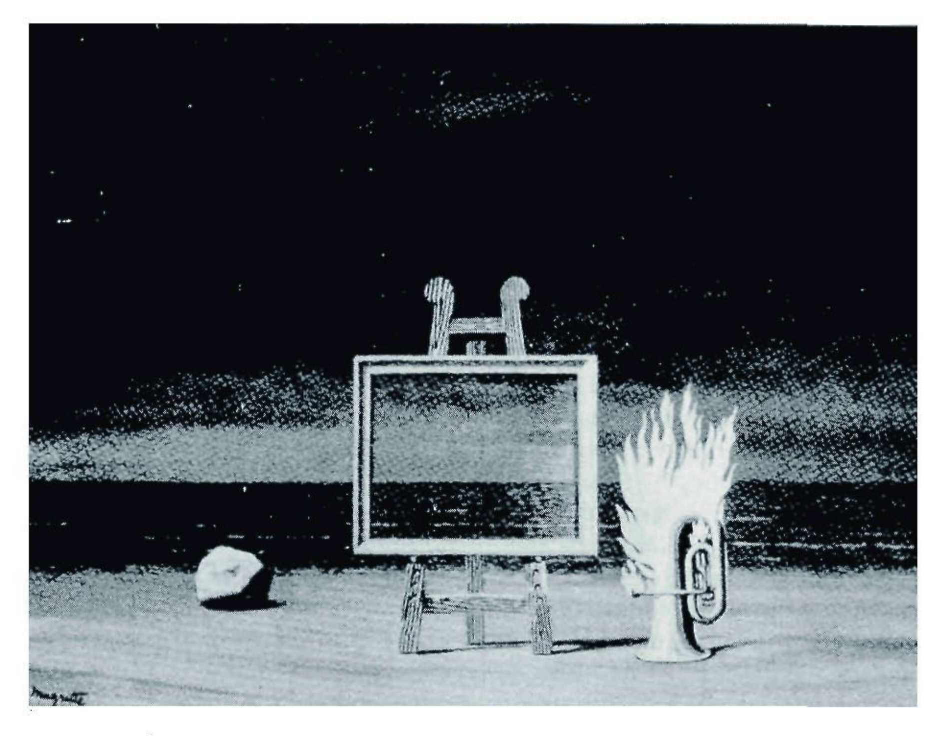


Figura 80. La muestra cautiva, *de René Magritte (1947).*

separadamente. Esta cámara de televisión, por ejemplo, funciona perfectamente bien por sí misma. Observe aquella pantalla, debajo de la pintura con una tuba en llamas. (*Dirige la cámara a Aquiles, quien aparece al instante en la gran pantalla.*)

Aquiles: ¡Terrorífico! ¿Puedo probar?

Cangrejo: Por supuesto.

Aquiles (dirigiendo la cámara al Cangrejo): Está USTED allí, señor Cangrejo, en la pantalla.

Cangrejo: Allí estoy.

Aquiles: ¿Y si apunto la cámara hacia el cuadro con la tuba incendiada? ¡También está en la pantalla, ahora!

Cangrejo: La cámara está equipada como para hacer alejamientos y acercamientos, Aquiles. Utilícelos.

Aquiles: ¡Fabuloso! Déjeme sólo enfocar el extremo de esas llamas, allí donde se acercan al marco ubicado en el caballete . . . Es fantástico esto de poder "copiar" instantáneamente sobre la pantalla todo lo que hay en el cuarto, todo lo que yo desee. Todo lo que tengo que hacer es dirigir la cámara y el objeto aparece en la pantalla como por arte de magia.

Cangrejo: ¿TODO LO QUE HAY en la habitación, Aquiles?

Aquiles: Todo lo que está a la vista, es obvio.

Cangrejo: ¿Qué ocurre, entonces, si dirige usted la cámara hacia las llamas de la pantalla?

(*Aquiles gira la cámara de modo que apunte directamente a la parte de la pantalla donde aparecen —o aparecían— las llamas.*)

Aquiles: ¡Eh, esto es gracioso! ¡Este solo acto hace que las llamas DESAPAREZCAN de la pantalla! ¿Adónde se fueron?

Cangrejo: No se puede conservar una imagen en la pantalla si al mismo tiempo la cámara es movida.

Aquiles: Me doy cuenta . . . Pero no puedo entender qué es eso que hay ahora en la pantalla . . . ¡en absoluto! Parece una extraña y larga galería. Sin embargo, no estoy dirigiendo la cámara hacia ninguna galería, estoy seguro. Simplemente estoy apuntando a una pantalla común de televisión.

Cangrejo: Observe más atentamente, Aquiles, ¿ve usted realmente una galería?

Aquiles: Aaaah, ahora está claro. Es un conjunto de reproducciones de la pantalla, una dentro de otra y haciéndose cada vez más pequeñas, más pequeñas, más pequeñas . . . ¡Por supuesto! La imagen de las llamas TENIA que irse, porque surgía cuando yo apuntaba a la PINTURA con la cámara; si dirijo la cámara a la PANTALLA, entonces aparece la pantalla misma, con lo que fuere que haya en la pantalla en ese momento, lo cual es la pantalla misma, con lo que fuere que haya en la pantalla en ese momento, lo cual es la pantalla misma, con . . .

Cangrejo: Creo que puedo adivinar lo que sigue, Aquiles; ¿por qué no prueba a hacer rotar la cámara?

Aquiles: ¡Oh! ¡Aparece una bella galería en espiral! Cada pantalla hace un movimiento de giro dentro de la pantalla que la enmarca, de manera que, cuanto mayor es su grado de desplazamiento rotatorio, más pequeña se la ve con respecto a la pantalla exterior. Esto de que una pantalla de televisión se "autoincluya" es algo misterioso.

Cangrejo: ¿Qué entiende por "autoinclusión", Aquiles?

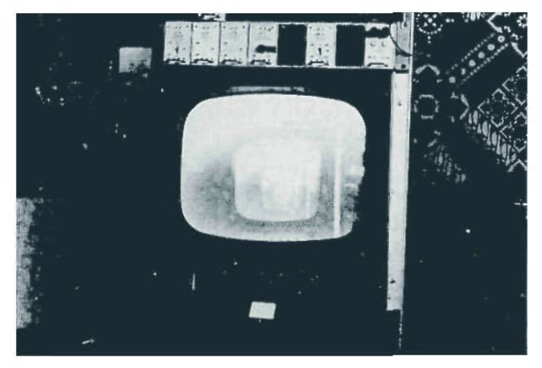
Aquiles: El hecho de que yo apunte a la pantalla, o a parte de la pantalla, con la cámara. ESO es autoinclusión.

Cangrejo: ¿Tiene inconveniente en que yo insista un poco acerca de ello? Esta nueva noción me llena de intriga.

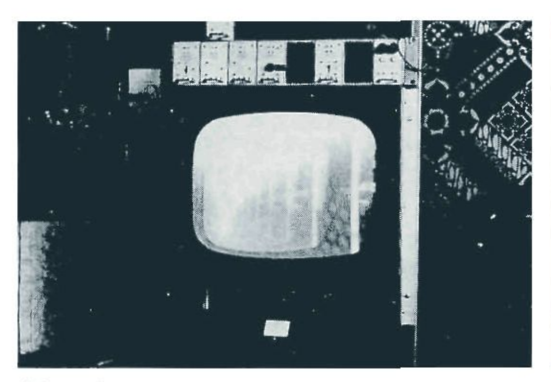
Aquiles: También a mí.

Cangrejo: Muy bien, pues. Entonces, si usted dirige la cámara hacia el ANGULO de la pantalla, ¿sigue habiendo lo que usted llama "autoinclusión"?

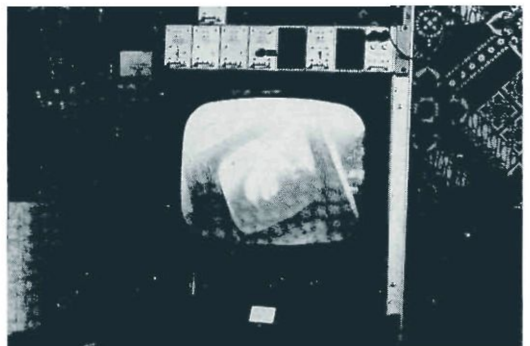
Aquiles: Déjeme probar. Hmmm . . . la "galería" de pantallas abandona los límites, así que ya no hay una reproducción infinita. Es una imagen bonita, pero no creo que cumplimente el espíritu de la autoinclusión. Es una "autoinclusión frustrada".



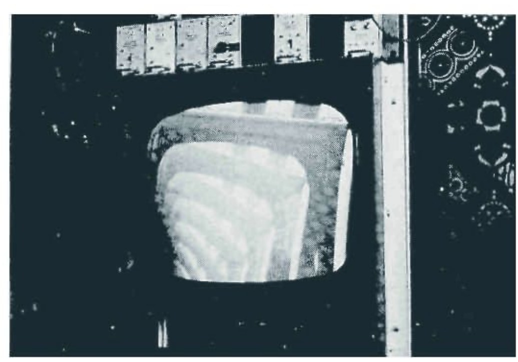
(*a*) *El caso más simple.*



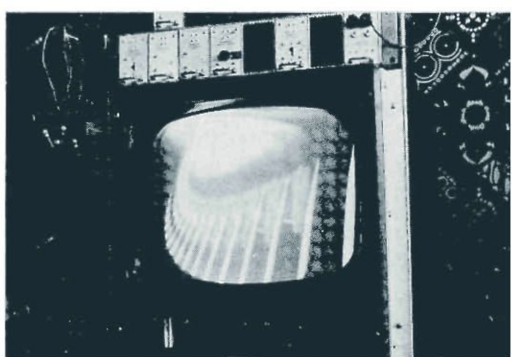
(*b*) *La "galería" de Aquiles.*



(*c*) *Lo que sucede cuando se hace rotar la cámara.*



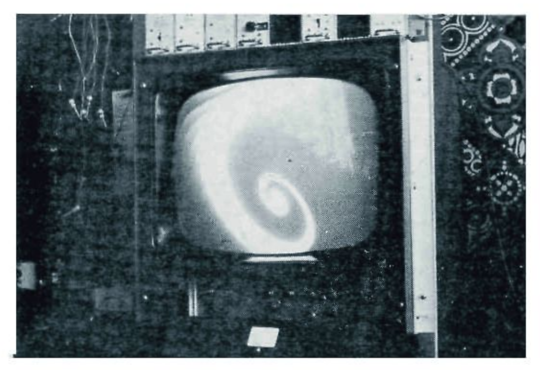
(*d*) *Una "autoinclusión frustrada".*



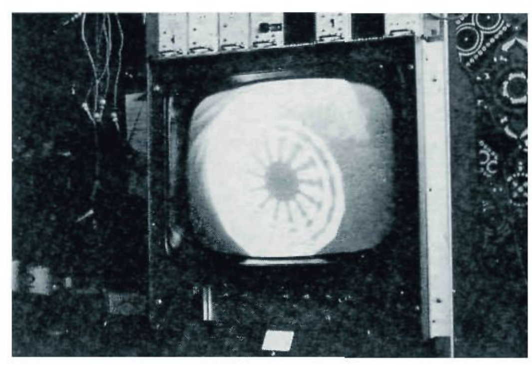
(*e*) *Lo que sucede cuando se practica acercamiento.*

(*f*) *Efecto combinado: rotación y acercamiento.*

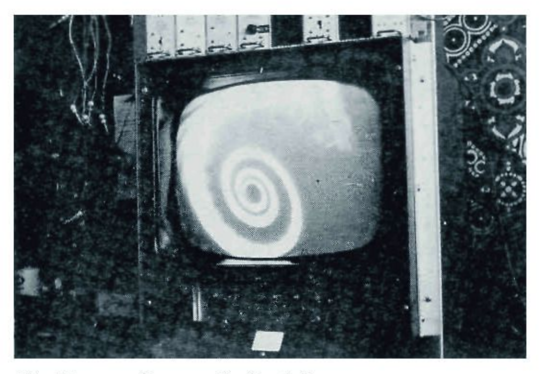
Figura 81. Doce pantallas de televisión autoincluidas. Habría agregado una más, si 13 no fuese primo.



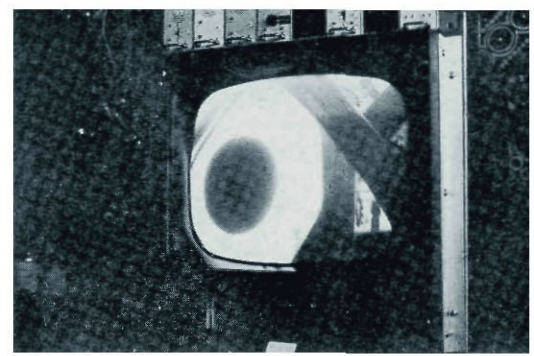
(*g*) *Comienza el misterio . . .*



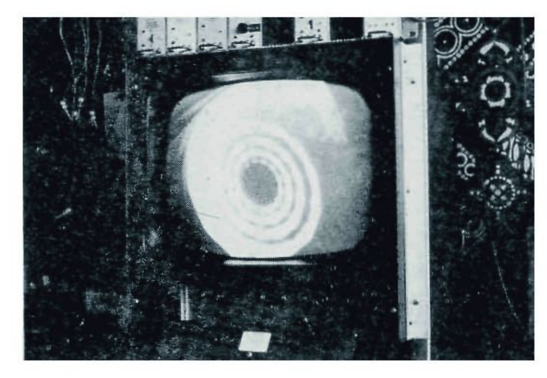
(*j*) *Ultimos estadios de una galaxia. ¡Cuente el número de rayos!*



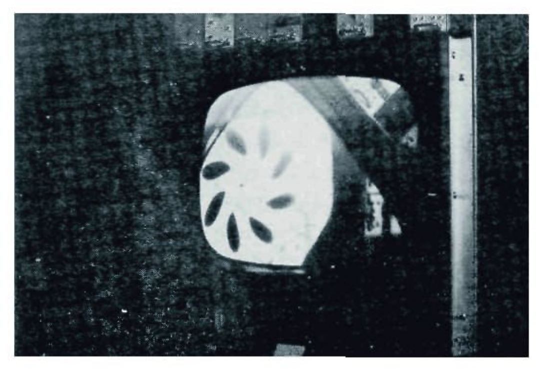
(*h*) *Ha nacido una "galaxia".*



(*k*) *La galaxia se ha incinerado, y se convierte . . . ¡en un negro agujero!*



(*i*) *La galaxia evoluciona . . .*



(*l*) *Un "patrón de pulsación en pétalo", sorprendido en medio de uno de sus latidos.*

Cangrejo: Si desliza la cámara hacia el centro de la pantalla, quizá vuelva a fijarla en el enfoque del principio . . .

Aquiles (*girando la cámara lenta y cautelosamente*): ¡Sí! La galería se hace más y más grande . . . ¡Ahí está! Ya la tenemos de nuevo; se la ve con una profundidad tal que desvanece la distancia. La galería vuelve a ser infinita justamente en el momento en que la cámara abarca TODA la pantalla. Mmmm . . . esto me recuerda algo que la señora Tortuga me decía hace poco: la autorreferencia se produce únicamente cuando un enunciado se refiere a la TOTALIDAD de sí mismo . . .

Cangrejo: ¿Cómo, Aquiles?

Aquiles: Oh, nada . . . murmuraba para mí mismo.

(*Cuando Aquiles opera las lentes y otros controles de la cámara, aparece una profusión de nuevos tipos de imágenes autoincluidas: espirales en remolino que semejan galaxias, formas como las de flores caleidoscópicas y gran variedad de contornos diferentes . . .*)

Cangrejo: Parece divertirse mucho, Aquiles.

Aquiles (*deja la cámara*): ¡No le quepa duda! ¡Qué riqueza de imágenes puede crear este simple recurso! (*Observa la pantalla y una expresión de asombro cruza su rostro.*) ¡No puede ser! ¡Está latiendo un contorno en forma de pétalo en la pantalla! ¿De dónde provienen esas pulsaciones? La cámara y la televisión están inmóviles . . .

Cangrejo: De vez en cuando, aparecen formas que se modifican andando el tiempo. Es así porque pasa un breve instante, dentro del circuito, entre el momento en que la cámara "ve" algo y el momento en que ese objeto surge en la pantalla: alrededor de una centésima de segundo. Así, si se tiene una inclusión de profundidad, digamos, cincuenta, la demora producida rondará en el medio segundo. Si, de la manera que sea, aparece una imagen móvil en la pantalla, como por ejemplo si uno pone un dedo frente a la cámara, transcurre cierto lapso hasta que las pantallas más profundas lo "encuentren". Ese transcurso, en consecuencia, reverbera a través de todo el sistema, a modo de eco visual. Si las cosas son dispuestas a ese efecto, el eco no se extingue y se obtienen así patrones de pulsasión.

Aquiles: ¡Pasmoso! Digo yo . . . ¿y si intentáramos una autoinclusión TOTAL?

Cangrejo: ¿Qué entiende exactamente por semejante cosa?

Aquiles: Bueno, creo que este asunto de las pantallas dentro de las pantallas es interesante, pero me gustaría conseguir una imagen de la cámara de televisión Y de la pantalla, EN la pantalla. Sólo entonces habré incluido el sistema dentro de sí mismo, pues la pantalla no es más que una PARTE del sistema.

Cangrejo: Ya veo. Tal vez empleando este espejo obtenga el efecto que busca.



Figura 82. El aire y la canción, *de René Magritte (1964).*

(*El Cangrejo señala un espejo que Aquiles manipula, junto con la cámara, de manera tal que tanto la cámara como la pantalla aparezcan en esta última.*)

Aquiles: ¡Ahora sí! ¡He creado una autoinclusión TOTAL!

Cangrejo: Yo diría que usted se está limitando al frente del espejo . . . ¿qué pasa con el dorso de éste? Si no fuera por él, el espejo no sería reflexivo y usted no habría podido reproducir la cámara sobre la pantalla.

Aquiles: Tiene razón. Pero si quiero mostrar el frente y el dorso de este espejo, necesito un segundo espejo.

Cangrejo: En ese caso, sin embargo, le hará falta mostrar el dorso de ese espejo, a su vez. ¿Y qué le parece incluir, además del frente del aparato de televisión, la parte de atrás? Y hay que tener en cuenta el cordón eléctrico, y el interior del aparato de televisión, y . . .

Aquiles: ¡Uy uy uy! ¡Mi cabeza comienza a dar vueltas! Creo que este "proyecto de autoinclusión total" es un poquito problemático. Me siento algo mareado.

Cangrejo: Sé perfectamente cómo se siente. ¿Por qué no descansa en este sillón y se saca de la mente todo ese asunto de la autoinclusión? Cálmese. Observe mis cuadros y verá como se tranquiliza.

(*Aquiles se recuesta y suspira.*)

Oh, ¿quizá el humo de mi pipa le molesta? La apartaré. (*Se la quita de la boca y la ubica con mucho cuidado por sobre algunas palabras escritas, en otra pintura de Magritte.*) ¡Eso es! ¿Se siente mejor?

Aquiles: Sigo un poco aturullado. (*Señala la pintura.*) Muy interesante; me gusta la forma en que ha sido enmarcada, especialmente esa pulida taracea rodeada por el marco de madera.

Cangrejo: Le agradezco el elogio. Yo la mandé a hacer en forma especial: es un revestimiento de oro.*

Aquiles: ¿Un revestimiento de oro? ¿Y qué más hay? ¿Qué dicen esas palabras debajo de la pipa? No están en español, ¿verdad?

Cangrejo: No, están en francés. Dicen "*Ceci n'est pas une pipe*", y eso quiere decir: "Esto no es una pipa", lo cual es perfectamente cierto.

Aquiles: ¡Pero si ES una pipa! ¡Acaba usted de fumar con ella!

Cangrejo: Oh, usted está interpretando mal la expresión, me parece. La palabra "*ceci*" se refiere a la pintura, no a la pipa. Por supuesto, la pipa es una pipa: pero una pintura no es una pipa.

Aquiles: Me pregunto si ese "*ceci*" de dentro de la pintura se refiere a TODA la pintura o solamente a la pipa de dentro de la pintura. ¡Caramba! ¡Sería OTRA autoinclusión! No me siento muy bien, señor Cangrejo, creo que me voy a enfermar . . .

* Esta última expresión completa un juego de alusiones que comienza con el "revestimiento de cobre" de la pipa. Lo que tradujimos como *alternativa esperanzada*, líneas más atrás, es, en inglés, un giro idiomático que reza "silver lining", es decir, textualmente: *revestimiento de plata*. [T.]

CAPITULO XVI

Autorref y autorrep

EXAMINAREMOS, EN ESTE CAPITULO, algunos de los mecanismos originadores de autorreferencia en diversos contextos y los compararemos con los mecanismos que permiten, a algunos sistemas, autorreproducirse. Quedarán a la vista algunos notables y bellos paralelos entre ambos órdenes.

Enunciados implícita y explícitamente autorreferenciales

Para comenzar, veamos algunos enunciados que, a primera vista, parecen proveer los casos más simples de autorreferencia:

(1) Este enunciado contiene cinco palabras.
(2) Este enunciado carece de sentido porque es autorreferencial.
(3) Este enunciado sin verbo.
(4) Este enunciado es falso. (Paradoja de Epiménides.)
(5) El enunciado que estoy escribiendo es el enunciado que usted está leyendo.

Todos los casos anteriores, a excepción del último (el cual es anómalo), se ajustan a un mecanismo aparentemente simple. Sin embargo, tal mecanismo dista mucho de ser simple: todos estos enunciados "flotan" en el contexto del idioma; se los puede comparar a témpanos, de los que solamente la punta está a la vista. Las secuencias de palabras constituyen esa parte visible, mientras que la invisible consiste en el procesamiento necesario para comprenderlas. En este sentido, su significación es implícita, no explícita. Ningún enunciado, por supuesto, cuenta con significación totalmente explícita, pero cuanto más explícita es la autorreferencia, más fáciles de percibir serán los mecanismos subyacentes a la misma. En el caso presente, para que pueda ser reconocida la autorreferencialidad de los enunciados, se requiere cierto grado de dominio de un idioma como el español, el cual está en condiciones de abordar la cuestión lingüística, pero también es imprescindible poder determinar el referente de la expresión "este enunciado". Parece algo simple, pero está subordinado a nuestra capacidad —muy compleja, aunque totalmente incorporada— para valernos del español. Lo que es especialmente importante es la capacidad

de determinar el referente de una frase nominal que contenga un adjetivo demostrativo. Tal aptitud es elaborada con mucha lentitud, y por ningún concepto puede ser considerada trivial. Las dificultades tal vez sean mayores cuando un enunciado como *el número* (4) es presentado a alguien, por ejemplo un niño, ingenuo en materia de paradojas y de artificios lingüísticos; es posible que este interlocutor diga: "¿*Cuál* enunciado es falso?", y tenga que emprender un perseverante esfuerzo hasta captar la idea de que el enunciado está hablando de sí mismo; idea que, en su conjunto, afronta resistencias mentales al principio. Un par de ilustraciones puede brindar alguna ayuda (figuras 83 y 84). La figura 83 puede ser interpretada en dos niveles: en uno, es un enunciado que apunta hacia sí mismo; en el otro, es la imagen de Epiménides ejecutando su propia sentencia de muerte.

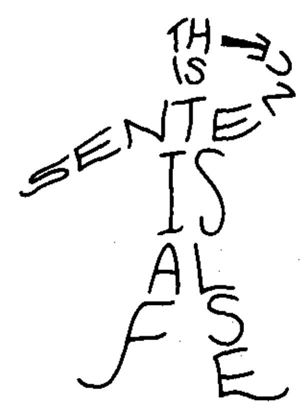


Figura 83. (Adaptación)

La figura 84, que exhibe las porciones visible y no visible del témpano, sugiere la proporción relativa de enunciado que es necesario procesar para obtener el reconocimiento de la autorreferencia:

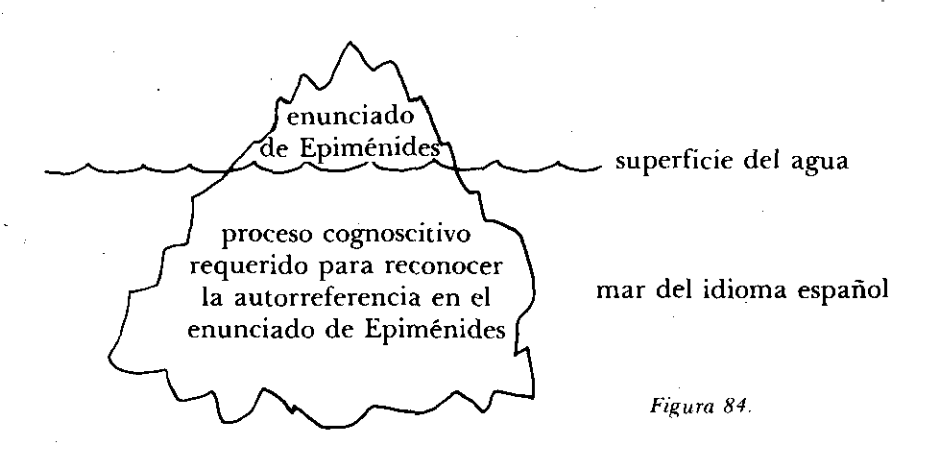


Figura 84.

Es entretenido intentar la creación de un enunciado autorreferencial sin utilizar el recurso de decir "este enunciado". Se puede probar citando un enunciado dentro de sí mismo. Por ejemplo:

> El enunciado "El enunciado contiene cinco palabras" contiene cinco palabras.

Pero es un intento destinado a fracasar, pues todo enunciado que vaya a ser citado por entero dentro de sí mismo debería ser más breve que sí mismo, salvo que estemos dispuestos a tomar en consideración enunciados infinitamente extensos, tales como:

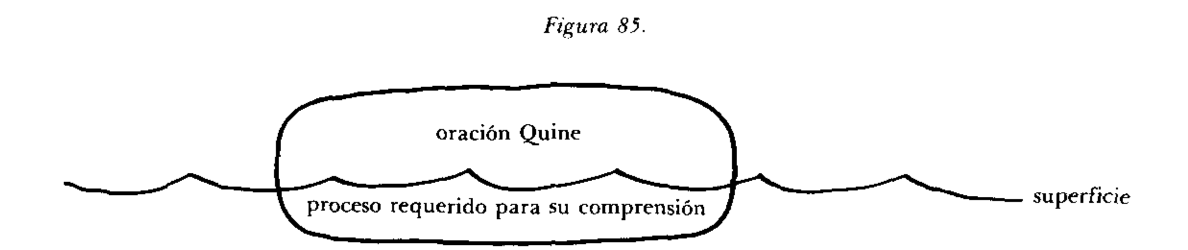
El enunciado
"El enunciado
"El enunciado
"El enunciado
.
.
.
etc. etc.
.
.
.
es infinitamente extenso"
es infinitamente extenso"
es infinitamente extenso"
es infinitamente extenso.

Pero esto no funciona en enunciados finitos. Por la misma razón, la cadena G de Gödel no puede contener el numeral explícito de su propio número Gödel: no cabría. Ninguna cadena de TNT puede contener el numeral TNT de su propio número Gödel, pues ese numeral siempre contiene más símbolos que la cadena misma. Pero existe la escapatoria de hacer que G contenga una *descripción* de su propio número Gödel, por medio de las nociones de "sust" y de "aritmoquinificación".

Una manera de obtener autorreferencia en un enunciado español gracias a la descripción, en lugar del recurso de citarse a sí mismo o de utilizar la expresión "este enunciado", es el método de Quine, ilustrado en el diálogo *Aire sobre la cuerda de G*. La comprensión de la oración de Quine requiere de un proceso mental menos sutil que los cuatro ejemplos que dimos líneas más atrás. Pese a que a primera vista parece más complicado, en realidad es, de alguna manera, un procedimiento más explícito. La construcción Quine es enteramente similar a la construcción Gödel en cuanto a la forma en que genera autorreferencia a través de la descrip-

ción de otra entidad tipográfica, la cual resulta ser isomórfica a la oración Quine misma. La descripción de la nueva entidad tipográfica es cumplida por una bipartición de la oración Quine: una de las partes es un conjunto de *instrucciones* para elaborar una determinada expresión, mientras que la otra contiene los materiales constructivos que han de ser empleados, o sea que es un *molde*. Esto se asemeja más a un pan de jabón dentro del agua que a un témpano (véase figura 85).

Figura 85.



La autorreferencialidad de esta oración es concretada de modo más directo que en la paradoja de Epiménides: el procesamiento recóndito que se requiere es menor. Al margen, es interesante señalar que en la oración anterior aparece la expresión "esta oración", pero no ha sido incluida allí para ocasionar autorreferencia; el lector habrá entendido que su referente es la oración Quine, y no la oración dentro de la cual se presenta. Esto muestra precisamente que las expresiones indicativas del tipo "esta oración" son interpretadas de acuerdo al contexto que las rodee y también contribuye a *probar* que el procesamiento de tales expresiones es sumamente complejo.

Un programa autorreproductor

La noción de quinereamiento y su utilización para generar autorreferencia ya fueron explicadas en el Diálogo, de modo que no hay por qué volver a ellas. En cambio, vamos a ver cómo la misma técnica puede ser empleada por un programa de computadora con la finalidad de reproducirse a sí mismo. El programa autorreproductor que sigue ha sido formulado en un lenguaje análogo al BlooP, y su base consiste en hacer *suceder* a una expresión por su propia cita (esto es, el orden opuesto al del quinereamiento, por lo cual invertiré el término "quine" para obtener "eniuq"):

```
DEFINIR PROCEDIMIENTO "ENIUQ" [MOLDE]: IMPRIMIR [MOLDE, PA-
RENTESIS IZQUIERDO, COMILLAS, MOLDE, COMILLAS, PARENTESIS
DERECHO, PUNTO].
```

```
ENIUQ
   ['DEFINIR PROCEDIMIENTO "ENIUQ" [MOLDE]: IMPRIMIR [MOLDE,
   PARENTESIS IZQUIERDO, COMILLAS, MOLDE, COMILLAS, PAREN-
   TESIS DERECHO, PUNTO] ENIUQ'].
```

ENIUQ es un procedimiento definido en las tres primeras líneas y su entrada se denomina "MOLDE". Se entiende que, cuando se apela al procedimiento, el valor de MOLDE será el de cierta cadena de caracteres tipográficos. El efecto que resulta de ENIUQ es la realización de una operación de impresión, en la cual MOLDE es impreso dos veces: la primera al desnudo, la segunda entre paréntesis y comillas simples (no dobles) y ornamentado con un punto final. Así, si el valor de MOLDE fuera la cadena REPITO PITO, la aplicación de ENIUQ produciría:

REPITO PITO ['REPITO PITO']

Ahora bien, en las cinco últimas líneas del programa anterior, se apela al procedimiento ENIUQ a través de un valor específico de MOLDE —a saber, la larga cadena encerrada por las comillas simples: DEFINIR . . . ENIUQ. Este valor ha sido cuidadosamente seleccionado: consiste en la *definición* de ENIUQ, seguida por la *palabra* ENIUQ. De este modo se logra que el programa mismo —o, si se quiere, una perfecta reproducción suya— resulte impreso. Es algo muy similar a la versión de Quine del enunciado de Epiménides:

"produce falsedad cuando es precedida por su cita"
produce falsedad cuando es precedida por su cita.

Es sumamente importante comprender que la cadena de caracteres que aparece entre comillas en las tres últimas líneas del programa anterior —esto es, el valor de MOLDE— no debe ser interpretado jamás como una secuencia de instrucciones. Si eso parece es, en cierto sentido, nada más que por accidente; como ya se dijo, la cadena de caracteres pudo muy bien haber sido REPITO PITO o cualquier otra. La belleza del esquema reside en que, cuando aparece la misma cadena en las tres líneas superiores del programa, *es* operada como un programa (porque no está entre comillas). De tal modo, en este programa una cadena funciona de dos formas: en primer lugar, como programa; en segundo lugar, como cuerpo de datos. Este es el secreto de los programas de autorreproducción y, como veremos, de las moléculas autorreproductoras. Y ya que estamos, conviene establecer que identificaremos a todo objeto o entidad autorreproductores como *autorrep*, y a todo objeto o entidad autorreferenciales como *autorref*. En adelante haré uso ocasional de estas denominaciones.

El programa precedente es un ejemplo preciso de programa autorreproductor, formulado en un lenguaje que no estaba previsto específicamente para facilitar la formulación de autorreps. Así, la tarea fue

cumplida mediante la utilización de nociones y operaciones a las que se manejó, sin que lo sean, como parte del lenguaje; la palabra COMILLAS, por ejemplo, o la orden IMPRIMIR. Supongamos, empero, que se idease un lenguaje expresamente destinado a formular autorreps con facilidad; en este caso, se podrían formular autorreps mucho más breves. Digamos, por ejemplo, que la operación de eniuq-ar fuese un rasgo constructivo del lenguaje, que no necesita definición explícita (tal como supusimos con respecto a IMPRIMIR). Una autorrep diminuta, entonces, sería la siguiente:

ENIUQ ['ENIUQ'].

Un resultado muy similar a la versión de la Tortuga de la versión de Quine de la autorref de Epiménides, donde se da por supuesto que el verbo "quinerear" es conocido:

"produce falsedad cuando es quinereada"
produce falsedad cuando es quinereada.

Pero las autorreps pueden ser más cortas. En algunos lenguajes de computadora, por ejemplo, puede incorporarse la convención de que todo programa cuyo primer símbolo es un asterisco sea copiado antes de ser ejecutado normalmente. Luego, ¡el programa que consiste solamente en un asterisco es una autorrep! Se puede objetar su banalidad y el hecho de que dependa de una convención totalmente arbitraria, pero ello sólo confirmaría mi observación anterior en el sentido de que es casi fraudulento utilizar la expresión "este enunciado" para lograr autorreferencialidad, pues reposa excesivamente en el procesador y no lo suficiente en instrucciones explícitas para la obtención de autorreferencialidad. Emplear un asterisco como ejemplo de autorrep es como emplear la palabra "Yo" como ejemplo de autorref: en ambos casos quedan ocultos todos los aspectos interesantes de los problemas respectivos.

Esto trae a la memoria otro curioso tipo de autorreproducción: la que producen las máquinas fotocopiadoras. Se puede sostener que todo documento escrito es una autorrep, porque da lugar a que sea impresa una copia de sí mismo cuando es colocado en una máquina fotocopiadora y a ésta le es oprimido el botón correspondiente. De alguna manera, sin embargo, esto transgrede nuestra noción de autorreproducción: la hoja de papel no es consultada en absoluto y, por lo tanto, no instruye acerca de su propia reproducción. Otra vez acá, toda la tarea está en manos del procesador. Antes de que asignemos a determinada cosa la calificación de autorrep, necesitamos contar con la certidumbre de que contiene explícitamente, con la máxima extensión posible, las indicaciones necesarias para su autocopiado.

No cabe duda de que la explicitud es una cuestión de grados; aun así,

existe una frontera intuitiva a uno de cuyos lados nos es dado percibir la genuina autorreproducción autodirigida, mientras que en el otro lado vemos meramente un trabajo de copia efectuado por una inflexible y autónoma máquina copiadora.

¿Qué es una copia?

Ahora bien, en toda discusión a propósito de autorrefs y autorreps, más tarde o más temprano se plantea la cuestión esencial: ¿qué es una copia? Ya abordamos este tema, muy seriamente, en los Capítulos V y VI; volveremos ahora sobre ello. Para ir entrando en materia, describiremos algunos ejemplos sumamente caprichosos, aunque eficaces, de autorrep.

Una canción autorreproductora

Imaginemos una cafetería donde hay una rockola que, cuando le son oprimidos los botones 11-U, pasa una canción cuya letra dice:

Introduzca otra moneda en, en la rockola,
Lo único que quiero es 11-U, y música, música, música.

Hagamos un diagrama de lo que sucede (figura 86):

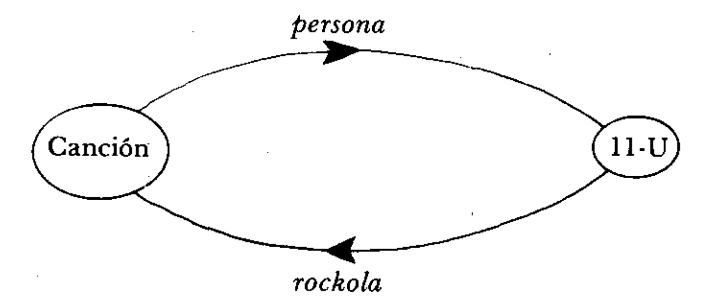


Figura 86. Una canción autorreproductora.

A pesar de que el efecto conseguido es que la canción se reproduzca a sí misma, sonaría extraño llamar autorrep a la canción, en virtud del hecho de que, cuando atraviesa el estadio 11-U, no toda la información está allí. La información se actualiza solamente porque está enteramente almacenada en la rockola, esto es, en una de las *flechas* del diagrama y no en ninguno de los óvalos del mismo. Es discutible que la canción contenga una descripción completa de cómo lograr su repetición, puesto que la pareja de símbolos "11-U" es nada más que un disparador, no una copia.

Un programa "cangrejo"

Consideremos ahora un programa de computadora que se imprima a sí mismo de atrás para adelante. (Algún lector puede divertirse pensando cómo formular un programa así en el lenguaje similar a BlooP mencionado hace poco, utilizando la autorrep dada como modelo.) ¿Este extraño programa sería admitido como autorrep? En cierta perspectiva, sí, porque una leve transformación realizada en su salida bastará para restaurar el programa original. Parece legítimo decir que la salida contiene la misma información que el propio programa, sólo que reformulado de una manera simple. Pero *no* hay duda de que alguien puede examinar la salida y no reconocerla como un programa impreso hacia atrás. Apelando a la terminología acuñada en el Capítulo VI, podríamos decir que el "mensaje interior" de la salida y el del programa son el mismo, pero que éstos tienen diferentes "mensajes exteriores": es decir, deben ser leídos mediante la utilización de mecanismos diferentes de decodificación. Ahora, si uno considera al mensaje exterior como parte de la información —lo cual da la impresión de ser absolutamente razonable— la información total, entonces, no es en definitiva la misma, por lo cual el programa no puede ser reputado autorrep.

Con todo, esta conclusión es perturbadora, porque estamos acostumbrados a aceptar que un objeto cualquiera, y su imagen reflejada por un espejo, contienen la misma información. Pero recordemos que, en el Capítulo VI, pusimos el concepto de "significación intrínseca" en dependencia con respecto a una hipotética noción universal de inteligencia. Esto quería decir que, para determinar la significación intrínseca de un objeto, podíamos pasar por alto ciertos tipos de mensaje exterior: aquellos que pueden ser universalmente comprendidos. Es decir, si el mecanismo decodificador parece brindar las bases necesarias, en algún sentido aún no bien definido, el mensaje interior que dicho mecanismo permite revelar es la única significación que importa. En este ejemplo, sería razonable conjeturar que una "inteligencia estándar" habrá de considerar que las imágenes reflejadas en dos espejos contienen ambas la misma información; en otros términos, habrá de considerar que el isomorfismo existente entre las dos imágenes es tan fútil que merece ser ignorado. De tal modo, nuestra intuición de que el programa, en alguna medida, es una legítima autorrep puede quedar en pie.

Epiménides a horcajadas sobre el Canal

Otro ejemplo de autorrep bastante forzado sería un programa que se imprimiera a sí mismo, pero traducido a un lenguaje de computadora diferente. Esto podría ser comparado con la curiosa versión de Quine de la autorref de Epiménides:

"est une expression qui, quand elle est précédée de sa traduction, mise entre guillemets, dans la langue provenant de l'autre côté de la Manche, crée une fausseté" is an expression which, when it is preceded by its translation, placed in quotation marks, into the language originating on the other side of the Channel, yields a falsehood.

(es una expresión que, cuando es precedida por su traducción, puesta entre *comillas*, a la lengua procedente del otro lado del Canal de la Mancha, produce una falsedad.)

El lector puede tratar de formular el enunciado descripto mediante la extraña mixtura precedente. (Sugerencia: no se trata de esta descripción misma, al menos si "misma" es considerada en forma ingenua.) Si la noción de "autorrep por movimiento retrógrado" (o sea, un programa que hace la formulación de sí mismo hacia atrás) nos hace evocar un canon cangrejo, la noción de "autorrep por traducción", a su vez, también nos hace evocar un tipo de canon: el que contiene una transposición del tema a otra tonalidad.

Un programa que da salida impresa a su propio número Gödel

La idea de dar salida impresa a la traducción de un programa en lugar de hacerlo con la copia exacta del original puede que parezca insustancial. Sin embargo, si se quiere formular un programa autorrep en BlooP o en FlooP, es necesario echar mano de algún recurso similar porque, en esos lenguajes, SALIDA es siempre un *número* y no una cadena tipográfica. En consecuencia, se debería conseguir que el programa imprimiera su propio número Gödel: un gigantesco entero cuya expansión decimal codifique el programa, carácter por carácter, mediante el empleo de codones de tres dígitos. El programa se aproximará todo lo que pueda a imprimirse a sí mismo, dentro de los medios de que dispone: da salida impresa a una copia de sí mismo en otro "espacio", y es fácil que haya deslizamientos entre el espacio de los enteros y el espacio de las cadenas. Luego, el valor de SALIDA no es un simple disparador, como "11-U": toda la información del programa original reposa "cerca de la superficie" de la salida.

Autorreferencia gödeliana

Lo anterior se asemeja mucho a la descripción del mecanismo de autorref G de Gödel. Después de todo, esa cadena de TNT contiene una descripción, no de sí misma, sino de un entero (la aritmoquinificación de u). Tanto es así que ese entero es una "imagen" exacta de la cadena G, en el

espacio de los números naturales. *Por ende*, G se refiere a la traducción de sí misma a otro espacio. Nos sentimos cómodos llamando cadena autorreferencial a G, pese a lo que acabamos de decir, porque el isomorfismo entre los dos espacios es tan estrecho que podemos considerar idénticos a éstos.

Ese isomorfismo que refleja a TNT dentro del reino abstracto de los números naturales puede ser comparado al cuasi isomorfismo que refleja al mundo real dentro de nuestros cerebros, a través de símbolos. Los símbolos juegan papeles cuasi isomórficos con respecto a los objetos, y es gracias a ellos que podemos pensar. De igual manera, los números Gödel juegan papeles isomórficos con respecto a las cadenas, y es gracias a ellos que podemos descubrir significaciones metamatemáticas en enunciados referidos a números naturales. Lo pasmoso, casi mágico, de G, es que se las ingenia para obtener autorreferencia a pesar de que el lenguaje en el cual está formulada TNT, *no* parece abrir ninguna esperanza de que pueda referirse a sí mismo, a diferencia de un lenguaje idiomático como el inglés o el español, dentro de los cuales el hablar acerca de sí mismos es la cosa más fácil del mundo.

Por consiguiente, G es un ejemplo destacado de autorref por vía de traducción . . . para nada el caso más transparente. Uno podría, asimismo, remitirse a algunos de los Diálogos que son, por su parte, autorrefs por vía de traducción: la *Sonata para solo de Aquiles*, por ejemplo. En este Diálogo, aparecen varias referencias a las Sonatas de Bach para solo de violín, y es particularmente interesante la propuesta de la Tortuga en el sentido de imaginar acompañamientos de clavicordio. En definitiva, si uno aplica esta idea al Diálogo mismo, *inventa* las líneas a cargo de la Tortuga; pero si uno da por supuesto que se trata solamente de la voz de Aquiles (tal cual como el violín), es un rotundo error atribuir línea alguna a la Tortuga. En cualquier caso, he aquí una autorref lograda en virtud de una correspondencia que, a su vez, surge del hecho de que los Diálogos calcan composiciones de Bach. Y esta proyección, por supuesto, se ha dejado al alcance de la advertencia del lector. Así y todo, aun cuando el lector no la advierta la proyección sigue allí, y el Diálogo sigue siendo autorref.

Una autorrep por aumentación

Acabamos de señalar semejanzas entre autorreps y cánones. Para seguir con ello, *¿dónde* habría algo válidamente análogo a un canon por aumentación? Se presenta una posibilidad: tomar en consideración un programa que contenga un bucle falso, cuyo único propósito fuera el de agregarle lentitud al programa. Podría haber un parámetro que indique la frecuencia de repetición del bucle. La autorrep que se elabore daría salida impresa a una copia de sí misma, pero con el parámetro cambiado, de modo que cuando esa copia sea procesada, lo haga a la mitad de la veloci-

dad de su programa paterno; y la "hija" de esa copia será procesada a la mitad de la mitad de la velocidad, y así siguiendo . . . Ninguno de estos programas se imprimirá exactamente a sí mismo; sin embargo, no hay duda de que todos pertenecen a una misma "familia". Esto trae a la memoria la autorreproducción de los organismos vivos. Indudablemente, un individuo nunca es idéntico a ninguno de sus padres; ¿por qué, entonces, el acto de gestar nuevos seres es llamado "autorreproducción"? La respuesta es que hay un isomorfismo de grano grueso entre padres e hijos: es un isomorfismo que preserva la información relativa a la *especie*. Así, lo reproducido es la *clase*, no el *caso*. Es lo que sucede en la representación recursiva *diseño G*, del Capítulo V: la proyección entre "mariposas magnéticas" de diversos tamaños, y ciertas formas, es de grano grueso; no hay dos que sean idénticas, pero todas ellas pertenecen a la misma "especie", y la proyección, precisamente, preserva ese hecho. En términos de programas de autorreplicación, esto integraría una *familia* de programas, todos ellos formulados en "dialectos" de un mismo lenguaje de computadora, donde cada uno puede formularse a sí mismo, pero de un modo ligeramente modificado, de lo cual resulta un dialecto del lenguaje original.

Una autorrep kimiana

Quizá el ejemplo más solapado de autorrep sea el siguiente: en vez de formular una expresión legítima del lenguaje compilador, se teclea uno de los mensajes de error, propios del compilador. Cuando el compilador observa su "programa", lo primero que hace es sentirse confundido, porque ve que su "programa" es no gramatical; entonces, da impresión de salida a un mensaje de error. Todo lo que se necesita maquinar es que este mensaje coincida con el que se tecleó al principio. Esta clase de autorrep, que me fuera sugerida por Scott Kim, saca partido de un nivel del sistema que difiere del nivel al que uno normalmente se aproximaría. Aunque parezca un ejemplo baladí, podemos encontrar equivalentes del mismo en sistemas complejos donde las autorreps compiten entre sí para sobrevivir, como lo veremos muy pronto.

¿Qué es un original?

Además de la pregunta "¿Qué es una copia?", hay otra pregunta filosófica fundamental con respecto a las autorreps. Constituye la otra cara de la moneda, y dice: "¿Qué es el original?" Lo mejor será explicarla a través de algunos ejemplos:

(1) un programa que, cuando es interpretado por un intérprete que opera una computadora, se da impresión de salida a sí mismo;

(2) un programa que, cuando es interpretado por un intérprete que opera una computadora, se da impresión de salida a sí mismo juntamente con una copia completa del intérprete (el cual, al fin y al cabo, también es un programa);

(3) un programa que, cuando es interpretado por un intérprete que opera una computadora, no *solamente* da impresión de salida a sí mismo juntamente con una copia completa del intérprete, sino que también dirige un proceso ensamblador mecánico, con el cual una segunda computadora, idéntica a aquella donde el intérprete y el programa están en proceso, es puesta en coordinación.

Está claro que, en (1), el programa es la autorrep. Pero en (3), ¿la autorrep es el programa, o el sistema combinado de programa más intérprete, o la *unión* de programa, intérprete y procesador?

Ciertamente, una autorrep puede involucrar algo más que la sola autoimpresión. La mayor parte de lo que sigue, en este capítulo, está dedicado a hablar de las autorreps en las cuales los datos, el intérprete y el procesador están profundamente entrelazados, y donde la autorreplicación implica la replicación de todos ellos a un mismo tiempo.

Tipogenética

Estamos ya a punto de introducirnos en uno de los temas más fascinantes y complejos de este siglo: el estudio de "la lógica molecular del estado vivo", para utilizar la expresión altamente sugerente de Albert Lehninger. Es una lógica, sin duda, pero de un género más bello y complejo que el imaginado por cualquier mente humana. La abordaremos desde un ángulo un tanto original: a través de un juego de artificio, de un solitario al cual he llamado *Tipogenética*, abreviatura de "Genética Tipográfica". Mediante la Tipogenética, he tratado de capturar algunas ideas del ámbito de la genética molecular dentro de un sistema tipográfico que, a primera vista, se asemeja mucho a los sistemas formales ejemplificados por el sistema MIU. La Tipogenética, por supuesto, abarca gran cantidad de simplificaciones, y por tanto su utilidad principal es de índole didáctica.

Debo decir, sin demora, que el campo de la biología molecular es un sitio donde interactúan fenómenos correspondientes a diversos niveles, y que la Tipogenética intentará solamente la ilustración de fenómenos de uno o dos niveles. En particular, se han omitido los aspectos puramente químicos, pues pertenecen a un nivel ubicado por debajo del que trataremos aquí; de modo similar, también se han omitido todos los aspectos relacionados con la genética clásica (esto es, la genética no molecular), en este caso porque pertenecen a un nivel ubicado por encima del que trata-

remos aquí. Con la Tipogenética, únicamente pretendo aportar una visión intuitiva de los procesos centrados en torno al famoso *Dogma Central de la Biología Molecular*, enunciado por Francis Crick (uno de los codescubridores de la estructura en doble hélice del ADN):

ADN ⇒ ARN ⇒ proteínas.

Espero que el muy esquemático modelo que he construido permita la percepción, por parte del lector, de ciertos principios simples que unifican el campo y que presentados de otra manera pueden quedar oscurecidos por la interacción enormemente complicada de los fenómenos, en muy distintos niveles. Lo que se sacrifica es, por supuesto, la exactitud rigurosa; lo que se gana, así confío, es un poco de comprensión.

Cadenas, bases, enzimas

El juego de la Tipogenética comprende la manipulación tipográfica de secuencias de letras. Estas últimas son las siguientes:

A C G T.

Las secuencias arbitrariamente formadas con ellas son llamadas *cadenas*. Así, algunas cadenas son:

GGGG
ATTACCA
CATCATCATCAT

Dicho al margen, "STRAND", deletreado de atrás para adelante, comienza con "DNA".* Es una coincidencia adecuada porque las cadenas, en Tipogenética, llenan la función de secciones de DNA (ADN) —las cuales, en la genética real, son llamadas frecuentemente "strands" (cadenas)—. No sólo ello, sino que el deletreo completo de "STRAND" hacia atrás arroja "DNA RTS", que muy bien puede ser interpretado como las siglas de "DNA Rapid Transit Service"; también esto es muy oportuno, pues la función de "ARN mensajero" —que en Tipogenética también es representada por cadenas— resulta magníficamente caracterizada por la expresión "Rapid Transit Service" (Servicio de Tránsito Rápido), aplicada al ADN, como veremos más adelante.

En ocasiones me referiré a las letras A, C, G, T como *bases*; y a las posiciones que ocupen, como *unidades*. Así, en la segunda de las cadenas

* "Strand" es la palabra que estamos traduciendo como *cadena*; "DNA", *ADN* en español, es la expresión abreviada de ácido deoxirribonucleico (o desoxirribonucleico). [T.]

enunciadas más arriba, hay siete unidades, en la cuarta de las cuales se encuentra la base A.

Si se tiene una cadena, es posible operar sobre ella y modificarla de diversas maneras. Se pueden producir cadenas adicionales, bien mediante el copiado, bien seccionando una cadena en dos; algunas operaciones alargan las cadenas, otras las reducen y otras más no alteran su longitud.

Las operaciones se presentan en paquetes, es decir, diversas operaciones que deben ser realizadas en conjunto, ordenadamente. Tal paquete de operaciones se parece algo a una máquina programada que se moviese de un lado a otro de la cadena, produciendo ciertos efectos sobre ella; estas máquinas móviles son llamadas "enzimas tipográficas": *enzimas*, para abreviar; operan sobre las cadenas a razón de una unidad por vez y se dice que están "ligadas" a la unidad sobre la cual están operando en un momento dado.

Mostraremos cómo actúan algunas especies de enzimas sobre determinadas cadenas. La primera cosa por saber es que las enzimas gustan de comenzar ligándose a una letra específica. Así, hay cuatro clases de enzima: las que prefieren A, las que prefieren C, etcétera. Dada la secuencia de operaciones que realiza una enzima, el lector puede determinar cuál es la letra que la misma prefiere, pero por ahora solamente presentaré dicha secuencia sin explicaciones. He aquí un espécimen de enzima, que consiste en tres operaciones:

(1) Suprimir la unidad a la cual está ligada la enzima (y ligarse luego a la unidad inmediatamente colocada a la derecha).
(2) Moverse una unidad a la derecha.
(3) Insertar una T (inmediatamente a la derecha de esa unidad).

Lo que sucede con esta enzima es que gusta de ligarse inicialmente a A. Lo que sigue es un ejemplar de cadena:

ACA

¿Qué ocurre si nuestra enzima se liga a la A de la izquierda y comienza a actuar? El paso 1 suprime la A, así que nos queda CA, y la enzima se liga ahora a la C. El paso 2 lleva a la enzima a su derecha, a la A, y el paso 3 agrega una T al final, para formar la cadena CAT. La enzima, de este modo, ha completado su misión: ha transformado ACA en CAT.

¿Y qué ocurre si se liga a la A de la *derecha* de ACA? Suprime esa A y abandona el extremo de la cadena. Dondequiera que ocurra esto, la enzima deja de operar (éste es un principio general). Luego, la única consecuencia ocasionada es la eliminación de un símbolo.

Veamos algunos ejemplos más. Esta es otra enzima:

(1) Buscar la pirimidina más cercana, a la derecha de esa unidad.
(2) Aplicar Procedimiento Copiador.
(3) Buscar la purina más cercana, a la derecha de esa unidad.
(4) Cortar la cadena en ese punto (es decir, a la derecha de la unidad en que se está).

Ahora bien, encontramos aquí los términos "pirimidina" y "purina"; es fácil explicarlos: A y G son llamados *purinas*, C y T son llamados *pirimidinas*. Por consiguiente, buscar una pirimidina significa sencillamente buscar la C o la T más próximas.

Vía de la Copia y cadenas dobles

La otra expresión nueva es *Procedimiento Copiador*. Cualquier cadena puede ser "copiada" sobre otra cadena, pero de una manera caprichosa. En lugar de copiar A sobre A, se la copia sobre T, y viceversa. Y, en lugar de copiar C sobre C, se la copia sobre G, y viceversa. Adviértase que una purina se copia sobre una pirimidina, y viceversa. Esto es llamado *apareamiento de bases complementarias*; los complementos son:

	complemento			
purinas	A	⇐⇒	T	*pirimidinas*
	G	⇐⇒	C,	

Para facilitar la memorización uno puede asociar a Aquiles con la Tortuga, y al Cangrejo con sus Genes.

"Copiar" una cadena, en consecuencia, no consiste realmente en copiarla, sino en elaborar su cadena *complementaria*; ésta, a su vez, será inscripta en forma invertida, encima de la cadena original. Veamos esto en términos concretos; tenemos una enzima anterior, digamos, que actúa sobre la cadena siguiente (también esta enzima es de las que prefieren comenzar en A):

CAAAGAGAATCCTCTTTGAT

Son muchos los lugares por donde puede comenzar; optemos, por ejemplo, por la segunda A. La enzima se liga a ella y ejecuta el paso 1: buscar, hacia la derecha, la pirimidina más cercana. Bien, esto significa una C o una T; la que aparece primero es una T, aproximadamente en el centro de la cadena, de modo que allí vamos. Sigue el paso 2: Procedimiento Copiador; bueno, basta con que ubiquemos una A invertida enci-

ma de esa T; pero eso no es todo, porque Procedimiento Copiador *sigue en vigencia* hasta que es interrumpido, o hasta que la enzima se agote, según lo que ocurra primero. Esto significa que a cada base atravesada por la enzima mientras opera el Procedimiento Copiador le será adjudicada una base complementaria, inscripta sobre sí. El paso 3 requiere la búsqueda de una purina, hacia la derecha de nuestra T: tiene que ser la G colocada en el antepenúltimo lugar de la cadena, de izquierda a derecha. Y, al desplazarnos a esta G, debemos "copiar", o sea, crear una cadena complementaria. He aquí el resultado:

∀⅁⅁∀⅁∀∀∀Ɔ
CAAAGAGAATCCTCTTTGAT

El último paso consiste en *cortar* la cadena, lo cual producirá dos tramos,

∀⅁⅁∀⅁∀∀∀Ɔ
CAAAGAGAATCCTCTTTG

y, además, AT.

Y ya está cumplido el paquete de instrucciones. Nos hemos quedado, sin embargo, con una cadena doble. Siempre que ocurra esto, separamos una de otra las dos cadenas complementarias (principio general); de manera que, en realidad, nuestro resultado final es un conjunto de tres cadenas:

AT, CAAAGAGGA y CAAAGAGAATCCTCTTTG.

Adviértase que la cadena invertida ha sido puesta sobre sus pies y por consiguiente su derecha y su izquierda han sido intercambiadas.

Ya hemos visto la mayor parte de las operaciones tipográficas que pueden ser efectuadas con las cadenas; hay otras dos que deben ser mencionadas: una *interrumpe* el Procedimiento Copiador; la otra *desplaza* la enzima desde una cadena hacia la cadena invertida ubicada sobre sí. Cuando sucede esto último, uno puede conservar la hoja de papel en posición normal, pero debe entonces intercambiar "izquierda" y "derecha" en todas las instrucciones; si no, pueden seguirse textualmente las instrucciones, pero girando 180 grados la hoja de papel, de modo que la cadena de arriba se haga normalmente legible. Si se da la orden de "desplazamiento", pero no hay base complementaria a la que pueda ligarse la enzima, en ese instante ésta se limita a separarse de la cadena y su misión queda cumplida.

Es necesario dejar señalado que, cuando aparece una instrucción de "cortar", ésta concierne a *ambas* cadenas (si hay dos); en cambio, "suprimir" se aplica solamente a la cadena sobre la cual está actuando la enzima. Si Procedimiento Copiador está *abierto*, la orden de *insertar* es para ambas cadenas: la base misma en la cadena sobre la cual está actuando la enzima, y su

complemento en la otra cadena. Si Procedimiento Copiador está *cerrado*, la orden de *insertar* se aplica únicamente a una cadena, de manera que en la cadena complementaria debe insertarse un espacio en blanco.

Y, siempre que Procedimiento Copiador esté *abierto*, las órdenes de "moverse" y "buscar" requieren que uno elabore bases complementarias para todas las bases que la enzima va tocando en su deslizamiento. Cabe mencionar que Procedimiento Copiador siempre está *cerrado* cuando comienza a actuar la enzima. Si Procedimiento Copiador está *cerrado* y surge la orden "Cerrar Procedimiento Copiador", no sucede nada; del mismo modo, si Procedimiento Copiador ya está *abierto* y la orden que surge es "Abrir Procedimiento Copiador", tampoco sucede nada.

Aminoácidos

Hay quince tipos de órdenes, cuya lista es la siguiente:

cor	______	cortar cadena(s)
sup	______	suprimir una base de la cadena
des	______	desplazar la enzima a otra cadena
mvd	______	moverse una unidad a la derecha
mvi	______	moverse una unidad a la izquierda
cop	______	abrir Procedimiento Copiador
crr	______	cerrar Procedimiento Copiador
ina	______	insertar A, a la derecha de esta unidad
inc	______	insertar C, a la derecha de esta unidad
ing	______	insertar G, a la derecha de esta unidad
int	______	insertar T, a la derecha de esta unidad
pid	______	buscar la pirimidina más cercana hacia la derecha
pud	______	buscar la purina más cercana hacia la derecha
pii	______	buscar la pirimidina más cercana hacia la izquierda
pui	______	buscar la purina más cercana hacia la izquierda

Cada una tiene una abreviatura de tres letras; nos referiremos a estas abreviaturas de tres letras mediante la denominación de *aminoácidos*. Luego, *toda enzima está constituida por una secuencia de aminoácidos*; formulamos a continuación una enzima arbitraria:

pud-inc-cop-mvd-mvi-des-pui-int

y una cadena arbitraria:

TAGATCCAGTCCATCGA

Veremos cómo actúa la enzima sobre la cadena. Esta enzima solamente se liga a G; comencemos, pues, por ligarla a la G del centro; luego busca-

mos una purina hacia la derecha (o sea, A o G). Pasamos por alto (nosotros, la enzima) TCC y recalamos en A. Insertamos una C. Tenemos ahora:

```
TAGATCCAGTCCACTCGA
               ↑
```

donde la flecha señala la unidad a la cual está ligada la enzima. Abrimos Procedimiento Copiador, que ubica una G invertida sobre la C. Nos movemos a la derecha, luego a la izquierda, y a continuación nos desplazamos a la otra cadena. Esto es lo que tenemos hasta aquí:

```
               ↓
               ƃ∀
TAGATCCAGTCCACTCGA
```

Démosle vuelta, de modo que la enzima quede fijada a la cadena de abajo:

```
∀ƃƆꞱƆ∀ƆƆꞱƃ∀ƆƆꞱ∀ƃ∀Ʇ
    AG
     ↑
```

Ahora, buscamos una purina a nuestra izquierda y encontramos A. Procedimiento Copiador está abierto, pero como las bases complementarias ya están allí, no agregamos nada. Por último, insertamos una T (en Procedimiento Copiador), y nos detenemos:

```
∀ƃƆꞱ∀Ɔ∀ƆƆꞱƃ∀ƆƆꞱ∀ƃ∀Ʇ
    ATG
     ↑
```

Nuestro resultado final, pues, consiste en dos cadenas:

ATG y TAGATCCAGTCCACATCGA

La cadena inicial, por supuesto, ya no existe.

La traducción y el código tipogenético

Ahora bien, uno puede preguntarse de dónde provienen las enzimas y las cadenas y cómo establecer las preferencias de una determinada enzima en materia de ligamiento. Una forma de resolver esto podría ser enunciar caprichosamente cadenas y enzimas, al mismo tiempo, y observar qué sucede cuando estas enzimas actúen sobre aquellas cadenas y su prole. Esto tiene algo del acertijo MU, donde encontrábamos algunas reglas de inferencia y un axioma y simplemente había que empezar. La única diferencia reside en que en este caso, cada vez que se actúa sobre una cadena la

forma original de ésta desaparece définitivamente. En el acertijo MU, operar sobre MI para obtener MIU no destruía a MI.

En Tipogenética, en cambio, lo mismo que en el campo de la genética real, el esquema es mucho más complejo. Comenzamos con una cadena arbitraria, análogamente a como lo hacemos con un axioma en un sistema formal; pero al principio no contamos con ninguna "regla de inferencia": a saber, con ninguna enzima. Sin embargo, ¡podemos *traducir* cada cadena a una o más enzimas! Así, las propias cadenas dictarán las operaciones por efectuarse sobre ellas, y tales operaciones producirán, a su vez, nuevas cadenas que dictarán nuevas enzimas, etc., etc. . . . ¡Verdaderamente, una extremada mixtura de niveles! Con fines comparativos, pensemos cuán diferente resultaría el acertijo MU si cada nuevo *teorema*, en él, produjese a su vez, por medio de algún código, una nueva *regla de inferencia*.

¿Cómo se realiza esta "traducción"? Implica un *Código Tipogenético* mediante el cual los pares contiguos de bases —llamados "dupletes"— *representan diferentes amimoácidos* dentro de una misma cadena. Existen dieciséis dupletes posibles: AA, AC, AG, AT, CA, CC, etc. Y hay quince aminoácidos. La figura 87 muestra el Código Tipogenético:

Primera base	*Segunda base* A	C	G	T
A		cor *r*	sup *r*	des *d*
C	mvd *r*	mvi *r*	cop *d*	crr *i*
G	ina *r*	inc *d*	ing *d*	int *i*
T	pid *d*	pud *i*	pii *i*	pui *i*

Figura 87. El Código Tipogenético, mediante el cual cada duplete de una cadena codifica uno o quince "amino-ácidos" (o un signo de puntuación).

De acuerdo con la tabla, la traducción del duplete GC es "inc" ("insertar una C"); la de AT es "des"; y así siguiendo. Por lo tanto, queda a la vista que una cadena puede dictar una enzima de manera muy directa. Por ejemplo, la cadena

TAGATCCAGTCCACATCGA

se fragmenta en dupletes del siguiente modo:

TA GA TC CA GT CC AC AT CG A

con la A separada, al final. Su traducción a enzimas es:

pid-ina-pud-mvd-int-mvi-cor-des-cop

(Tómese nota de que la A sobrante no tiene ninguna participación.)

La estructura ternaria de las enzimas

¿De qué se tratan las letras minúsculas '*r*', '*i*' y '*d*' que aparecen cerca del ángulo inferior derecho de cada cuadro? Son fundamentales para determinar las preferencias de las enzimas en materia de ligamiento, y ello en una forma peculiar. Para establecer a qué letra quiere ligarse una enzima, es necesario establecer la "estructura ternaria" de la enzima, la cual es, a su vez, determinada por la "estructura primaria" de la misma. Se entiende por *estructura primaria* su secuencia de aminoácidos; por *estructura ternaria* se entiende la forma en que prefiere "plegarse". El detalle central es que a las enzimas no les gusta desplegarse en línea recta, como las hemos exhibido hasta ahora. Cada aminoácido interno (excepción hecha de ambos extremos) tiene la posibilidad de "ensortijarse", la cual es regida por las letras de los ángulos: '*i*' y '*d*' representan, respectivamente, "izquierda" y "derecha", y '*r*' representa a "recto". Tomemos nuestro anterior ejemplar de enzima y pleguémoslo para mostrar su estructura ternaria. Comenzaremos con la estructura primaria de la enzima y luego la veremos extenderse de izquierda a derecha. En cada aminoácido cuya letra angular sea '*i*', haremos un giro a la izquierda; en los que tengan la letra '*d*', un giro a la derecha; cuando corresponda la '*r*', no habrá giro. La figura 88 exhibe la conformación bidimensional de nuestra enzima.

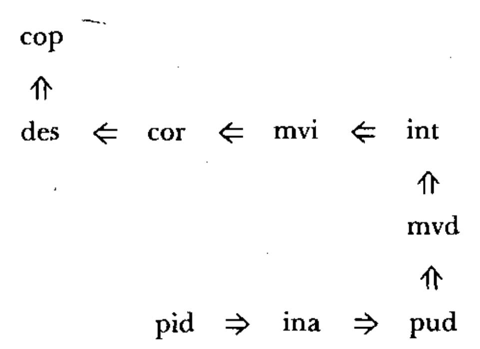


Figura 88. La estructura ternaria de una tipoenzima.

Adviértase el giro a la izquierda en "pud", el giro a la derecha en "des", etc., como también que el primer segmento ("pid ⇒ ina") y el último seg-

mento ("des ⇒ cop") son perpendiculares. Esta es la clave de las preferencias en materia de ligamientos; de hecho, la *orientación relativa del primero y del último segmento* de la estructura ternaria de una enzima determina la preferencia en materia de ligamiento de la enzima. Siempre podemos orientar la enzima de modo que su primer segmento apunte hacia la derecha; procediendo así, el último segmento determina la preferencia de ligamiento, como lo muestra la figura 89.

Primer segmento	Segundo segmento	Letra de ligamiento
⇒	⇒	A
⇒	⇑	C
⇒	⇓	G
⇒	⇐	T

Figura 89. Tabla de preferencias de ligamiento por parte de las tipoenzimas.

Así, en nuestro caso, tenemos una enzima que opta por la letra C. Si, al plegarse, una enzima se cruza a sí misma, ello no significa ninguna dificultad; basta con pensar que está pasando por debajo o por encima de sí misma. Adviértase que *todos* sus aminoácidos cumplen una función en la determinación de la estructura ternaria de la enzima.

Puntuación, genes y ribosomas

Queda una cosa por explicar: ¿por qué está en blanco el cuadro AA del Código Tipogenético? La respuesta es que el duplete AA actúa como signo de puntuación dentro de una cadena y señala el final de la codificación de una enzima. Esto es, una cadena puede codificar dos o más enzimas si contiene uno o más dupletes AA. Por ejemplo, la cadena

CG GA TA CT AA AC CG A

codifica *dos* enzimas:

cop-ina-pid-crr

y

cor-cop

con AA cumpliendo el papel de dividir la cadena en dos "genes". La definición de *gene* es: *la porción de una cadena que codifica una enzima indi-*

vidual. Nótese que la mera presencia de AA dentro de una cadena no significa que la cadena codifique dos enzimas. Por ejemplo, CAAG codifica a "mvd-sup". ¡AA comienza en una unidad de numeración par y por consiguiente no es leída como duplete!

El mecanismo que descifra las cadenas y produce las enzimas que están codificadas dentro de aquéllas se denomina *ribosoma*. (En Tipogenética, la función de los ribosomas la cumple quien practica el juego.) Los ribosomas no son responsables en absoluto de la estructura *ternaria* de las enzimas, pues ésta es enteramente determinada tan pronto es creada la estructura *primaria*. Conviene aclarar, por otra parte, que el proceso de *traducción* siempre se dirige *desde las cadenas a las enzimas*, jamás en sentido opuesto.

Acertijo: una autorrep tipogenética

Ahora que ya están expuestas todas las reglas de la Tipogenética, sería interesante comenzar a jugar. En forma particular, sería superlativamente interesante idear una cadena que se autorreplique. Veamos qué significa esto en el transcurso de las líneas siguientes: se formula una cadena individual, sobre la cual actúa un ribosoma, que produce alguna o todas las enzimas que están codificadas en la cadena; luego, estas enzimas son puestas en contacto con la cadena original, y se les permite operar sobre ella. Esto produce un conjunto de "cadenas hijas", las cuales atraviesan los ribosomas con la finalidad de producir una segunda generación de enzimas que, a su vez, actúan sobre las cadenas hijas; y así sucesivamente. Esto puede seguir a través de una cantidad indefinida de estadios. La única esperanza consiste en que, por último, entre las cadenas que se tengan en un punto determinado, sea posible descubrir dos copias de la cadena original (una de las copias puede ser, en realidad, la cadena original).

El dogma central de la tipogenética

Los procesos tipogenéticos pueden ser representados esquemáticamente a través de un diagrama (figura 90).

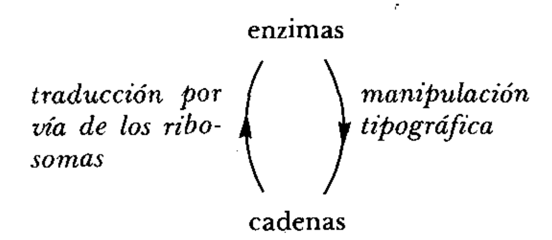
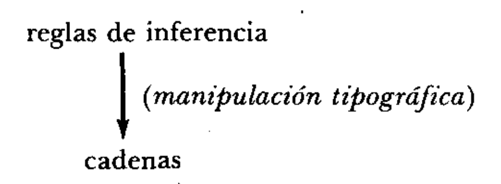


Figura 90. El "Dogma Central de la Tipogenética": un ejemplo de "Jerarquía Enredada".

Este diagrama ilustra el *Dogma Central de la Tipogenética*. Muestra cómo las cadenas definen a las enzimas (a través del Código Tipogenético) y cómo, por su parte, las enzimas actúan sobre las cadenas que les han dado origen, produciendo nuevas cadenas. En consecuencia, la línea de la izquierda refleja la manera en que *la información anterior circula hacia arriba*, en el sentido de que una enzima es la traducción de una cadena, y contiene por ende la misma información que la cadena, sólo que en diferente forma; específicamente, en una forma activa. La línea de la derecha, en cambio, no exhibe información que circule hacia abajo; en lugar de ello, muestra de qué manera *se origina nueva información*: mediante las derivaciones experimentadas por los símbolos de las cadenas.

En Tipogenética, tal como una regla de inferencia en un sistema formal, una enzima deriva ciegamente los símbolos de las cadenas, sin atender para nada a la "significación" que pudiera estar albergada en dichos símbolos. Y así es como aquí se nos presenta una extraña mezcla de niveles: por un lado, las cadenas son operadas, y entonces juegan el papel de *datos* (como lo indica la flecha de la derecha); por otro lado, aquéllas también dictan las acciones que deben efectuarse sobre los datos, y juegan, en consecuencia, el papel de *programas* (como lo indica la flecha de la izquierda). El jugador de Tipogenética es quien, por supuesto, llena la función de intérprete y de procesador. La calle de doble sentido que vincula entre sí los niveles "superior" e "inferior" de la Tipogenética muestra que, en realidad, no se puede pensar que ni las enzimas ni las cadenas están unas a un nivel más alto que las otras. Por el contrario, una representación gráfica del *Dogma Central del sistema MIU* presenta esta apariencia:



En el sistema MIU *hay* una clara distinción de niveles: sencillamente, las reglas de inferencia pertenecen a un nivel más elevado que las cadenas. Lo mismo ocurre con TNT y con todos los sistemas formales.

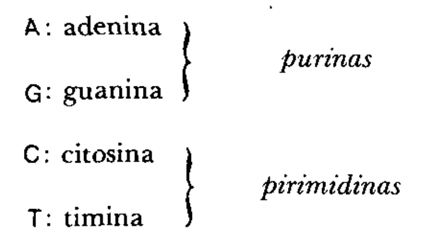
Bucles extraños, TNT y la genética real

Sin embargo, hemos visto que en TNT los niveles *se* mezclan, en otro sentido; en los hechos, la distinción entre lenguaje y metalenguaje se desbarata: los enunciados *acerca* del sistema son reflejados *dentro* del sistema. Resulta que si elaboramos un diagrama que ilustre las relaciones entre TNT y su metalenguaje, surgirá algo notablemente semejante al diagra-

ma representativo del Dogma Central de la Biología Molecular. En verdad, nuestro propósito es completar detalladamente esta comparación; para cumplirlo, empero, necesitamos indicar los sitios donde la Tipogenética y la genética *verdadera* coindicen y los sitios donde difieren. Ciertamente, la genética real es sumamente más compleja que la Tipogenética, pero el "esquema conceptual" que el lector ha incorporado para comprender la Tipogenética le será muy útil para guiarlo en los laberintos de la genética verdadera.

ADN y nucleótidos

Habíamos comenzado hablando de cierta relación entre "strands" y DNA. Estas iniciales, ADN en español, son la abreviatura de "ácido deoxirribonucleico". El ADN de la mayor parte de las células reside en el *núcleo* de éstas, el cual consiste en una pequeña área protegida por una membrana. Gunther Stent ha calificado al núcleo como la "sala del trono" de la célula, con el ADN en función de mandatario. El ADN consiste de extensos encadenamientos de moléculas relativamente simples llamadas nucleótidos; cada nucleótido consta de tres partes: (1) un grupo fosfato despojado de un átomo especial de oxígeno, y de ahí el prefijo "deoxi"; (2) un azúcar llamado "ribosa", y (3) una *base*. Sólo la base distingue a los nucleótidos entre sí, por lo cual basta con especificar su base para identificar un nucleótido. Los cuatro tipos de bases que aparecen en los nucleótidos del ADN son:



(Véase también la figura 91.) Es fácil memorizar las pirimidinas porque la primera vocal de "citosina", "timina" y "pirimidina" es la 'i'. Más adelante, cuando hablemos del ARN, aparecerá otra pirimidina —el "uracilo"— que, desdichadamente, nos estropeará dicha pauta. (Nota: las letras que representan a los nucleótidos en la genética real no estarán impresas en Quadrata, como lo están en Tipogenética.)

Una cadena individual de ADN, entonces, consiste de muchos nucleótidos dispuestos como en un collar de cuentas. El enlace químico que eslabona un nucleótido con sus dos vecinos es sumamente fuerte; tales enlaces son llamados *covalentes*, y el "collar de cuentas" recibe a veces la denominación de *espina dorsal covalente* del ADN.

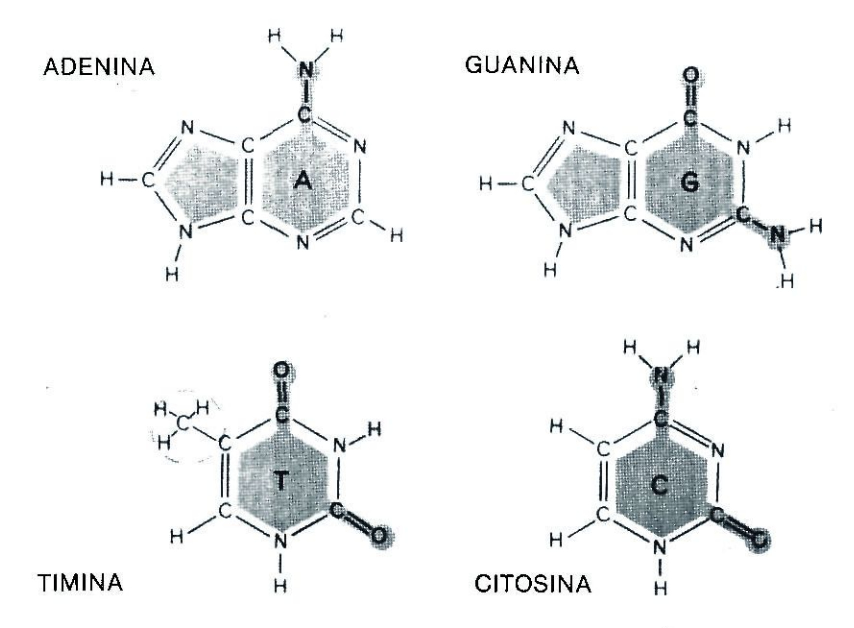
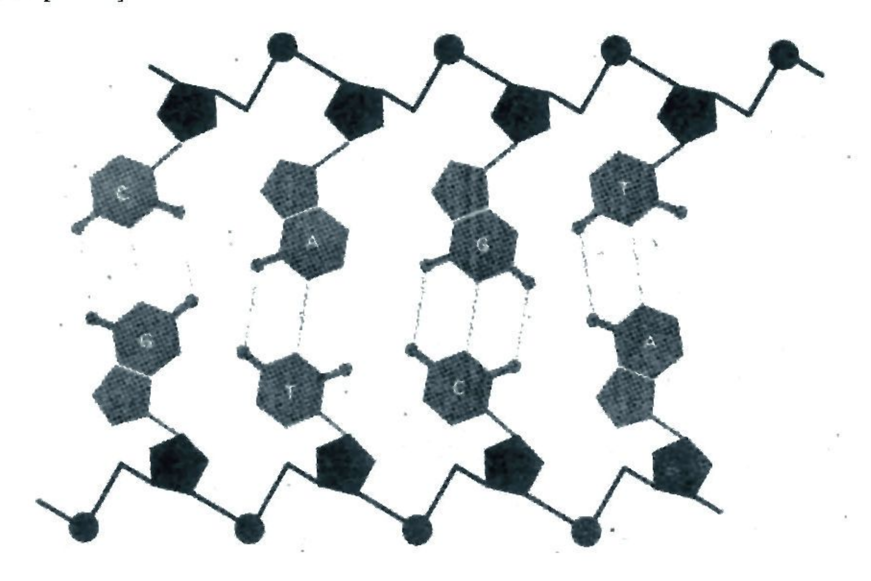


Figura 91. Las cuatro bases constitutivas del ADN: Adenina, Guanina, Timina, Citosina. [Tomado de Hanawalt and Haynes, The Chemical Basis of Life *(San Francisco: W. H. Freeman, 1973), p. 142.]*

Figura 92. La estructura del ADN se asemeja a una escalera, cuyos lados están formados por unidades alternadas de deoxirribosa y fosfato. Los peldaños están constituidos por las bases, apareadas de manera particular, A con T y G con C, reunidos por, respectivamente, dos y tres enlaces de hidrógeno. [Tomado de Hanawalt and Haynes, The Chemical Basis of Life, *p. 142.]*



Ahora bien, el ADN aparece frecuentemente en cadenas dobles: es decir, dos cadenas simples que se aparean, nucñeótido por nucleótido (véase figura 92). Las bases son las responsables de ese tipo peculiar de apareamiento que tiene lugar entre cadenas. Cada una de las bases de una cadena se ubica enfrente de la base complementaria de la otra cadena, y se liga a ella. Los complementos coinciden con los de la Tipogenética: A se aparea con T, y C con G; siempre una purina con una pirimidina.

En comparación con los vigorosos enlaces covalentes distribuidos a lo largo de la espina dorsal, los enlaces *intercatenarios* son notablemente débiles. No se trata de enlaces covalentes, sino de *enlaces de hidrógeno*; un enlace de hidrógeno se origina cuando dos compuestos moleculares son alineados de forma tal que un átomo de hidrógeno, inicialmente perteneciente a uno de aquéllos, "confunde" su origen, ya no sabe a cuál compuesto pertenece, pues fluctúa entre ambos, y vacila en cuanto a cuál de los dos incorporarse. A causa de que las dos mitades de la doble cadena de ADN están unidas solamente por enlaces de hidrógeno, pueden separarse o juntarse de modo relativamente fácil; y este hecho asume una gran importancia en cuanto a las funciones de la célula.

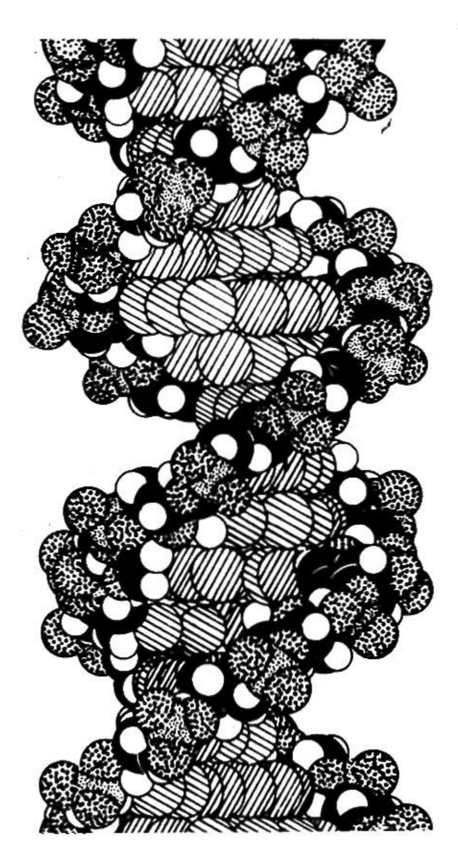


Figura 93. Modelo molecular de la doble hélice del ADN. [Tomado de Vernon M. Ingram, Biosynthesis *(Menlo Park, Calif.: W. A. Benjamin, 1972), p. 13.]*

Cuando el ADN forma dobles cadenas, éstas se entrelazan de manera tal que recuerdan la apariencia ensortijada de las vides (figura 93). Hay exactamente diez pares de nucleótidos por giro; en otras palabras, para cada nucleótido, la "enroscadura" es de 36 grados. El ADN en cadenas simples no exhibe tal forma de tirabuzón, pues ésta es una consecuencia del apareamiento de bases.

ARN mensajero y ribosomas

Como ya dijimos, el ADN, soberano de la célula, habita en su "sala del trono" privada: el núcleo de la célula; así sucede en muchas de estas últimas. Pero la "vida" se mueve principalmente en el exterior del núcleo, específicamente en el *citoplasma*: el "campo" de la "figura" núcleo. Las *enzimas*, en particular, que prácticamente hacen funcionar todo el proceso vital, son elaboradas en el citoplasma por los *ribosomas*, y cumplen la mayoría de sus tareas en el citoplasma. E, igual que en la Tipogenética, el diseño de todas las enzimas está almacenado dentro de las cadenas, es decir, dentro del ADN, el cual permanece protegido en el interior de su pequeño albergue nuclear. Entonces, ¿cómo hace la información relativa a la estructura de las enzimas para pasar del núcleo a los ribosomas?

Aquí es donde aparece el *ARN mensajero*. Más atrás, dijimos jocosamente que las cadenas de ARN mensajero – ARNm – constituían una especie de Servicio de Tránsito Rápido de ADN: pero esto no quiere decir que el ARNm transporte físicamente al ADN a ninguna parte, sino que se encarga de trasladar la información, o mensaje, desde su sitio de almacenamiento en la cámara nuclear del ADN, hasta los ribosomas, en el citoplasma. ¿Cómo se produce esto? En una forma sencilla: una clase especial de enzima copia fielmente, dentro del núcleo y sobre una nueva cadena —una cadena de ARNm— largos tramos de secuencias de bases de ADN. A continuación, este mensajero abandona el núcleo y se interna en el citoplasma, donde hace contacto con gran cantidad de ribosomas, los cuales inician su tarea de creación de enzimas, ajustada a la información traída por el recién llegado.

El proceso por el cual el ADN es copiado, dentro del núcleo, en el ARNm, es llamado *transcripción*; en éste, las cadenas dobles de ADN tienen que ser separadas, transitoriamente, en dos cadenas simples, una de las cuales sirve como molde del ARNm. Al pasar, digamos que "ARN" es la abreviatura de "ácido ribonucleico", el cual guarda una estrecha semejanza con el ADN, salvo que todos sus nucleótidos poseen ese átomo particular de oxígeno, en el grupo fosfato, del que carecen los nucleótidos de ADN; de ahí que, en su caso, se suprima el prefijo "deoxi". Además, el ARN utiliza la base uracilo en lugar de la timina, de manera que la información de las cadenas de ARN puede ser representada por secuencias arbitrarias de las letras 'A', 'C', 'G', 'U'. Ahora bien, cuando es obtenido el

ARNm a partir de la transcripción del ADN, el proceso respectivo funciona a través del apareamiento usual de bases (salvo que U sustituye a T): así, un molde ADN y su ARNm asociado tendrían este aspecto:

DNA: . . . . .CGTAAATCAAGTCA. . . . . . (molde)
ARNm: . . . . .GCAUUUAGUUCAGU. . . . . . ("copia")

Usualmente, el ARN no asume la forma de extensas cadenas dobles, pese a que puede hacerlo; se lo encuentra así, por lo común, en la forma helicoidal que también caracteriza al ADN pero, a diferencia de éste, se presenta en extensas cadenas curvadas un tanto caprichosamente.

Una vez que una cadena de ARNm ha salido del núcleo, se encuentra con esas extrañas criaturas subcelulares llamadas "ribosomas", pero antes de explicar de qué manera es utilizado el ARNm por un ribosoma, quisiera hacer algunos comentarios sobre las enzimas y las proteínas. Las enzimas pertenecen a la categoría general de las biomoléculas llamadas *proteínas*, y la tarea de los ribosomas es elaborar todas las proteínas, no solamente las enzimas. Las proteínas que no son enzimas son un género mucho más pasivo de seres; muchas de ellas, por ejemplo, son moléculas *estructurales*, lo cual significa que actúan como las vigas, soportes y elementos similares en las construcciones: mantienen reunidas las distintas partes de la célula. Hay otras clases de proteínas pero, desde el punto de vista de nuestros propósitos, las proteínas principales son las enzimas, y de aquí en más no estableceré una distinción estricta al respecto.

Aminoácidos

Las proteínas están compuestas por secuencias de aminoácidos, de los cuales tenemos veinte variedades primarias, a cada una de las cuales asignamos una abreviatura de tres letras:

ala ______ alanina
arg ______ arginina
asn ______ asparagina
asp ______ ácido aspártico
cis ______ cisteína
fen ______ fenilanina
gli ______ glicina
gln ______ glutamina
glu ______ ácido glutámico
his ______ histidina
ila ______ isoleucina
leu ______ leucina
lis ______ lisina

met	______	metionina
pro	______	prolina
ser	______	serina
tir	______	tirosina
tre	______	treonina
trf	______	triptófano
val	______	valina

Adviértase la leve discrepancia numérica con la Tipogenética, donde teníamos solamente *quince* "aminoácidos" formadores de enzimas. Un aminoácido es una pequeña molécula de la misma complejidad, aproximadamente, que un nucleótido: de aquí que las secciones constructivas de las proteínas y de los ácidos nucleicos (ADN, ARN) sean, también aproximadamente, del mismo tamaño. Sin embargo, *las proteínas* están integradas por secuencias mucho más breves de componentes; habitualmente, unos trescientos aminoácidos forman una proteína completa, mientras que una cadena de ADN *consiste en* cientos de miles o de millones de nucleótidos.

Ribosomas y grabadoras

Ahora bien, cuando una *cadena* de ARNm, luego de su partida hacia el citoplasma, se topa con un ribosoma, tiene lugar un muy bello e intrincado proceso, llamado *traducción*. Podría decirse que este proceso de traducción está ubicado en el corazón mismo de la vida, y que son muchos los misterios conectados con él. No obstante, su esencia *puede ser* descripta en forma simple: comencemos por forjar una imagen pintoresca y luego trataremos de otorgarle mayor precisión; imaginemos que el ARNm es una larga cinta magnética y que *el ribosoma* es una grabadora. Cuando la cinta va pasando por el dispositivo pertinente de aquélla, es "leído" y convertido en música, o en otros sonidos. Así, las señales magnéticas son "traducidas" a *notas*: análogamente, cuando una "cinta" de ARNm pasa por la "cabeza magnética" de un ribosoma, las "notas" producidas son los *aminoácidos*, y las "composiciones musicales" a las que dan forma son las *proteínas*. En esto reside, en sentido amplio, la traducción, y así se muestra en la figura 96.

El código genético

Así y todo, ¿cómo un ribosoma puede producir una cadena de aminoácidos cuando lo que lee es una cadena de *nucleótidos*? Este misterio fue resuelto a fines de la década de los sesenta, gracias a los empeños de numerosas perso-

nas; en el corazón de la respuesta se encuentra el *Código Genético*: una correspondencia entre tripletes de nucleótidos y aminoácidos (véase figura 94). En sustancia, esto es enteramente similar al Código Tipogenético, salvo que aquí un *codón* está formado por tres bases (o nucleótidos) consecutivas, en tanto que en aquél bastaba con dos. Luego, tiene que haber 4x4x4 (o sea, 64) entradas en la tabla, en lugar de dieciséis. Un ribosoma se va encargando, en una cadena de ARN, de tres nucleótidos por vez, esto es, de un codón por vez, y en cada oportunidad en que esto sucede, agrega un nuevo aminoácido a la proteína que está elaborando en ese momento. Por consiguiente, una proteína surge aminoácido por aminoácido del ribosoma.

CUA GAU
Cu Ag Au

Un segmento habitual de ARNm, leído primero como dos tripletes (arriba), y después como tres dupletes (abajo): un ejemplo de hemiolia en bioquímica.

Estructura ternaria

Sin embargo, cuando una proteína emerge de un ribosoma, no solamente se va haciendo más y más extensa, sino que se va plegando sobre sí misma en una forma extraordinariamente tridimensional, al modo de esos fuegos de artificio llamados "culebras", los cuales se van haciendo más grandes al mismo tiempo que se ensortijan. Esta curiosa forma es llamada la *estructura ternaria* de la proteína (figura 95), mientras que la secuencia de aminoácidos, *per se*, es llamada la *estructura primaria* de la proteína. La estructura ternaria está implícita en la estructura primaria, como en la Tipogenética. No obstante, la fórmula para derivar la estructura ternaria a partir de la primaria es enormemente más compleja que en la Tipogenética. En verdad, uno de los principales problemas de la biología molecular contemporánea consiste en la determinación de reglas que permitan predecir la estructura ternaria de una proteína a partir de su estructura primaria, cuando ésta es conocida.

Explicación reduccionista de las funciones proteínicas

Otra discrepancia entre la Tipogenética y la genética real —que probablemente sea la más grave de todas— es la siguiente: mientras que en la Tipogenética cada aminoácido componente de una enzima es responsable de cierto "tramo de la acción" específico, los aminoácidos individuales, en el orden de las enzimas reales, no pueden sujetarse a una asignación de papeles tan nítida. La estructura ternaria *en su conjunto* es lo que determina el modo en el cual funcionará una enzima; no hay forma de poder decir: "la

	U	C	A	G	
U	fen	ser	tir	cis	U
	fen	ser	tir	cis	C
	leu	ser	*punt.*	*punt.*	A
	leu	ser	*punt.*	trf	G
C	leu	pro	his	arg	U
	leu	pro	his	arg	C
	leu	pro	gln	arg	A
	leu	pro	gln	arg	G
A	ila	tre	asn	ser	U
	ila	tre	asn	ser	C
	ila	tre	lis	arg	A
	met	tre	lis	arg	G
G	val	ala	asp	gli	U
	val	ala	asp	gli	C
	val	ala	glu	gli	A
	val	ala	glu	gli	G

Figura 94. El Código Genético, por el cual cada triplete de una cadena de ARN mensajero codifica uno de veinte aminoácidos (o un signo de puntuación).

presencia de este aminoácido significa que han de verificarse tales y cuales operaciones". En otras palabras, la contribución de un aminoácido individual, en la genética real, a la totalidad de las funciones de la enzima no es "independiente del contexto". Empero, esta circunstancia no puede ser interpretada en el sentido de favorecer el argumento antirreduccionista de que "el todo [la enzima] no puede ser explicado como la suma de sus partes". Esto carecería por entero de fundamento; lo que sí tendría fundamento es el rechazo de la aserción más simple según la cual "cada aminoácido contribuye a la suma de una manera que es independiente con respecto al resto de los aminoácidos presentes". En otros términos, no se puede concebir que la función de una proteína sea construida a partir de las funciones libres de contexto de sus partes; en lugar de ello, es necesario considerar de qué forma interactúan dichas partes. Con todo, en principio es posible formular un programa de computadora que tenga como entrada la estructura primaria de una proteína, y determine primeramente su estructura ternaria, y en segundo lugar la función de la enzima. Esto implicaría una explicación absolutamente reduccionista de las funciones de la enzima, pero la determinación de la "suma" de las partes requeriría un algoritmo altamente complejo. La dilucidación de la *función* de una enzima, dada su *estructura* primaria, o inclusive la ternaria, es otro de los grandes problemas de la biología molecular contemporánea.

En último análisis, quizá, se pueda considerar que la función de la enzima en su conjunto es construida por las funciones de las partes de una manera independiente de contexto, pero donde dichas partes son concebidas ahora como partículas individuales, al modo de los electrones y los protones, y no como "bloques", al modo de los aminoácidos. Esto es ejemplificado por el "Dilema Reduccionista": para explicar cualquier cosa en términos de sumas libres de contexto, es necesario descender hasta el nivel físico, pero, en tal caso, el número de partículas es tan desmesurado que aquello se convierte en nada más que un postulado teórico del género "en principio". Luego, uno se ve obligado a establecer una suma dependiente del contexto, lo cual presenta dos desventajas; la primera es que las partes son así unidades mucho mayores, cuyo comportamiento sólo puede describirse en un nivel alto, y en consecuencia de una manera indeterminada; la segunda es que la palabra "suma" conlleva la connotación de que puede serle asignada una función simple a cada parte, y que entonces la función del todo es simplemente la suma, independiente de contexto, de esas funciones individuales. Esto, precisamente, no puede hacerse cuando se trata de explicar todas las funciones de una enzima, dados sus aminoácidos como partes. Sin embargo, para bien o para mal, se trata de un fenómeno generalizado que se plantea en la explicación de sistemas complejos. Para adquirir una comprensión intuitiva y eficaz de cómo interactúan las partes —abreviando: para poder seguir adelante— es forzoso, a menudo, renunciar a la exactitud que brinda una imagen microscópica e independiente de contexto, sencillamente a causa de que no se la

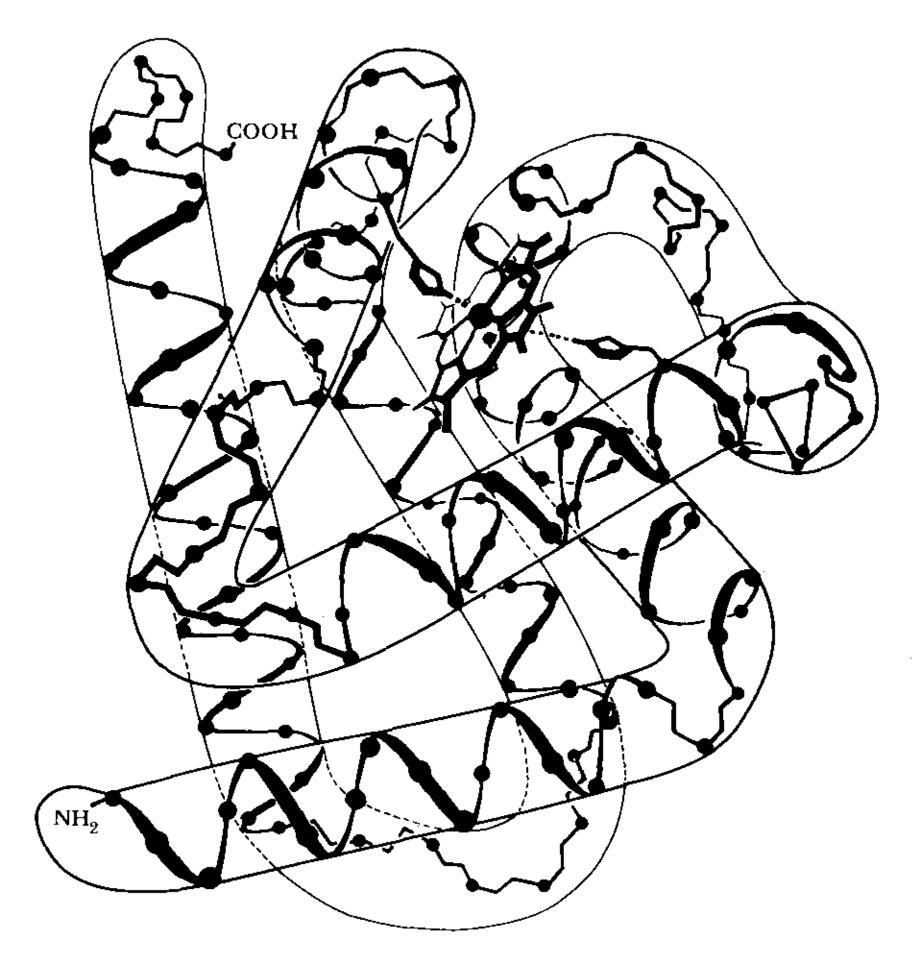


Figura 95. La estructura de la mioglobina, deducida de datos radiográficos de alta definición. La forma de "caño retorcido", visible a escala mayor, es la estructura ternaria; la más menuda hélice interior — la "hélice alfa"— es la estructura secundaria. [Tomado de A. Lehninger, Biochemistry.]

puede manejar. Pero no se renuncia, en ese momento, a la convicción de que tal explicación, en principio, existe.

ARN de transferencia y ribosomas

Volvamos, pues, a los ribosomas y al ARN y a las proteínas: dijimos que una proteína es elaborada por un ribosoma, el cual se ajusta al diseño transportado desde la "cámara real" del ADN por su mensajero, el ARN. Esto parece indicar que el ribosoma es capaz de traducir el lenguaje de los

codones al de los aminoácidos, lo cual equivaldría a decir que el ribosoma "conoce" el Código Genético. Sin embargo, esa cantidad de información, lisa y llanamente, no está presente en un ribosoma. Entonces, ¿cómo se explica esto?, ¿dónde *está* almacenado el Código Genético? Lo llamativo es que el Código Genético está almacenado —¿dónde si no?— en el propio ADN: esto requiere algún comentario.

Conformémonos, por el momento, con una explicación parcial, en lugar de intentar un desarrollo total de este problema. Hay, flotando por todo el citoplasma, gran número de moléculas con forma de trébol de cuatro hojas; flojamente sujeto (es decir, mediante el enlace de hidrógeno) a una hoja tenemos un aminoácido, y sobre la hoja opuesta hay un triplete de nucleótidos llamado un *anticodón*. Para nuestros propósitos, las otras dos hojas no son pertinentes. Esta es la forma en que tales "tréboles" son utilizados por los ribosomas en su tarea de producción de proteínas. Cuando un nuevo codón se ubica al alcance de la "cabeza magnética" del ribosoma, éste ingresa al citoplasma y toma posesión de un trébol cuyo anticodón sea complementario del codón ARN mensajero. Después, impone al trébol una posición que le permita hacerle soltar sus aminoácidos, y fijarlos covalentemente en la proteína en crecimiento. (Dicho al pasar, el enlace entre un aminoácido y su vecino, en una proteína, es un enlace covalente muy firme, denominado "enlace peptídico". Por este motivo, las enzimas son llamadas en ocasiones "polipéptidos".) Por supuesto, no es casual que los "tréboles" transporten los aminoácidos adecuados, pues han sido elaborados según instrucciones precisas, emanadas de la "sala del trono".

El nombre verdadero del mencionado trébol es *ARN de transferencia*. Una molécula de ARNt es sumamente pequeña —aproximadamente del tamaño de una proteína minúscula— y consiste en una cadena de más o menos ochenta nucleótidos. Igual que en el caso del ARNm, las moléculas de ARNt se producen por *transcripción* del gran molde celular, el ADN. No obstante, las moléculas del ARNt son minúsculas, en comparación con las gigantescas del ARNm, las cuales pueden contener miles de nucleótidos dispuestos en cadenas de grandísima extensión. Además, las moléculas del ARNt se parecen a las proteínas (y difieren de las cadenas de ARNm) en este particular: tienen estructuras ternarias fijas y bien definidas, determinadas por su estructura primaria. La estructura ternaria de una molécula de ARNt permite precisamente que un aminoácido se establezca en la ubicación correspondiente; seguramente, se trata de algo que es dictado, con arreglo al Código Genético, por el anticodón del brazo contrario. Una imagen vívida de la función de las moléculas del ARNt es la de una nube de palabras impresas en tarjetas, flotando en torno de un intérprete simultáneo, quien, cuando necesita traducir una palabra, lanza su mano al aire y atrapa una de aquéllas, ¡la correcta, en todos los casos! En nuestra perspectiva, el intérprete es el ribosoma, las palabras son los codones y su traducción son los aminoácidos.

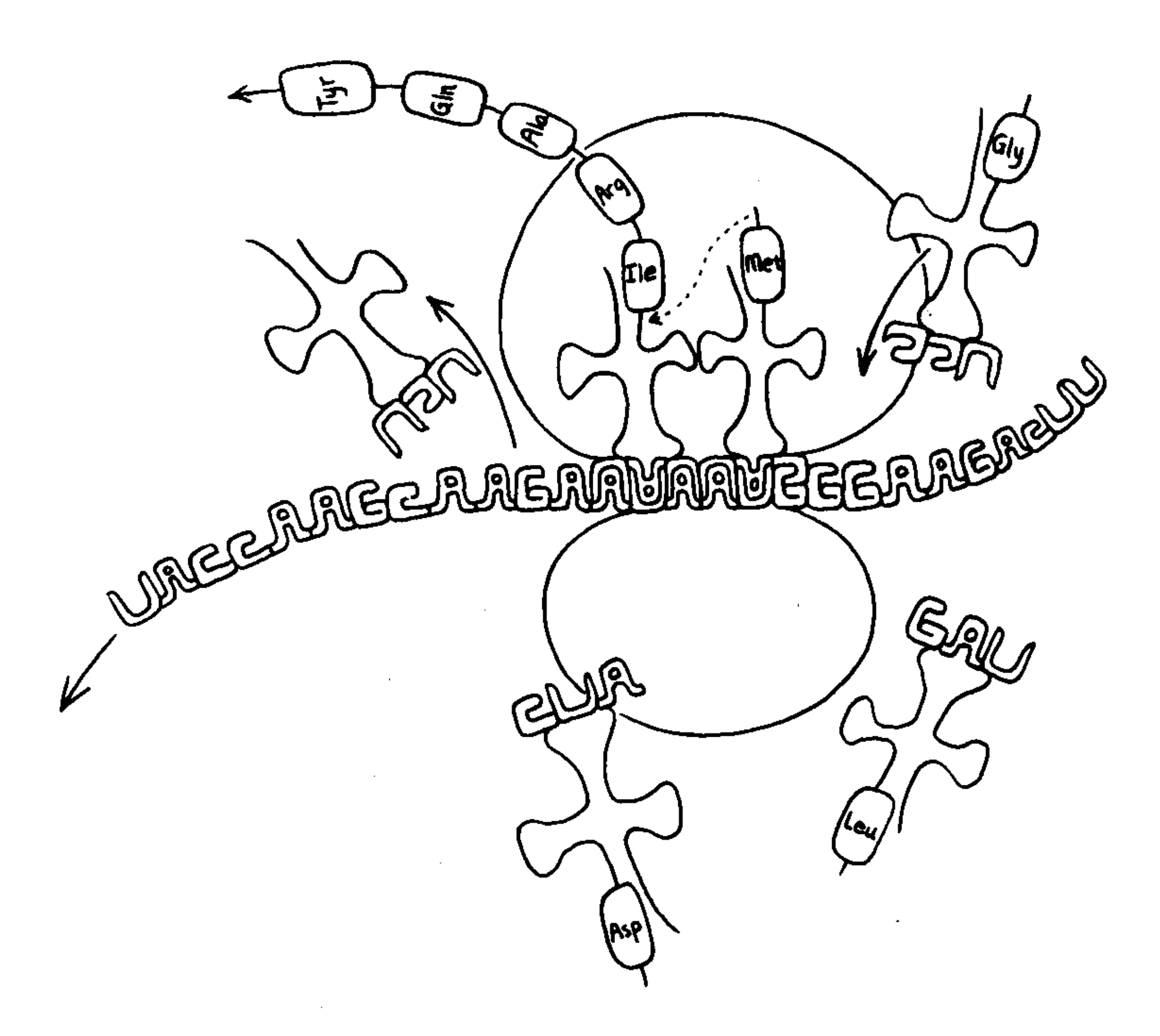


Figura 96. Una sección de ARNm penetrando en un ribosoma. Flotando en las proximidades hay moléculas de ARNt, llevando aminoácidos desprendidos por el ribosoma, que van a agregarse a la proteína en elaboración. El Código Genético está contenido, colectivamente, en las moléculas del ARNm. Adviértase que los apareamientos de bases (A-U, C-G) están representados en el diagrama por letras que entrelazan su trazo. [Dibujo de Scott E. Kim.]

Para que el mensaje interior del ADN pueda ser decodificado por los ribosomas, las tarjetas de ARNt tienen que estar diseminadas por todo el citoplasma. En cierto sentido, las moléculas del ARNt contienen la esencia del mensaje *exterior* del ADN, puesto que son las claves del proceso de traducción. Pero, a su vez, también provienen del ADN. De esta manera, el mensaje exterior está tratando de ser parte del mensaje interior, de una forma que nos hace recordar aquel mensaje dentro de una botella, que

indicaba en qué idioma estaba escrito. Naturalmente, ningún ensayo de esta clase puede ser totalmente exitoso: no hay forma de que el ADN se ice a sí mismo mediante el uso de sus propios "ganchos". Cierta cuota de conocimiento del Código Genético debe estar ya presente por anticipado en la célula, para permitir la elaboración de esas enzimas cuyas moléculas son obtenidas por transcripción de la copia patrón del ADN. Y este conocimiento reside en las moléculas anteriormente elaboradas de ARNt. El esfuerzo de obviar la necesidad de toda clase de mensaje exterior es semejante al del dragón de Escher, el cual procura lo más empeñosamente que puede, dentro del contexto bidimensional del mundo al que está confinado, pasar a ser tridimensional. Sus ensayos son muy meritorios, pero está descontado que jamás lo conseguirá, por más aproximadas que sean sus imitaciones de la tridimensionalidad.

La puntuación y el marco de lectura

¿Cómo sabe un ribosoma que una proteína ya está elaborada? Lo mismo que en Tipogenética, hay una señal que indica el momento de iniciación o de terminación de una proteína. Concretamente, hay tres codones específicos —UAA, UAG, UGA— que actúan como *signos de puntuación* y no como codificadores de aminoácidos. Toda vez que uno de esos tripletes encaja en la "cabeza de lectura" de un ribosoma, éste libera la proteína que estaba construyendo y comienza con otra.

Recientemente, el genomio completo del virus más pequeño que se conozca, ϕX174, ha sido puesto al descubierto. En route, surgió una revelación del todo inesperada: algunos de sus nueve genes se superponen, esto es, ¡*dos proteínas distintas son codificadas por el mismo tramo de ADN*! ¡Hasta hay un gene enteramente contenido en el interior de otro! Esto se pudo establecer mediante el *desplazamiento*, con un alcance de exactamente una unidad, de los marcos relativos de lectura de uno y otro gene. La densidad de información acumulada en un esquema semejante es increíble. Se trata, por cierto, de la lección subyacente al curioso "8/17 avos de haiku" del bizcocho de la suerte de Aquiles, en el *Canon por Aumentación Interválica*.

Recapitulación

Resumiendo, surge este cuadro: desde su trono central, el ADN envía largas cadenas de ARN mensajero a los ribosomas del citoplasma; éstos, utilizando las "tarjetas" del ARNt que revolotean en torno suyo, construyen proteínas con plena eficacia, aminoácido por aminoácido, con arreglo al diseño contenido en el ARNm. Unicamente la estructura primaria de las proteínas es dictada por el ADN, pero es suficiente con ello pues, cuando emergen de los ribosomas, las proteínas se pliegan "mágicamente", asu-

miendo complejas conformaciones que tienen la capacidad de actuar como poderosas máquinas químicas.

Niveles de estructura y de significación en las proteínas y en la música

Hemos venido valiéndonos de una analogía donde los ribosomas son vistos como un magnetófono, el ARNm como una cinta grabada y las proteínas como la música generada. Puede parecer una ocurrencia arbitraria, pero hay algunos paralelos muy atrayentes. La música no es una mera secuencia lineal de notas; nuestra mente percibe la música en un nivel mucho más elevado que ése. A las notas las articulamos en frases, a las frases en melodías, a las melodías en movimientos y a los movimientos en composiciones. De manera similar, las proteínas adquieren sentido sólo cuando actúan como bloques unitarios. Aun cuando una estructura primaria transporta toda la información requerida para la creación de la estructura ternaria, no se la "siente" así porque su potencial se actualiza exclusivamente cuando la estructura ternaria ha sido efectiva y físicamente creada.

Conviene decir que hemos estado refiriéndonos sólo a las estructuras primaria y ternaria, de manera que alguien podría preguntarse qué se hizo de la secundaria. Por cierto, existe, lo mismo que una estructura cuaternaria. El plegamiento de una proteína tiene lugar en más de un nivel; específicamente, en ciertos puntos a lo largo de la cadena de aminoácidos, puede presentarse una tendencia a formar un tipo de hélice, llamada la *hélice alfa* (que no debe ser confundida con la doble hélice del ADN). Este giro helicoidal de una proteína se registra en un nivel más bajo que el de su estructura ternaria; tal nivel de estructura es visible en la figura 95. La estructura cuaternaria puede ser comparada directamente con una obra musical compuesta de movimientos independientes, a causa de que aquélla involucra el montaje de diversos polipéptidos, ya en pleno gozo de su florecimiento ternario, en una estructura mayor. Estas cadenas independientes, por lo general, están unidas por enlaces de hidrógeno y no por enlaces covalentes: lo mismo ocurre con el tipo de obra musical mencionado, donde el enlace entre movimientos es mucho menos vigoroso que el imperante en el interior de éstos, lo cual no impide, sin embargo, que el todo sea vigorosamente "orgánico".

Los cuatro niveles de estructura: primario, secundario, ternario y cuaternario, también pueden ser comparados con los cuatro niveles de la ilustración MU (figura 60), del *Preludio y Fuga Hormiguesca*. La estructura global —consistente en las letras 'M' y 'U'— es la estructura *cuaternaria* de la ilustración; además, cada una de esas dos partes tiene una estructura *ternaria*, consistente en "HOLISMO" y "REDUCCIONISMO"; la palabra en oposición, por su parte, constituye el nivel *secundario*, y, en la base, tenemos la estructura *primaria*: otra vez la palabra "MU", repetida incontables veces.

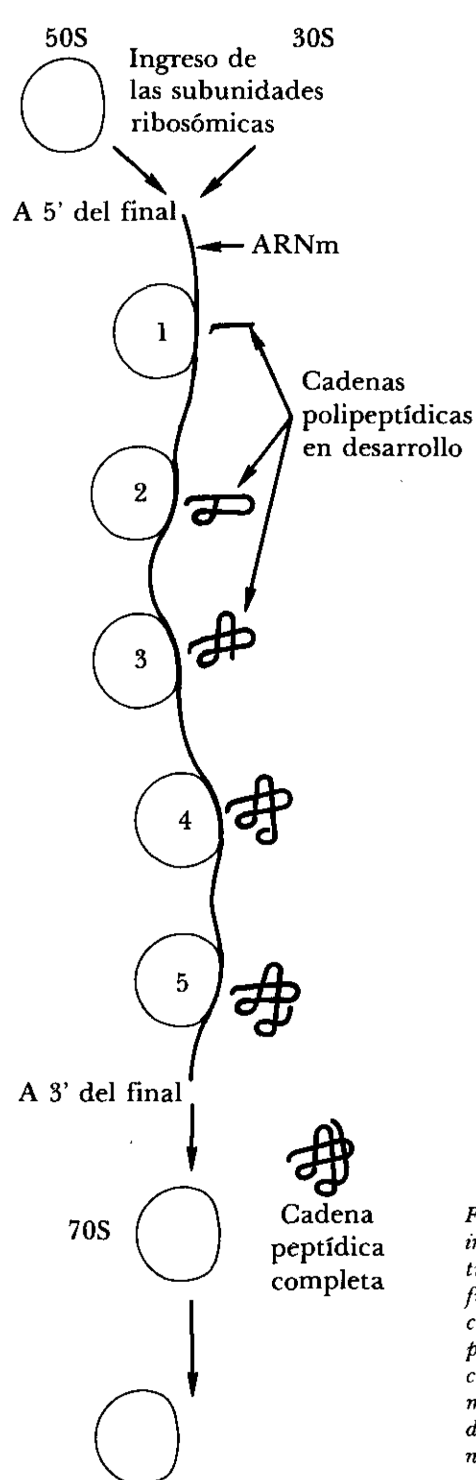


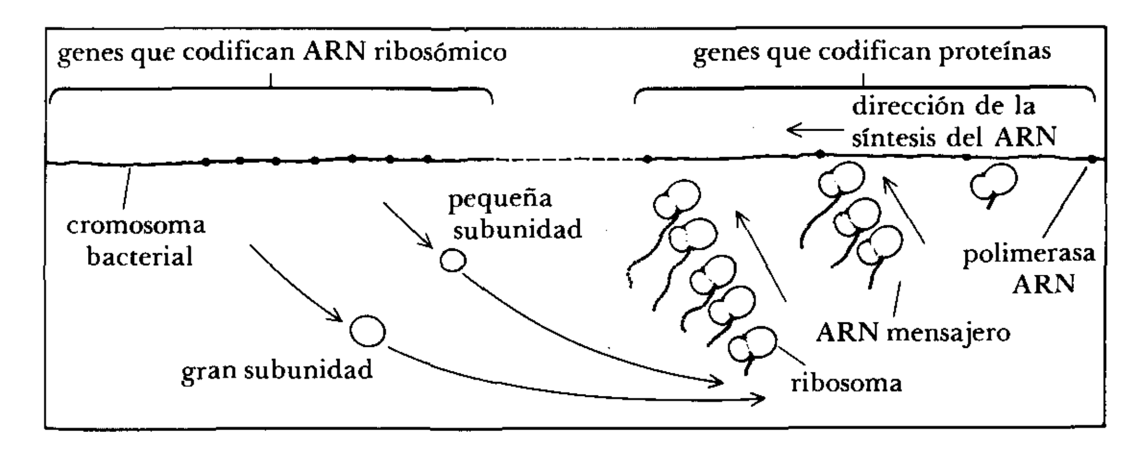
Figura 97. Un polirribosoma. Una cadena individual de ARNm atraviesa un ribosoma tras otro, como una cinta magnetofónica que fuera pasada por varios magnetófonos colocados en fila. El resultado es un conjunto de proteínas en desarrollo, en diversos grados de completamiento: la analogía con un canon musical es producida por el escalonamiento de los magnetófonos. [Tomado de A. Lehninger, Bioquímica.]

Polirribosomas y cánones de dos pisos

Vamos a pasar ahora otro encantador paralelo entre las grabadoras que traducen cintas a música y los ribosomas que traducen el ARNm a proteínas. Imaginemos una gran cantidad de grabadoras, dispuestas en fila y espaciadas uniformemente. Podemos llamar "poligrabadora" a este dispositivo. Supongamos ahora una cinta que pase consecutivamente por las cabezas magnéticas de todas las grabadoras de la colección. Si la cinta contiene únicamente una extensa melodía, el resultado será un canon a muchas voces, por supuesto con la demora determinada por el tiempo que le tome a la cinta pasar de una grabadora a la siguiente. Ciertamente, en las células existen tales "cánones moleculares" allí donde numerosos ribosomas, espaciados a lo largo de líneas extensas —formando lo que se llama un *polirribosoma*—, "tocan", todos ellos, la misma cadena de ARNm, produciendo como resultado proteínas idénticas, escalonadas en el tiempo (véase figura 97).

No sólo ello, sino que la naturaleza va aun más adelante. Recordemos que el ARNm proviene de la transcripción del ADN; las enzimas que son responsables de este proceso son llamadas *polimerasas ARN* ("-asa" es un sufijo genérico aplicado a las enzimas). Sucede a menudo que una serie de polimerasas ARN esté actuando *en paralelo* sobre una cadena individual de ADN, con el resultado de que se produzcan muchas cadenas separadas (pero idénticas) de ARN, distanciadas en el tiempo según el lapso que le lleve al ADN desplazarse desde una polimerasa ARN a la siguiente. Al mismo tiempo, puede haber varios ribosomas diferentes actuando sobre cada uno de los ARNm paralelos que surgen. Así es como se llega a un "canon molecular" de dos pisos, o en doble hilera (figura 98). La imagen correspondiente, en el ámbito de la música, es una situación fantástica pero graciosa: simultáneamente, diversos copistas trabajan sobre el mismo

Figura 98. He aquí un esquema todavía más complejo. No sólo una *sino* varias *cadenas de ARNm, todas surgidas por transcripción de una cadena individual de ADN, reciben la acción de los polirribosomas. El resultado es un canon molecular de dos pisos.* [*Tomado de Hanawalt and Haynes,* The Chemical Basis of Life, *p. 271.*]



manuscrito original, el cual está en una clave que no puede ser descifrada por flautistas; la copia debe pasarlo a una clave que lo haga legible a éstos. A medida que cada uno de los copistas completa una página del original, se la entrega al copista siguiente, y comienza a transcribir otra página. Cada copista repite el mismo trabajo. Entretanto, un conjunto de flautistas va leyendo y ejecutando la melodía de cada una de las partituras que van saliendo de manos de los copistas: cada flautista, a la vez, lleva una demora en su ejecución con respecto a sus colegas que están leyendo la misma hoja.

Esta imagen un poco extravagante brinda, quizá, cierta idea acerca de la complejidad de los procesos que se cumplen en todas y cada una de las células de nuestro cuerpo durante todos los instantes de todos los días . . .

¿Cuál apareció antes: el ribosoma o la proteína?

Hemos estado hablando de estos maravillosos organismos llamados ribosomas; ahora bien, ¿de qué están compuestos?, ¿cómo están hechos? Los ribosomas están formados por dos tipos de cosas: (1) diversas clases de proteínas, y (2) otra clase de ARN, llamado *ARN ribosómico* (ARNr). Así, para que se produzca un ribosoma deben estar presentes determinadas clases de proteínas, y también debe estar presente el ARNr. Naturalmente, para que estén presentes las proteínas, tienen que estar allí los ribosomas que las elaboren. ¿Cómo nos evadimos de este círculo vicioso? ¿Cuál aparece primero: el ribosoma o la proteína? ¿Cuál elabora a cuál? Por supuesto, no hay respuesta a estos interrogantes porque uno siempre efectúa un rastreo que lo lleva a los miembros anteriores de la misma clase —como en el caso del dilema relativo a la precedencia del huevo o de la gallina— y, por último, todo se desvanece en el horizonte del tiempo. De todas maneras, los ribosomas están hechos de dos componentes, uno grande y otro pequeño, cada uno de los cuales contiene algo de ARNr y ciertas proteínas. El tamaño de los ribosomas es, aproximadamente, el mismo que el de las proteínas grandes, y son mucho más pequeños que las cadenas de ARNm de las cuales se sirven como entrada, y a lo largo de las cuales transitan.

Función de las proteínas

Algo hemos dicho de la estructura de las proteínas —de las enzimas, específicamente— pero en realidad no hemos hecho alusión a las tareas que realizan en la célula, ni al modo en que lo hacen. Todas las enzimas son *catalizadoras*, lo cual significa que, en cierto sentido, lo que hacen no va más allá de *acelerar selectivamente* distintos procesos químicos de la

célula, en lugar de provocar la ocurrencia de hechos que sin su intervención no habrían tenido lugar. Una enzima actualiza determinados recorridos de entre una cantidad de miríadas de miríadas de potencialidades; por consiguiente, para establecer qué enzimas se harán presentes, es necesario establecer qué ocurrirá y qué no ocurrirá, pese a la circunstancia de que, teóricamente hablando, no es nula la probabilidad de que un proceso celular suceda espontáneamente, sin la ayuda de catalizadores.

¿Y cómo actúan las enzimas sobre las moléculas de la célula? Como ya se ha dicho, las enzimas son cadenas polipeptídicas plegadas; en todas ellas hay una ranura o cavidad, u otro rasgo superficial claramente definido, que es por donde la enzima se vincula con ciertos otros géneros de moléculas. Este punto es calificado como *activo*, y las moléculas con las que se combina por intermediación del mismo son llamadas *sustratos*; las enzimas pueden tener más de un sitio activo, y más de un sustrato. Igual que en Tipogenética, las enzimas son, por cierto, muy selectivas con respecto a su futuro campo de operaciones. El sitio activo, por lo general, es enteramente específico, y permite la combinación sólo con un determinado género de moléculas, pese a la existencia de algunos "señuelos": otros tipos de moléculas, que pueden amoldarse al sitio activo y obturarlo, engañando a la enzima y volviéndola inactiva.

Una vez reunidos una enzima y su sustrato, hay cierto desequilibrio en cuanto a la carga eléctrica y ésta, a continuación, bajo la forma de electrones y protones, fluye en torno a las moléculas enlazadas y las reajusta. En el momento en que es alcanzado el equilibrio, pueden haber ocurrido ya algunos profundos cambios químicos en el sustrato; ejemplos de ello son los siguientes: puede haber tenido lugar una "soldadura", a través de la cual una pequeña molécula estándar quedó unida a un nucleótido, a un aminoácido, o a otra molécula celular común; una cadena de ADN puede haber recibido un "tajo" en alguna parte de su extensión; puede haber sido cercenada una sección de una molécula; y así siguiendo. En realidad, las bioenzimas operan sobre las moléculas de una manera completamente similar al modo en que operan tipográficamente las tipoenzimas. Sin embargo, la mayor parte de las enzimas efectúan esencialmente una sola tarea, y no una secuencia de tareas. Otra diferencia saliente entre las tipoenzimas y las bioenzimas es ésta: mientras que las tipoenzimas operan únicamente sobre cadenas, las bioenzimas pueden hacerlo sobre el ADN, el ARN, otras proteínas, los ribosomas, sobre membranas celulares y, en fin, sobre lo que fuere que pertenezca a la célula. En otras palabras, las enzimas son los mecanismos universales para lograr que se hagan cosas en la célula. Hay enzimas que reúnen elementos y los fragmentan y los modifican y los activan y los desactivan y los copian y los restauran y los destruyen . . .

Algunos de los procesos celulares más complejos implican "cascadas", donde una molécula individual de cierto tipo desencadena la producción de una determinada clase de enzima; comienza el proceso de fabricación,

y las enzimas que salen de la "línea de montaje" abren un nuevo recorrido químico que hace posible la producción de una segunda clase de enzima. Este género de fenómeno puede ampliarse a tres o a cuatro niveles, donde cada clase de enzima recién producida desencadena la producción de otra clase. Por último, surge una "lluvia" de copias de la última clase de enzima elaborada, y todas ellas se apartan y realizan su tarea específica, la cual puede consistir en cortar algún ADN "extraño", o en colaborar con algún aminoácido del cual esté muy "sedienta" la célula, o lo que sea.

Necesidad de un sistema básico lo suficientemente sólido

Describiremos la solución que cabe al enigma planteado por la Tipogenética: "¿Qué clase de cadena de ADN puede dirigir su propia replicación?" Ciertamente, no toda cadena de ADN es, intrínsecamente, una autorrep. La cuestión clave es ésta: toda cadena que quiera dirigir su propia copia debe contener instrucciones para el montaje de, precisamente, las enzimas que pueden desempeñar la tarea. Ahora bien, es inútil esperar que una cadena aislada de ADN pueda ser una autorrep porque, para que esas proteínas potenciales puedan ser extraídas del ADN, tiene que haber no solamente ribosomas, sino también polimerasas ARN, las cuales hacen que el ARNm sea transportado hasta los ribosomas. Y entonces comenzamos a dar por supuesta una clase de "sistema mínimamente básico" que sea, precisamente, lo bastante sólido como para permitir que se verifiquen la transcripción y la traducción. Este sistema mínimamente básico consistirá, de este modo, en (1) determinadas proteínas, tales como polimerasas ARN, que hagan posible la elaboración de ARNm a partir del ADN, y (2) determinados ribosomas.

Cómo se autorreplica el ADN

No es de ninguna manera casual que las expresiones "sistema básico suficientemente sólido" y "sistema formal suficientemente poderoso" suenen parecidas. Uno es el requisito necesario para que surja una autorrep, el otro para que lo haga una autorref. En realidad, esencialmente se trata de un mismo fenómeno bajo dos apariencias diferentes, a las que diseñaremos de modo explícito dentro de un momento. Pero antes, completemos la descripción de cómo una cadena de ADN puede constituir una autorrep.

El ADN debe contener la codificación para que un conjunto de proteínas lo copie. Pero hay una manera muy eficaz y precisa de copiar un tramo en doble cadena de ADN, cuyas dos cadenas sean complementarias; abarca dos pasos:

(1) desentrelazar ambas cadenas;
(2) "aparear" una nueva cadena a cada una de las dos anteriores.

Este proceso creará dos nuevas cadenas dobles de ADN, cada una de ellas idéntica a una de las dos originales. Ahora bien, si nuestra solución tiene que basarse en esta idea, debe incluir un conjunto de proteínas, codificadas en el ADN, las que se encargarán de cumplir los dos pasos mencionados.

Se cree que, en la célula, estos pasos son realizados conjuntamente, de una forma coordinada, y que requieren la intervención de tres enzimas principales: la endonucleasa ADN, la polimerasa ADN y la ligasa ADN. La primera es una enzima "desengrapadora": despega las dos cadenas originales y las deja a escasa distancia una de otra; luego, se detiene, y es cuando las dos enzimas restantes entran en escena. La polimerasa ADN es, básicamente, una enzima copia y mueve: traquetea las cortas cadenas simples de ADN y, complementariamente, las copia de una forma que recuerda el Procedimiento Copiador de la Tipogenética. Para efectuar la copia, extrae la materia prima —nucleótidos, específicamente— que está flotando en todo el citoplasma. Como la acción avanza por medio de arranques súbitos, un poco de desabrochamiento y un poco de copiado por vez, se producen algunas pequeñas brechas, que la ligasa ADN se encarga de taponar. El proceso es repetido una y otra vez. Esta máquina trienzimática de precisión sigue cuidadosamente adelante, a lo largo de la extensión íntegra de la molécula de ADN, hasta que el despegamiento y, simultáneamente, la replicación, son acabados, de modo que allí tendremos entonces dos copias de aquélla.

Comparación del método de autorrep del ADN con el quinereamiento

Adviértase que en la acción enzimática sobre las cadenas de ADN, el hecho de que la información esté almacenada en el ADN es casi del todo irrelevante; las enzimas, sencillamente, desempeñan sus funciones derivadoras de símbolos, tales como las reglas de inferencia en el sistema MIU. No es de interés alguno, para las tres enzimas, la circunstancia de que en determinado momento estén copiando exactamente los mismos genes que las codifican a ellas; el ADN, para éstas, es nada más que un molde sin significación ni interés.

Es sumamente atractivo comparar esto con el método que siguen las oraciones de Quine para describir cómo ha de construirse una copia de ellas mismas. Allí también se tiene una suerte de "doble cadena": dos copias de la misma información, una que funciona como instructivo, y la otra como molde. Con respecto al ADN, el proceso es vagamente análogo, puesto que las tres enzimas (endonucleasa ADN, polimerasa ADN, ligasa ADN) están codificadas sólo en una de las dos cadenas, la cual, por consi-

guiente, actúa como *programa*, mientras que la otra cadena es meramente un *molde*. El paralelo no es perfecto, pues cuando se está elaborando la copia, las dos cadenas actúan como molde, y no exclusivamente una de ellas. Sin embargo, la analogía es sobremanera sugestiva.

Hay una analogía bioquímica de la dicotomía uso-mención: cuando el ADN es manejado como una simple secuencia de entidades químicas que deben ser copiadas, ello se asemeja a la *mención* de símbolos tipográficos; cuando el ADN dicta las operaciones que han de ser cumplidas, la semejanza es con el *uso* de los símbolos tipográficos.

Niveles de significación del ADN

Varios son los niveles de significación que pueden ser leídos en una cadena de ADN, según la dimensión de los bloques sobre los cuales fijamos nuestra observación, y el poder de que esté dotado el operador que se utilice. En el nivel más bajo, cada cadena de ADN codifica una cadena ARN equivalente: el proceso de decodificación se llama aquí *transcripción*. Si uno articula al ADN en tripletes, y luego utiliza un "decodificador genético", puede leer al ADN como una secuencia de aminoácidos. Aquí tenemos *traducción* (por encima de la transcripción). En el siguiente nivel natural de la jerarquía, el ADN puede ser leído como código de un conjunto de proteínas. La extracción física de proteínas desde los genes es conocida como la *expresividad del gene*; por lo común, éste es el nivel más alto de nuestra comprensión de lo que quiere decir el ADN.

No obstante, con seguridad tiene que haber niveles de significación del ADN más altos aun, difíciles de discernir. Por ejemplo, es totalmente fundado pensar que el ADN de, digamos, un ser humano, codifica rasgos tales como la forma de la nariz, el talento musical, la rapidez de los reflejos, etc. ¿Nos sería posible, en principio, aprender a leer tales piezas de información, directamente, en una cadena de ADN, sin necesidad de pasar por el proceso físico de la *epigénesis*, es decir, la extracción física del fenotipo desde el genotipo? Presumiblemente, sí, puesto que —en teoría— se podría contar con un programa de computadora increíblemente poderoso que simule la totalidad del proceso, incluyendo cada célula, cada proteína, cada uno de los minúsculos rasgos abarcados por la replicación del ADN y de las células, exhaustivamente, hasta el último detalle. La salida de tal programa *seudoepigenético* sería una descripción de alto nivel del fenotipo.

Existe otra (extremadamente débil) posibilidad: la de que pudiéramos aprender a leer el fenotipo en el genotipo, *sin* necesidad de simular isomórficamente el proceso físico de la epigénesis, sino por la aplicación de algún género más simple de mecanismo decodificador. Esto podría ser llamado "atajo seudoepigenético". Con atajos o sin ellos, lo cierto es que la seudoepigénesis está completamente fuera de alcance en la actualidad,

con una notable excepción: en la especie *Felis catus*, está comprobado a través de profundas indagaciones que es posible, por cierto, leer el fenotipo directamente en el genotipo. El lector apreciará con mayor claridad, tal vez, este singular fenómeno, luego de examinar directamente la sección típica de ADN de *Felis catus* que se incluye a continuación:

. . .CATCATCATCATCATCATCATCATCATCAT. . .*

Más abajo aparece un resumen de los niveles de lectura del ADN, junto con los nombres de los diferentes niveles de decodificación. El ADN puede ser leído como una secuencia de:

(1) bases (nucleótidos) . . . . *transcripción*
(2) aminoácidos . . . . *traducción*

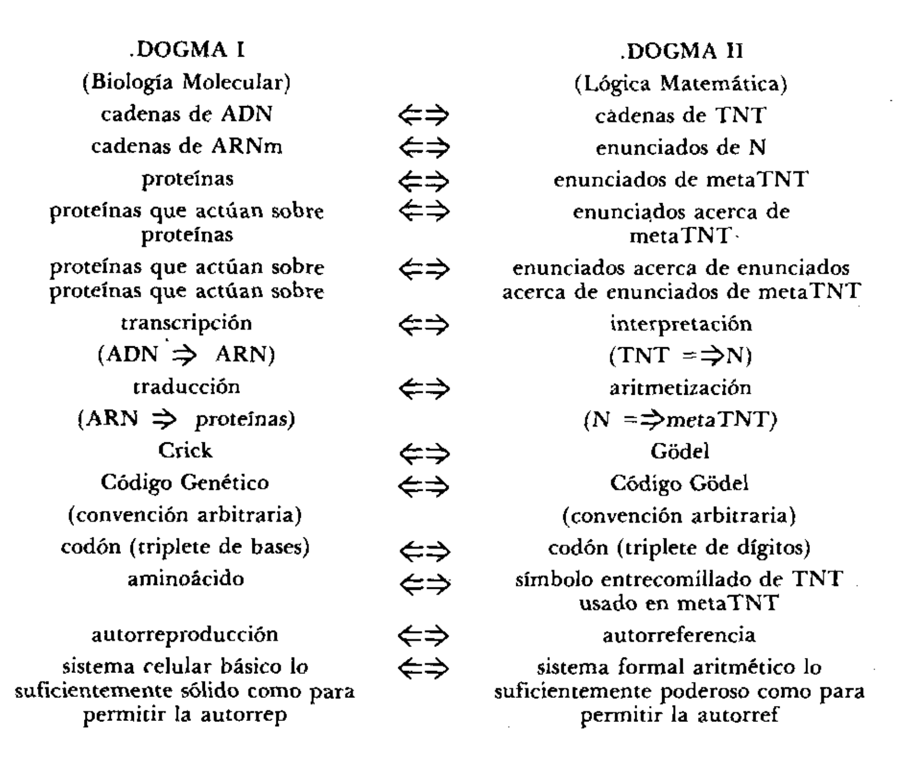
(3) proteínas (estructura primaria) }
(4) proteínas (estructura ternaria) } . . . . *expresividad del gene*
(5) enjambres de proteínas . . *niveles más altos de expresividad del gene*
(6) ???
. .
. . } . . . . *niveles desconocidos de significación del ADN*
. .
$(N-1)$???
(N) rasgos físicos, mentales y psicológicos . . . . *seudoepigénesis*

El Correspondogma Central

Completados estos antecedentes, estamos en condiciones ya de esbozar una elaborada comparación entre el "Dogma Central de la Biología Molecular", sobre el cual están basados todos los procesos celulares, y que fuera formulado por F. Crick (.DOGMA I), y aquel al cual he denominado, con licencia poética, el "Dogma Central de la Lógica Matemática" (.DOGMA II), sobre el cual está basado el Teorema de Gödel. Las correspondencias entre ambos son exhibidas en la figura 99 y en el diagrama que las sigue: la reunión de ambos constituye el *Correspondogma Central*.

Adviértase el apareamiento de bases de A y T (Aritmetización y Traducción), y también el de G y C (Gödel y Crick). A la lógica matemática le toca el lado de las purinas y a la biología molecular el de las pirimidinas.

* "Cat": *gato*, por supuesto. [T.]



.DOGMA I		.DOGMA II
(Biología Molecular)		(Lógica Matemática)
cadenas de ADN	⇐⇒	cadenas de TNT
cadenas de ARNm	⇐⇒	enunciados de N
proteínas	⇐⇒	enunciados de metaTNT
proteínas que actúan sobre proteínas	⇐⇒	enunciados acerca de metaTNT
proteínas que actúan sobre proteínas que actúan sobre	⇐⇒	enunciados acerca de enunciados acerca de enunciados de metaTNT
transcripción	⇐⇒	interpretación
(ADN ⇒ ARN)		(TNT =⇒N)
traducción	⇐⇒	aritmetización
(ARN ⇒ proteínas)		(N =⇒metaTNT)
Crick	⇐⇒	Gödel
Código Genético	⇐⇒	Código Gödel
(convención arbitraria)		(convención arbitraria)
codón (triplete de bases)	⇐⇒	codón (triplete de dígitos)
aminoácido	⇐⇒	símbolo entrecomillado de TNT usado en metaTNT
autorreproducción	⇐⇒	autorreferencia
sistema celular básico lo suficientemente sólido como para permitir la autorrep	⇐⇒	sistema formal aritmético lo suficientemente poderoso como para permitir la autorref

Correspondogma Central

proteínas que actúan sobre proteínas que actúan sobre proteínas, etc.

proteínas

traducción (vía Código Genético)

ARN

autorrep

transcripción (conversión a forma activa)

ADN

.DOGMA I

enunciados acerca de enunciados acerca de enunciados acerca de TNT, etc.

enunciados de metaTNT

aritmetización (vía Código Gödel)

enunciados de N

autorref

interpretación (conversión a forma significativa)

cadenas de TNT

DOGMA II

Para completar la faceta estética de estas correspondencias, he optado por modelar en forma absolutamente rigurosa mi esquema de numeración Gödel del Código Genético. En verdad, bajo la correspondencia que sigue la tabla del Código Genético se convierte en la tabla del Código Gödel:

(impar) 1 ⇐⇒ A (purina)
(par) 2 ⇐⇒ C (pirimidina)
(impar) 3 ⇐⇒ G (purina)
(par) 6 ⇐⇒ U (pirimidina)

Cada aminoácido —de los cuales hay veinte— se corresponde exactamente con un símbolo de TNT: de los cuales hay veinte. Así, por último, surgen las razones que tuve para pergeñar el "TNT austero" de manera tal que sus *símbolos* fuesen exactamente veinte . . . El Código Gödel aparece en la figura 100. Compáreselo con el Código Genético (figura 94).

Hay algo casi místico en la observación de cuán profundamente es compartida una estructura abstracta semejante por esas dos misteriosas, aunque fundamentales, conquistas del conocimiento logradas en nuestro siglo. El Correspondogma Central no es en absoluto una demostración rigurosa de identidad entre ambas teorías, pero sí señala con claridad la profunda relación que las acerca, digna de indagaciones más amplias.

Bucles Extraños en el Correspondogma Central

Una de las similitudes más interesantes entre los dos lados de la correspondencia es la forma en que surgen "bucles" de complejidad arbitraria en el nivel superior de ambos: a la izquierda, proteínas que actúan sobre proteínas que actúan sobre proteínas y así siguiendo, hasta el infinito; a la derecha, enunciados acerca de enunciados acerca de enunciados de metaTNT, y así hasta el infinito. Son como las heterarquías de que hablamos en el Capítulo V, en las cuales un sustrato lo suficientemente complejo permite que aparezcan Bucles Extraños de alto nivel, recíproca y cíclicamente imbricados, y tabicados por completo con respecto a los niveles más bajos. Exploraremos esta noción de una manera más detallada en el Capítulo XX.

De paso, es posible que el lector se plantee esta pregunta: "¿dónde está la contraparte del Teorema de la Incompletitud de Gödel, siguiendo el Correspondogma?". Es un tema excelente para ser considerado antes de avanzar en la lectura.

Figura 99. El Correspondogma Central. Se ha establecido una analogía entre dos Jerarquías Enredadas fundamentales: la de la biología molecular y la de la lógica matemática.

El Correspondogma Central y el *Contracrostipunto*

Resulta que el Correspondogma Central es perfectamente similar a la proyección tendida, en el Capítulo IV, entre el *Contracrostipunto* y el Teorema de Gödel. En consecuencia, pueden establecerse paralelos entre los tres sistemas:

El Código Gödel

	6	2	1	3	
6	0	∀	∨	:	6
	0	∀	∨	:	2
	a	∀	*punc.*	*punc.*	1
	a	∀	*punc.*	⊃	3
2	a	~	<	·	6
	a	~	<	·	2
	a	~	>	·	1
	a	~	>	·	3
1	∧	S	+	∀	6
	∧	S	+	∀	2
	∧	S	=	·	1
	'	S	=	·	3
3	(	)	[	∃	6
	(	)	[	∃	2
	(	)	]	∃	1
	(	)	]	∃	3

Figura 100. El Código Gödel. Bajo ese esquema de numeración Gödel, a cada símbolo de TNT tocan uno o más codones. Los óvalos muestran el modo en que esta tabla subsume la anterior tabla de numeración Gödel, incluida en el Capítulo IX.

(1) sistemas formales y cadenas;
(2) células y cadenas de ADN;
(3) fonógrafos y discos fonográficos.

En el listado que sigue se explica esmeradamente la correspondencia entre los sistemas 2 y 3.

Contracrostipunto		Biología Molecular
fonógrafo	⇐⇒	célula
fonógrafo "perfecto"	⇐⇒	célula "perfecta"
disco	⇐⇒	cadena de ADN
disco ejecutable por un fonógrafo dado	⇐⇒	cadena de ADN reproducible por una célula dada
disco inejecutable por ese fonógrafo	⇐⇒	cadena de ADN irreproducible por una célula dada
proceso de convertir surcos de discos en sonidos	⇐⇒	proceso de transcripción del ADN en el ARNm
sonidos producidos por el fonógrafo	⇐⇒	cadenas de ARN mensajero
traducción de los sonidos a vibraciones del fonógrafo	⇐⇒	traducción del ARNm a proteínas
correspondencia entre sonidos externos y vibraciones del fonógrafo	⇐⇒	Código Genético (correspondencia entre tripletes de ARNm y aminoácidos)
desbaratamiento del fonófrago	⇐⇒	destrucción de la célula
Título de la canción especialmente elaborada para el Fonógrafo X: "No puedo ser escuchada mediante el Fonógrafo X"	⇐⇒	Interpretación de alto nivel de la cadena de ADN especialmente elaborada para la Célula X: "No puedo ser replicada por la Célula X"
Fonógrafo "Imperfecto"	⇐⇒	Célula para la cual existe por lo menos una cadena de ADN que no puede reproducir
"Teorema tödeliano": "Siempre existe un disco inejecutable, dado un fonógrafo determinado".	⇐⇒	Teorema de la Excepción: "Siempre existe una cadena de ADN irreproducible, dada una célula determinada".

La analogía con el Teorema de Gödel tiene que ser considerada como un hecho singular, probablemente no muy provechoso para los biólogos moleculares (para quienes ello resultará sin duda bastante obvio):

> Siempre es posible diseñar una cadena de ADN que, en caso de ser introducida en una célula, al ser transcripta, generaría la producción de proteínas que destruirían la célula (o el ADN), de lo cual resultaría la no reproducción de ese ADN.

Esto despierta una imagen más bien graciosa, por lo menos desde la perspectiva de la evolución: una especie invasora de virus ingresa a una célula valiéndose de ciertos recursos subrepticios y, a continuación, ¡se asegura prolijamente de que sean producidas proteínas cuyo efecto consista en destruir ese mismo virus! Es una forma de suicidio —o de enunciado de Epiménides, si se quiere— en el nivel molecular. Obviamente, esto no significaría una ventaja desde el punto de vista de la supervivencia de la especie. Sin embargo, sirve para demostrar el espíritu, si no la letra, de los mecanismos de protección y de subversión que han desarrollado las células y sus invasores.

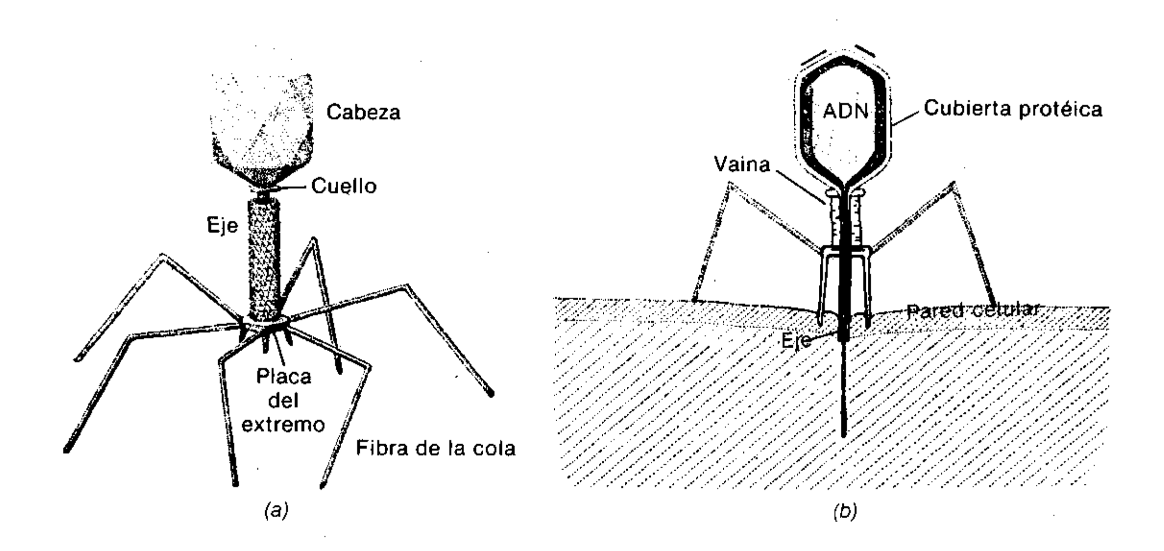


Figura 101. El virus bacterial T4 es un ensamblamiento de componentes proteínicos (a). La "cabeza" es una membrana proteínica, de forma de icosaedro alargado hacia los polos, compuesto por treinta caras, y lleno de ADN en su interior. Un cuello lo une a una cola que consiste en un eje vacío rodeado por una vaina contráctil que termina en una placa con salientes como pernos que le sirve de base, y a la cual van adheridas seis fibras. Los pernos y las fibras fijan el virus a una pared celular bacterial (b). La vaina se contrae, haciendo que el eje atraviese la pared, y entonces el ADN viral ingresa en la célula. [Tomado de Hanawalt and Haynes, The Chemical Basis of Life, *p. 230.*]

E. Coli *vs.* T4

Pasemos a ver ahora la célula predilecta de los biólogos, la de la bacteria *Escherichia coli* (carece de toda relación con M. C. Escher), y también uno de los invasores más frecuentes de esa célula, el siniestro y misterioso bacteriófago *T4*, que aparece ilustrado en la figura 101. (Dicho al margen, las palabras "fago" y "virus" son sinónimas, y significan "agresor de las células bacteriales".) Este fantástico bichito se parece a una cruza entre un módulo destinado a paseos lunares y un mosquito, y es mucho más temible que este último. Tiene una "cabeza" que almacena toda su "sabiduría": a saber, su ADN; y seis "patas" de las que se vale para adherirse a la célula que ha decidido invadir; también cuenta con un "aguijón" (más propiamente llamado "cola"), igual que un mosquito. La diferencia más visible es que, a diferencia de éste, el cual utiliza su aguijón para succionar sangre, el fago T4 lo utiliza para inyectar su sustancia hereditaria en el interior de la célula, y contra lo que serían los deseos de su víctima. De este modo, el fago comete "violación", en escala minúscula.

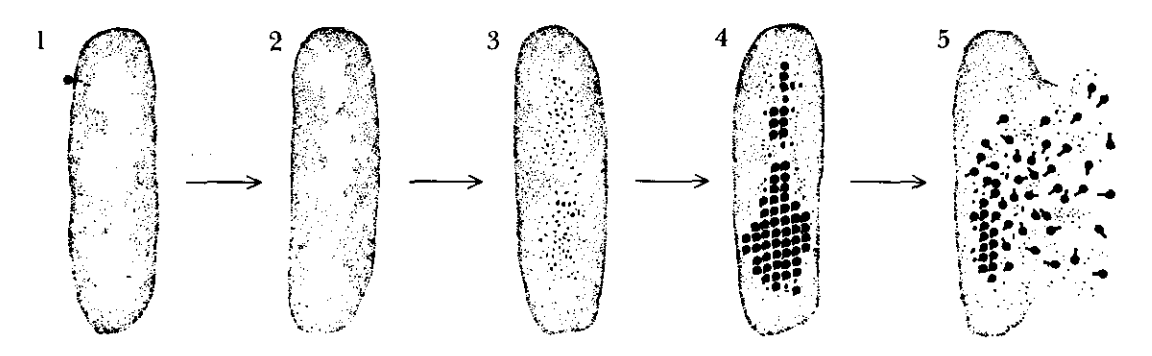


Figura 102. La infección viral comienza cuando el ADN viral penetra en una bacteria. El ADN bacterial es desordenado y se produce la replicación del ADN viral. La síntesis de las proteínas virales estructurales y su reunión en el virus prosigue hasta que la célula es destruida, y deja partículas en libertad. [Tomado de Hanawalt and Haynes, The Chemical Basis of Life, *p. 230.]*

Un caballo de Troya molecular

¿Qué sucede, realmente, cuando el ADN viral penetra en una célula? El virus "confía", para hablar antropomórficamente, en que su ADN reciba exactamente el mismo tratamiento que el ADN de la célula huésped. Esto significará que ha de ser transcripta y traducida, lo cual le permitirá dirigir la síntesis de sus propias proteínas específicas, extrañas a la célula huésped, las cuales comenzarán entonces a realizar su tarea. Esta equivale al transporte secreto de proteínas "en código" (es decir, el Código Genético) hasta dentro de la célula, y a su posterior "decodificación" (es decir, a

su producción). En cierta forma esto nos hace presente el episodio del caballo de Troya: cientos de soldados se introdujeron en Troya sin ser vistos, escondidos dentro de un inmenso caballo de madera fabricado con ese fin; una vez en el interior de la ciudad, abandonaron su escondite y la capturaron. Las proteínas extrañas, luego de "decodificadas" (sintetizadas) a partir de su ADN transportador, se lanzan a la acción. La secuencia de acciones dirigidas por el fago T4 ha sido cuidadosamente estudiada y es aproximadamente como sigue (véanse también las figuras 102 y 103):

Tiempo transcurrido	*Acción que tiene lugar*
0 min.	Inyección de ADN viral.
1 min.	Trastorno del ADN huésped. Cese de la producción de proteínas nativas e iniciación de la producción de proteínas extrañas (T4). Entre las primeras proteínas producidas se cuentan las que dirigen la replicación del ADN extraño (T4).
5 min.	Comienza la replicación de ADN viral.
8 min.	Iniciación de la producción de proteínas estructurales que forman los "cuerpos" de los nuevos fagos.
13 min.	Es producida la primera réplica completa del T4 invasor.
25 min.	La lisozima (una proteína) ataca la pared celular, rompe la bacteria, y emergen los "bicentupletes".

De tal modo, cuando un fago T4 invade una célula de *E. coli*, pasado un breve lapso de entre veinticuatro y veinticinco minutos esa célula ya se encuentra totalmente subvertida, y rota. Surgen entonces aproximadamente doscientas copias exactas del virus original —"bicentupletes"—, prestas a atacar otras células bacteriales; la célula original, en este momento, ya ha sido casi consumida por el proceso.

Aunque esto, desde el punto de vista de una bacteria, signifique una amenaza fatal, desde nuestro punto de observación atento a la gran escala podemos considerarlo como un entretenido juego entre dos oponentes: el invasor, o jugador "T" (llamado después clase par de fagos T, la cual incluye al T2, al T4, y otros), y el jugador "C" (abreviatura de "Célula").

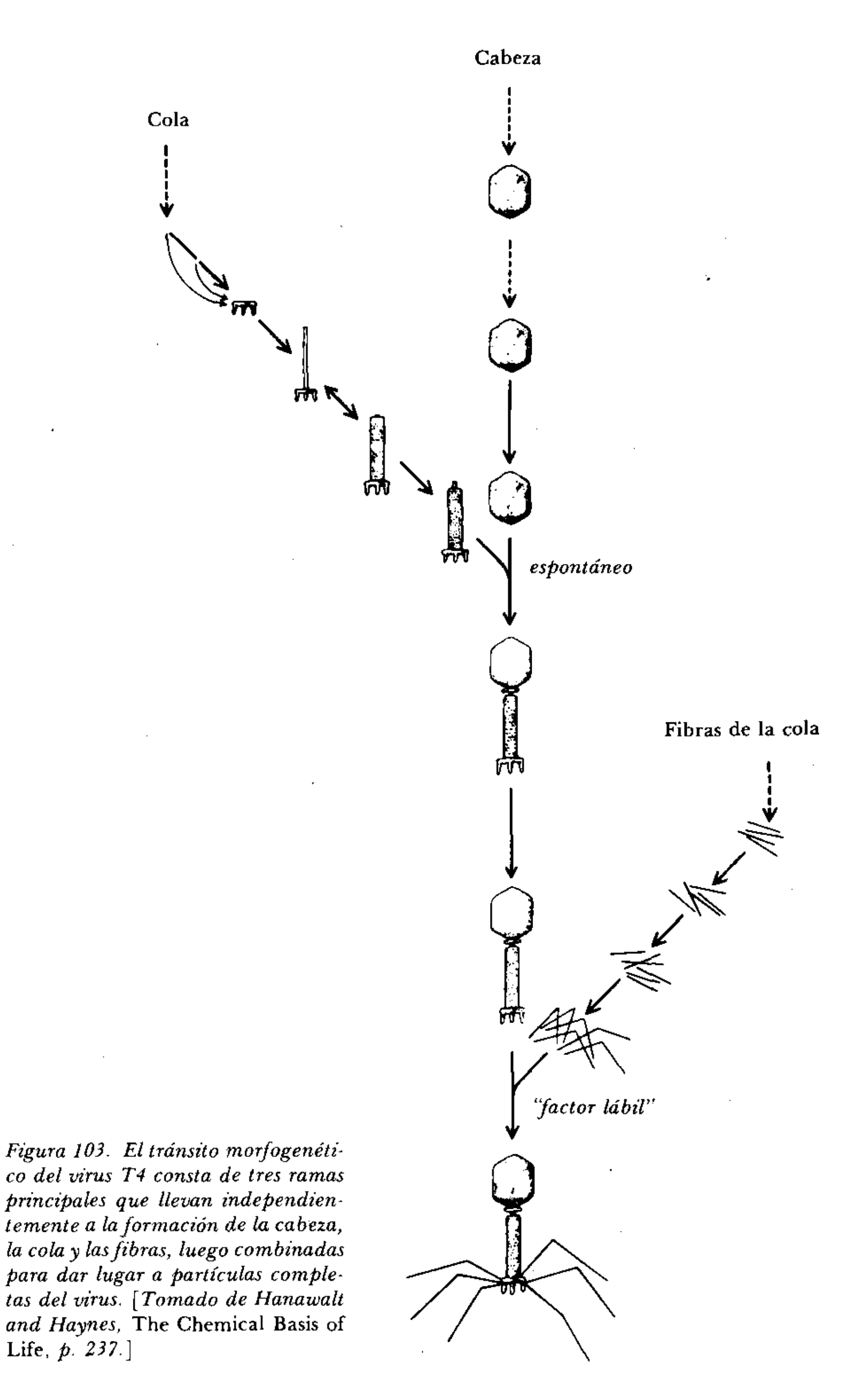


Figura 103. El tránsito morfogenético del virus T4 consta de tres ramas principales que llevan independientemente a la formación de la cabeza, la cola y las fibras, luego combinadas para dar lugar a partículas completas del virus. [Tomado de Hanawalt and Haynes, The Chemical Basis of Life, *p. 237.*]

El objetivo del jugador T es invadir la célula del jugador C, y hacerse cargo de ella desde dentro, con la finalidad de autorreproducirse. El objetivo del jugador C es defenderse y destruir al invasor. Descripto de esta manera, el juego molecular TC puede ser visto como enteramente análogo al juego macroscópico TC mencionado en el Diálogo precedente. (Sin duda, el lector puede determinar cuál jugador —T o C— se corresponde con la Tortuga, y cuál con el Cangrejo.)

Reconocimiento, disfraces, rotulamiento

Este "juego" subraya el hecho de que uno de los temas centrales de la biología celular y subcelular es el "reconocimiento". ¿Cómo se reconocen entre sí dos moléculas (o estructuras de nivel más alto)? Es esencial, para el funcionamiento de una enzima, que pueda restringir su "sitio de combinación" específico al uso exclusivo del mismo por sus sustratos; es esencial que una bacteria pueda distinguir entre su propio ADN y el de los fagos; es esencial que dos células puedan reconocerse entre sí, e interactuar de una manera controlada. Tales problemas de reconocimiento puede que nos recuerden el problema inicial y clave de los sistemas formales: ¿cómo poder determinar si una cadena tiene o no tiene una propiedad en particular, como por ejemplo la teoremidad? ¿Existe un procedimiento de decisión? Este género de interrogaciones no están circunscriptos al ámbito de la lógica matemática: lo encontramos en la ciencia de las computadoras y, según vemos, también en la biología molecular.

La técnica de rotulamiento descripta en el Diálogo es, en realidad, uno de los recursos utilizados por la *E. coli* para sacar ventaja sobre sus fagos invasores. La idea consiste en que las cadenas de ADN pueden ser rotuladas químicamente adhiriendo una pequeña molécula —metilo— a diversos nucleótidos. Pero esta operación de rotulamiento no modifica las propiedades biológicas habituales del ADN; en otras palabras, el ADN metilado (rotulado) puede ser transcripto exactamente igual que el ADN no metilado (no rotulado), y dirigir, en consecuencia, la síntesis de las proteínas. Así, si la célula huésped cuenta con un mecanismo especial que examine si el ADN esta rotulado o no, el rótulo se convierte en la diferencia más importante del mundo. Específicamente, la célula huésped puede tener un sistema enzimático que ubique al ADN no rotulado, y lo destruya allí donde lo encuentre partiéndolo despiadadamente en pedazos. En tal caso, ¡guay de todos los invasores no rotulados!

Los rótulos de metilo en los nucleótidos han sido comparados con los menudos trazos que rematan los extremos de ciertos tipos de imprenta (cuyo nombre técnico es *serif*). Convirtiendo esto en metáfora, podríamos decir que la célula *E. coli* ha de buscar el ADN que esté escrito en su "tipografía local", utilizando su tipo de letra peculiar, y que destruirá cualquier cadena de ADN escrita en una tipografía "extraña". Una

contraestrategia posible, desde la perspectiva de los fagos, consistiría por supuesto en aprender a autorrotularse, con lo que inducirían a las células a las cuales están invadiendo a reproducirlos.

Esta batalla TC puede llegar a extenderse hasta niveles discrecionales de complejidad, pero no perseguiremos estas posibilidades. El hecho esencial es que aquí se trata de una guerra entre un huésped que está esforzándose por rechazar por completo al ADN invasor, y un fago que intenta infiltrar su ADN en un huésped que lo transcribirá en el ARNm (con lo cual queda garantizada su reproducción). A todo ADN fago que consiga ser reproducido en esta forma puede aplicarse esta interpretación de alto nivel: "*Puedo* ser reproducido en Células del Tipo X". Esto se distinguiría del caso del evolutivamente descaminado género de fago al que aludimos más atrás, el cual codifica proteínas para su propia destrucción, y cuya interpretación de alto nivel sería esta confesión de derrota: "*No puedo* ser reproducido en Células del Tipo X".

Enunciados Henkin y Virus

Ahora bien, estos dos tipos opuestos de autorreferencia en biología molecular tienen su equivalente en lógica matemática. Ya hemos hablado del término análogo a los fagos que se autoanulan: a saber, las cadenas del tipo Gödel, las cuales afirman su propia improducibilidad en el interior de los sistemas formales. Pero también es posible elaborar un enunciado equivalente a un fago real: el fago afirma su propia producibilidad en una célula específica, y el enunciado afirma su propia producibilidad en un sistema formal específico. Los enunciados de esta clase reciben el nombre de *Henkin*, en homenaje al lógico matemático Leon Henkin; se los puede construir siguiendo con exactitud las líneas de los enunciados Gödel, con la única diferencia de la omisión de la negación. Se comienza, naturalmente, con un "tío":

∃a:∃a′:<PAR DE PRUEBA TNT{a,a′}∧ARITMOQUINEREAR{a″,a′}>

Se sigue luego con el recurso habitual. Digamos que el número Gödel del "tío" precedente es *h*; por quinereamiento de este mismo tío, obtenemos un enunciado Henkin:

∃a:∃a′<PAR DE PRUEBA TNT{a,a′}∧ARITMOQUINEREAR
{SSS . . . SSS0/a″,a′}>
h eses

(Al margen, ¿el lector puede señalar en qué difiere de ~G este enunciado?) La razón que he tenido para mostrar explícitamente un enun-

ciado de Henkin es la de puntualizar que éste no brinda una fórmula completa de su propia derivación; se limita a afirmar que *existe* una fórmula así. Es posible preguntarse si tal afirmación tiene fundamento: ¿los enunciados de Henkin, en realidad, cuentan con derivación? ¿Son, como pretenden, teoremas? Es útil recordar que uno no tiene por qué dar crédito a un político que diga, "Soy honesto": puede que sí lo sea, y también puede que no lo sea. ¿Los enunciados de Henkin son más dignos de crédito que los políticos?, ¿o duermen, igual que los políticos mencionados en la *Fantasía cromática*?

Pero resulta que estos enunciados de Henkin son invariablemente veraces. No es algo obvio verlo así, pero aceptaremos este curioso hecho sin pedir pruebas.

Enunciados de Henkin implícitos *vs.* enunciados de Henkin explícitos

Ya mencioné que un enunciado de Henkin no dice nada acerca de su propia derivación: sólo afirma que existe una. Pero es posible inventar una variación sobre el tema de los enunciados de Henkin, a saber: enunciados que describan explícitamente su propia derivación. La interpretación de alto nivel de un enunciado así no sería "Existe alguna secuencia de cadenas que es una derivación mía", sino "La secuencia de cadenas descripta aquí . . . es una derivación mía". Llamemos al primer tipo de enunciado un enunciado *implícito* de Henkin; los otros enunciados serán llamados enunciados *explícitos* de Henkin, puesto que describen explícitamente su propia derivación. Adviértase que, a diferencia de sus camaradas implícitos, los enunciados explícitos de Henkin *no tienen por qué ser teoremas*. En realidad, es sumamente sencillo formular una cadena que afirme que su propia derivación consiste en la cadena única 0 = 0: una afirmación falsa, ya que 0 = 0 no es derivación de ninguna cosa. Sin embargo, también es posible formular un enunciado de Henkin explícito que *sea* un teorema, esto es, un enunciado que aporte efectivamente una receta para elaborar su propia derivación.

Enunciados de Henkin y autoensamblamiento

Presento esta distinción entre enunciados de Henkin explícitos e implícitos porque se corresponde muy ajustadamente a una significativa distinción entre tipos de virus. Existen algunos de éstos, como el ya citado virus del mosaico del tabaco, denominados virus *autoensambladores*; y hay otros, como nuestros T pares, que son *no autoensambladores*. ¿Y qué pasa con esta distinción? Tiene una analogía directa con la que separa a los enunciados implícitos de Henkin de los explícitos.

El ADN de un virus autoensamblador codifica únicamente las *partes* de un nuevo virus, pero no las *enzimas*. Una vez producidas las partes, el ruin virus confía en que las mismas se ligarán entre sí, sin necesidad de ninguna colaboración enzimática. Tal proceso descansa en las afinidades químicas que existen entre las partes, allí en esa rica mezcla química de la célula, en la cual están nadando. No solamente los virus, sino también ciertos organelos —los ribosomas, por ejemplo— se autoensamblan.

En ocasiones, pueden hacer falta enzimas: en estos casos, son reclutadas dentro de la célula huésped y sometidas; éste es el significado de autoensamblar.

Por el contrario, el ADN de virus más complejos, como el de los pares, T codifica no sólo las partes sino, además, diversas enzimas que cumplen funciones específicas en el ensamblamiento de las partes para que constituyan conjuntos. Puesto que tal proceso de montaje no es espontáneo sino que requiere de "máquinas", estos virus no son considerados autoensambladores. La esencia de la distinción, entonces, entre unidades autoensambladoras y no autoensambladoras consiste en que las primeras conquistan la autorreproducción sin dar ninguna indicación a la célula con respecto a la construcción de sí mismas, en tanto que las segundas necesitan dar *instrucciones* acerca de cómo ser ensambladas.

Pero el paralelo con los enunciados implícitos y explícitos de Henkin debe ser absolutamente claro. Los enunciados implícitos de Henkin son autoprobatorios, pero no dicen nada en absoluto con respecto a su prueba: son análogos a los virus autoensambladores; los enunciados explícitos de Henkin dirigen la construcción de su propia prueba: son análogos a los virus más complejos, los cuales instruyen a sus células huéspedes con respecto a cómo armar copias de ellos mismos.

El concepto de estructuras biológicas autoensambladoras de la complejidad de los virus origina la posibilidad de máquinas autoensambladoras igualmente complejas. Imaginemos un conjunto de partes que, cuando están situadas en el ámbito de sustentación adecuado, se agrupan de tal manera que integran una máquina compleja. Esto suena inverosímil, pero constituye sin embargo un medio preciso de descripción del método a través del cual el virus del mosaico del tabaco se autorreproduce por vía de autoensamblamiento. La información necesaria para la conformación total del organismo (o de la máquina) está diseminada en sus partes, y no concentrada en ninguna localización particular.

Ahora bien, este concepto puede conducir hacia extrañas direcciones, tal como fue mostrado en los *Pensamientos edificantes de un fumador*. Allí, vimos que el Cangrejo manejaba la idea de que la información requerida para el autoensamblamiento puede estar esparcida en lugar de encontrársela concentrada en un solo sitio. Su esperanza era que ello evitaría una nueva destrucción de sus fonógrafos a manos del método estallafonógrafos de la Tortuga. Por desdicha, tal como pasa con los más refinados esquemas axiomáticos, una vez acabada en un todo la construc-

ción del sistema y empacado éste en un cajón, su propio carácter de bien definido lo hace vulnerable frente a un "gödelizador" lo suficientemente talentoso; de esto trataba el triste relato del Cangrejo. Pese a su aparente absurdo, la situación fantástica de ese Diálogo no está tan lejos de la realidad en el misterioso y superreal mundo de la célula.

Dos problemas sobresalientes: diferenciación y morfogénesis

Ahora bien, el autoensamblamiento puede ser el recurso del que se valen ciertas subunidades celulares para ser construidas, y también ciertos virus, pero, ¿qué ocurre con las estructuras macroscópicas más complejas, como por ejemplo el cuerpo de un elefante o el de una araña, o la forma de cierta planta insectívora? ¿Cómo son construidos los instintos de orientación en el cerebro de un pájaro, o los de caza en el de un perro? En resumen, ¿cómo es que, simplemente mediante el dictado de cuáles proteínas han de ser producidas en las células, el ADN ejerce un control tan espectacularmente exacto sobre la estructura y la función precisas de los objetos vivos macroscópicos? Hay dos problemas principales aquí, de índole distinta. Uno es el de la *diferenciación celular*: ¿cómo diferentes células que comparten exactamente el mismo ADN cumplen diferentes funciones, sea la de célula renal, la de célula medular o la de célula cerebral, por ejemplo? El otro problema es el de la *morfogénesis* ("nacimiento de la forma"): ¿cómo da origen la comunicación intercelular de nivel regional a estructuras y organizaciones globales, de gran escala, tales como los diversos órganos del cuerpo, la forma del rostro, los subórganos del cerebro, etc.? Aunque la diferenciación celular y la morfogénesis son conocidas escasamente en la actualidad, la clave parece residir en mecanismos exquisitamente ajustados de retroalimentación y "prealimentación", vigentes dentro de y entre las células, los cuales indican a éstas cuándo "encender" y cuándo "apagar" la producción de diversas proteínas.

Retroalimentación y prealimentación

La *retro*alimentación tiene lugar cuando alguna sustancia necesaria se encuentra en cantidad excesiva o escasa en la célula; ésta última debe entonces, de un modo u otro, equilibrar la línea de producción que está ensamblando dicha sustancia. La *pre*alimentación también implica la regulación de una línea de montaje, pero no de acuerdo a la evaluación del producto final actual, sino a la evaluación de algún *precursor* del producto final de esa línea de montaje. Existen dos expedientes principales para la obtención de retroalimentación o prealimentación *negativas*: uno consiste en evitar que las enzimas pertinentes actúen; es decir, en "tapar" sus

sitios activos, lo cual es denominado *inhibición*; el otro, conocido como *represión*, ¡consiste en evitar que las enzimas pertinentes sean manufacturadas! Conceptualmente, la inhibición es simple: basta con bloquear el sitio activo de la primera enzima de la línea de montaje; ello paraliza el proceso íntegro de síntesis.

Represores e inductores

La represión es más compleja. ¿Cómo interrumpe una célula la expresividad de un gene? Impidiendo que sea transcripto, es la respuesta; esto significa que ha de evitarse la realización de su tarea por parte de la polimerasa ARN. Esto se puede conseguir mediante la implantación de un gran obstáculo en su camino, a lo largo del ADN, exactamente delante del gene que la célula no quiere que sea transcripto. Tales obstáculos existen y son llamados *represores*; son, a su vez, proteínas, y se adhieren a sitios específicos de fijación de obstáculos en el ADN, denominados (no sé bien por qué) *operadores*. Un *operador*, en consecuencia, es un sitio de control del gene (o genes) que viene inmediatamente detrás y al cual se identifica como el *operón* de aquél. Ya que, frecuentemente, una serie de enzimas se conciertan para efectuar una transformación química extensa, pueden ser codificadas en secuencias; de ahí que muchas veces los operones contengan diversos genes y no solamente uno. Cuando se logra la represión de un operón, el resultado consiste en que se impide la transcripción de una serie completa de genes, lo cual significa que un conjunto completo de enzimas interrelacionadas queda sin sintetizar.

¿Y qué diremos de la retro y la prealimentación *positivas*? Acá encontramos también dos opciones: (1) el destape de las enzimas taponadas, o (2) el cese de la represión ejercida por los operones pertinentes. (Tómese nota de que la naturaleza, aparentemente, ¡*ama* las negaciones dobles! Es probable que haya alguna razón profunda para ello.) El mecanismo a través del cual es reprimida la represión abarca una clase de moléculas llamadas *inductoras*; la función de un *inductor* es simple: se combina con una proteína represora antes de que ésta haya tenido oportunidad de unirse a un operador, en una molécula de ADN; el "compuesto represor-inductor" es incapaz de unirse a un operador, y esto deja abierta la puerta para que el operón asociado sea transcripto a ARNm y, a continuación, traducido a proteína. En ocasiones, el producto final o algún precursor del producto final pueden actuar como inductores.

Comparación entre retroalimentación y bucles raros

Ya que estamos, éste es un momento excelente para distinguir entre clases simples de retroalimentación, como las de los procesos de inhibición y represión, y los bucles que abrazan diferentes niveles de información,

mostrados en el Correspondogma Central. Ambos son "retroalimentación", en algún sentido, pero en el segundo caso hay mucha mayor profundidad que en el primero. Cuando un aminoácido, como por ejemplo el triptófano o la isoleucina, actúa como retroalimentador (bajo la forma de inductor), combinándose con su represor para lograr eficacia, no está indicando *cómo* debe ser construido en función retroalimentadora sino, solamente, está dando indicaciones en ese sentido a las enzimas. Esto podría ser comparado al volumen de un aparato de radio que alimenta el oído de un oyente, lo cual puede causarle el efecto de ser subido o bajado. Es algo totalmente distinto al caso de una emisora que indique explícitamente que el receptor de radio debe ser encendido o apagado, o sintonizado en otra longitud de onda o, inclusive, ¡cómo construir otro receptor! Esto último es muy semejante a los bucles comprensivos de diferentes niveles de información, pues la información contenida en la señal radiotelefónica es "decodificada" y traducida a estructuras mentales. Dicha señal está compuesta por constituyentes simbólicos, cuya significación simbólica es de aplicación a la situación: un caso de uso, no de mención. Por el otro lado, cuando el sonido es estrepitoso, los símbolos no están transmitiendo significados; son percibidos meramente como sonidos estrepitosos, y muy bien podrían estar vacíos de significación: un caso de mención, no de uso. Este ejemplo es más próximo a los bucles de retroalimentación a través de los cuales las proteínas regulan sus valores de síntesis.

Existe la explicación de que la diferencia entre dos células contiguas que comparten exactamente el mismo genotipo y, pese a ello, cumplen funciones diferentes, se debe a que diferentes segmentos de su genomio han sido reprimidos, y por consiguiente tienen diferentes *juegos operativos* de proteínas. Tal hipótesis puede dar razón de las extraordinarias diferencias entre las células de los distintos órganos de un cuerpo humano.

Dos ejemplos simples de diferenciación

El proceso por el cual una célula inicial se replica una y otra vez, dando lugar a una miríada de células diferenciadas que cumplen funciones específicas, puede ser comparado a la difusión persona a persona de una carta en cadena, donde se solicita a cada participante que repita el mensaje con fidelidad, pero también que agregue un toque personal. Al final, habrá cartas que guarden una tremenda diferencia entre sí.

Otra ilustración de la noción de diferenciación es provista por una computadora sumamente simple, análoga a una autorrep diferenciadora: supongamos un programa muy breve, controlado por un conmutador de dos posiciones —superior e inferior— y dotado de un parámetro interno *N*: un número natural. Este programa funciona a través de dos modalidades, señaladas por las dos posiciones mencionadas del conmutador. Cuando lo hace en la modalidad *superior*, se autorreplica en una parte

adyacente de la memoria de la computadora, con la excepción de que el parámetro N de su "hija" es más grande en la réplica. Cuando lo hace en la modalidad *inferior*, no se autorreplica sino que, en lugar de ello, calcula el número

$$(-1)^N/(2N+1)$$

y lo suma a un procesamiento total.

Bien, supongamos que, en el comienzo, hay una copia del programa en la memoria, $N = 0$, y que la modalidad es la superior. El programa, entonces, se autocopiará en la puerta contigua de la memoria, con $N = 1$. Repitiendo el proceso, el nuevo programa se autocopiará en el sitio siguiente, mediante una copia que tenga $N = 2$. Y así siguiendo, una y otra vez . . . Lo que ocurre es que se está desarrollando un programa muy extenso en la memoria. Cuando ésta se complete, el proceso se detendrá. En este momento, puede considerarse que el conjunto de la memoria contiene un *gran* programa, compuesto por muchos módulos, o "células", similares pero diferenciados. Supongamos ahora que conmutamos el programa a la modalidad inferior y procesamos este gran programa. ¿Qué sucede? Es pasada la primera "célula", y calcula 1/1; luego la segunda "célula", la cual calcula $-1/3$ y lo agrega al resultado anterior; luego la tercera "célula", la cual calcula $+1/5$ y lo suma . . . El resultado final consiste en que el "organismo" total —el gran programa— calcula la suma

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + 1/13 - 1/15 + \ldots$$

de un gran número de términos (tantos términos como "células" puedan caber en la memoria). Y, como esta serie tiende (aunque lentamente) a $\pi/4$, tenemos un "fenotipo", cuya función es calcular el valor de una constante matemática célebre.

Mezcla de niveles en la célula

Confío en que la descripción de procesos como el rotulamiento, el autoensamblamiento, la diferenciación, la morfogénesis y los de transcripción y descripción hayan contribuido a comunicar cierta idea acerca del sistema inmensamente complejo que es una célula: un sistema de procesamiento de información, dotado de algunos sorprendentes rasgos adicionales.

Ya hemos visto en el Correspondogma Central que, si bien podemos intentar el trazado de una frontera clara entre programa y datos, la distinción es, en realidad, un tanto arbitraria. Avanzando en esta reflexión, hallamos que no solamente *programa* y *datos* se entretejen intrincadamente, sino que también el *intérprete* de los programas, el *procesador*

físico e inclusive los *lenguajes* son incluidos en esta fusión íntima. En consecuencia, aunque es posible (en alguna medida) trazar límites que separen entre sí los niveles, no es menos importante —y fascinante— reconocer los cruces y entremezclamientos de niveles. Esto es ilustrado por el asombroso hecho de que, en los sistemas biológicos, todos los aspectos requeridos por la autorrep (lenguaje, programa, datos, intérprete y procesador) intervienen de tal manera que todos ellos son replicados en forma simultánea, lo cual muestra cuánto más profunda es la autorreplicación biológica que ninguna de las invenciones humanas en ese campo. Por ejemplo, el programa de autorrep presentado al principio de este Capítulo da por supuesta la existencia previa de tres aspectos externos: un lenguaje, un intérprete y un procesador, y no los replica.

Probaremos de resumir las diversas formas en que las subunidades de una célula pueden ser clasificadas en términos de ciencia de las computadoras. Comencemos con el ADN: puesto que éste contiene toda la información para regir la construcción de las proteínas, las cuales son los agentes activos de la célula, puede ser visto como un *programa* formulado en un lenguaje de mayor nivel, subsiguientemente traducido (o interpretado) al "lenguaje de máquina" de la célula (proteínas). Por otro lado, el ADN es, asimismo, una molécula pasiva sometida a las manipulaciones de diversos tipos de enzimas; en este sentido, una molécula de ADN es exactamente igual a una extensa pieza de *datos*. En tercer lugar, el ADN contiene el molde que imprime las "tarjetas" de ARNt, lo cual significa que el ADN contiene, también, su propio *lenguaje* de más alto nivel.

Pasemos a las proteínas: son moléculas activas, que realizan todas las funciones de la célula; por lo tanto, es enteramente razonable considerarlas como *programas* del "lenguaje de máquina" de la célula (donde la célula misma es el procesador). En otro orden, como las proteínas son hardware y la mayor parte de los programas son software, tal vez sea más acertado pensar que las proteínas son *procesadores.* En tercer lugar, a menudo las proteínas reciben la acción de otras proteínas, lo cual significa que, en tales casos, las proteínas son *datos*. Por último, es posible entender a las proteínas como *intérpretes:* esto implica que el ADN ha de ser visto como una colección de programas en lenguajes de alto nivel, de lo cual se desprende que las enzimas se limitan a dar cumplimiento a los programas formulados en código ADN: a su vez, esto equivale a decir que las proteínas están actuando como intérpretes.

Tenemos luego a los ribosomas y a las moléculas ARNt: se trata de intermediadores de la traducción de ADN a proteínas, lo que puede ser comparado con la traducción de un programa en lenguaje de alto nivel a lenguaje de máquina; en otras palabras, los ribosomas están funcionando como *intérpretes*, y las moléculas de ARNt aportan la definición del *lenguaje* de nivel más alto. Pero hay un punto de vista alternativo a propósito de la traducción: los ribosomas pueden ser considerados *procesadores*, y las moléculas de ARNt, *intérpretes*.

Apenas si hemos rasguñado la superficie en este análisis de las interrelaciones que vinculan a todas las biomoléculas mencionadas. Lo que hemos percibido es que la naturaleza se siente muy cómoda mezclando niveles que *nosotros* tendemos a ver como totalmente distintos. En la ciencia de las computadoras, actualmente, existe ya una inclinación visible a fusionar todos estos aspectos aparentemente diferentes de un sistema de procesamiento de información. Esto se nota particularmente en la investigación sobre inteligencias artificiales, generalmente ubicada a la cabeza en cuanto a la invención de lenguajes de computadora.

El origen de la vida

Surge una pregunta natural, y fundamental, luego de conocer estas piezas de software y hardware increíblemente entrelazadas: "¿Cómo empezó esto?" En verdad, se trata de un asunto desconcertante. Uno tiene que imaginarse la aparición de una suerte de proceso de "gancho", en cierto modo semejante al empleado en el desarrollo de lenguajes nuevos de computadora . . . pero un gancho que lleve desde la molécula simple hasta la célula completa está prácticamente más allá del poder de nuestra imaginación. Hay más de una teoría a propósito del origen de la vida. Todas quedan varadas en la pregunta más fundamental: "¿Cómo se origina el Código Genético, junto con sus mecanismos de traducción (ribosomas y moléculas ARNt)?" Por el momento, debemos conformarnos con un sentimiento de asombro y de reverencia, antes bien que con una respuesta. Experimentar ese sentimiento quizá sea más satisfactorio que contar con una respuesta, al menos por un tiempo.

El Magnifican . . . grejo, por supuesto

Es primavera y la Tortuga y Aquiles están dando un paseo dominical. Han decidido subir hasta la cumbre de una colina, donde, según se dice, hay una encantadora casa de té que tiene una variada y deliciosa pastelería.

Aquiles: ¡A mí no me diga! Si hay un cangrejo . . .

Tortuga: ¿¿Si hay un cangrejo??

Aquiles: Iba a decir que, si hay un cangrejo inteligente, es sin duda nuestro común amigo el Cangrejo. Sí, es por lo menos el doble de inteligente que cualquier cangrejo vivo. O, tal vez, el triple de inteligente que cualquier cangrejo vivo. O, tal vez, . . .

Tortuga: ¡Caramba! ¡Cómo magnifica usted al Cangrejo!

Aquiles: Bueno, todo lo que ocurre es que soy un admirador suyo . . .

Tortuga: No tiene por qué disculparse. Yo también lo admiro. Hablando de fanáticos del Cangrejo, ¿le he hablado de la curiosa carta de uno de ellos que el Cangrejo recibió no hace mucho?

Aquiles: Me parece que no. ¿Quién se la envió?

Tortuga: El matasellos era de la India, y el remitente era alguien de quien jamás habíamos oído hablar: un Sr. Nayunamar, creo.

Aquiles: Me sorprende que alguien que no conoce al señor Cangrejo le escriba una carta . . . y que haya conseguido su dirección.

Tortuga: Por lo visto, esa persona estaba bajo la ilusión de que el Cangrejo es un matemático. La carta contiene numerosas deducciones, todas las cuales estaban . . . ¡Oh, pero, hablando del diablo! Aquí viene el señor Cangrejo, bajando la cuesta.

Cangrejo: ¡Adiós! Fue hermoso charlar otra vez con ustedes. Bueno, creo que lo mejor es que siga mi camino. Estoy atracado del todo, ¡no podría comer ni una migaja más! Acabo de estar allá arriba . . . se los recomiendo calurosamente. ¿Han estado alguna vez en la casa de té de la cresta de la colina? ¿Qué tal, Aquiles? Oh, Aquiles, usted por acá. Hola, hola. Bueno, bueno, ¡a quién veo!, ¿cómo está, señora Tortuga?

Tortuga: Hola, señor Cangrejo, ¿ha ido usted a la casa de té de allá arriba?

Cangrejo: Cómo, sí, claro que sí, ¿cómo lo supuso? Estoy acariciando la idea de tener enfrente unos napoleones de hojaldre y crema que tienen allí: un bocadillo excelente. Tengo tanta hambre que me comería una rana. Oh, Aquiles, usted por acá. ¿Cómo está, Aquiles?

Aquiles: Podría estar peor, creo.



Figura 104. Castrovalva, *de M. C. Escher (litografía, 1930).*

Cangrejo: ¡Estupendo! Bueno, no me permitan interrumpir su plática; la seguiré atentísimamente.

Tortuga: Fíjese qué curioso, precisamente estaba por referirme a la misteriosa carta de este señor indio, que recibió usted hace unas semanas . . . pero, estando usted aquí, dejaré que Aquiles se entere del asunto de boca del mismo Cangrejo.

Cangrejo: Bien, fue así: aparentemente, este amigo Nayunamar nunca había hecho un aprendizaje formal de la matemática sino que, en lugar de ello, había elaborado métodos propios para deducir nuevas verdades en esa disciplina. Algunos de sus descubrimientos me dejaron completamente anonadado; yo jamás había visto nada parecido. Por ejemplo, exhibió un mapa de la India que había coloreado utilizando nada menos que 1729 matices diferentes.

Aquiles: ¡1729! ¿Dijo usted 1729?

Cangrejo: Sí, ¿por qué?

Aquiles: Bueno, 1729 es un número muy interesante, usted sabe.

Cangrejo: Seguramente. No me había percatado.

Aquiles: Particularmente, ¡sucede que 1729 era el número del taxi que tomé esta mañana para ir a casa de la señora Tortuga!

Cangrejo: ¡Fascinante! Tal vez pueda decirme el número del tranvía que tomará mañana para ir a casa de la señora Tortuga.

Aquiles (luego de pensarlo un momento): No me resulta obvio; sin embargo, debo conjeturar que será muy largo.

Tortuga: Aquiles tiene una intuición maravillosa para estas cosas.

Cangrejo: Sí. Bueno, como estaba diciendo, Nayunamar también demostró, en su carta, que todo primo par es la suma de dos números impares, y que no hay solución, en enteros positivos, para la ecuación

$$a^n + b^n = c^n \quad \text{para } n = 0.$$

Aquiles: ¿Qué? ¿Todos esos viejos problemas clásicos de la matemática resueltos de un manotazo? Ese señor tiene que ser un genio de primer orden . . .

Tortuga: Pero, Aquiles, ¿no estaba usted enrolado en el más exigente escepticismo?

Aquiles: ¿Qué? Oh, sí . . . escéptico. Claro, por supuesto que lo soy. No pensará usted que yo me creo que el señor Cangrejo recibió tal carta, ¿verdad? A mí no se me embauca así nomás, ¡de manera que debe haber sido usted, señora Tortuga, quien recibió la carta!

Tortuga: Oh, no, Aquiles, es totalmente verídico que el señor Cangrejo recibió esa carta. Lo que yo quería decir era otra cosa: ¿no es usted escéptico con respecto al contenido de la carta, a sus extravagantes aserciones?

Aquiles: ¿Y por qué? Mmmm . . . Claro, por supuesto que lo soy. Soy

una persona realmente escéptica, tal como ustedes debieran saberlo sin ninguna duda. Es muy difícil convencerme de ninguna cosa, por más verdadera o falsa que sea.

Tortuga: Soberbia puntualización, Aquiles. Indudablemente, usted tiene un conocimiento de primera clase de su propio funcionamiento mental.

Aquiles: ¿Se les ocurrió a ustedes en algún momento, amigos míos, que estos planteamientos de Nayunamar pudiesen ser incorrectos?

Cangrejo: Francamente, Aquiles, como yo también soy bastante conservador y ortodoxo, estuve muy preocupado por ese mismo asunto luego de recibir la carta. En realidad, al principio sospeché que se trataba lisa y llanamente de una superchería. No obstante, pensándolo por segunda vez, me di cuenta de que no son muchas las personas que puedan pergeñar desarrollos de tan rara apariencia y tan complejos, mediante un esfuerzo exclusivamente imaginativo. En último caso, el asunto se resumía en esta interrogación: "¿Qué es lo más verosímil: que se trate de un charlatán de una ingenuidad tan extraordinaria, o de un matemático dotado de un genio admirable?" Antes de que transcurriera mucho tiempo, determiné que las probabilidades favorecían notoriamente la primera variante.

Aquiles: ¿Pero usted no verificó todas estas asombrosas aserciones?

Cangrejo: ¿Por qué hacerlo? Para mí, el argumento de la probabilidad era el más convincente; ninguna demostración matemática podría igualarlo. Pero la señora Tortuga insistió acerca del rigor, y yo finalmente accedí a sus reclamos: verifiqué todas las deducciones de Nayunamar y, para mi gran sorpresa, todas eran correctas. Jamás sabré, empero, cómo las descubrió. Debe contar con algún asombroso e inescrutable tipo de penetración oriental del que aquí en Occidente no tenemos ni sospechas. Hasta el momento, ésta es la única explicación que tiene algún sentido para mí.

Tortuga: El señor Cangrejo siempre ha sido un poco más susceptible a las argumentaciones místicas o fantásticas que yo. Tengo la más completa seguridad de que todo lo hecho a su modo por Nayunamar tiene su perfecto paralelo dentro de la matemática ortodoxa. No existen formas de hacer matemática de una manera que sea totalmente diferente a la que conocemos, en mi opinión.

Aquiles: Es una opinión interesante. Presumo que tiene algo que ver con la Tesis Church-Turing y temas afines.

Cangrejo: Oh, está bien, dejémonos de cuestiones técnicas en un día tan bello, y gocemos la serenidad de la foresta, del gorjeo de los pájaros, del resplandor solar sobre los pimpollos y las hojas recién crecidas. ¡Ey!

Tortuga: Apoyo su moción. Al fin y al cabo, todas las generaciones de Tortugas han disfrutado de estos encantos de la naturaleza.

Cangrejo: Igual que todas las generaciones de Cangrejos.

Aquiles: Por casualidad, señor Cangrejo, ¿no ha traído usted su flauta?

Cangrejo: ¡Caray, claro que sí! A todas partes la llevo conmigo. ¿Le gustaría escuchar una o dos melodías?

Aquiles: Sería delicioso, en este escenario bucólico. ¿Toca usted de memoria?

Cangrejo: Es triste confesarlo, pero eso está más allá de mis posibilidades. Tengo que leer la música; pero no hay ningún problema, tengo aquí varias simpáticas composiciones, en este estuche.

(*Abre un pequeño estuche y saca algunas hojas de papel. La primera tiene inscriptos los siguientes símbolos:*

$$\forall a{:}\sim Sa = 0$$

Fija esa hoja a un pequeño atril adosado a su flauta y empieza a tocar. La melodía es sumamente breve.)

Aquiles: Precioso. (*Espía la hoja del atril y una expresión burlona asoma a su rostro.*) ¿Qué es este enunciado de teoría de los números, así adherido a su flauta?

(*El Cangrejo observa su flauta, luego sus partituras, gira su cabeza en rededor, y da la impresión de encontrarse un tanto confundido.*)

Cangrejo: No comprendo. ¿Cuál enunciado de teoría de los números?

Aquiles: "Cero no es el subsiguiente de ningún número natural". ¡Aquí está, en el atril de su flauta!

Cangrejo: Eso es el tercer Postulado de Piano. Hay cinco de ellos, que yo he arreglado para flauta. Son claros, pero irregulares.

Aquiles: No me resulta claro cómo un enunciado teórico-numérico puede ser ejecutado musicalmente.

Cangrejo: Pero yo insisto, esto NO es un enunciado teórico-numérico: ¡es un Postulado de Piano! ¿Querría escuchar otro?

Aquiles: Con todo gusto.

(*El Cangrejo ubica otra hoja en su flauta, y ahora Aquiles observa más cuidadosamente.*)

Bien, he estado observando sus ojos, y éstos miran esa FORMULA escrita en la hoja. ¿Usted está seguro de que eso es notación musical? Juro que se parece de modo extraordinario a la notación que se usaría en una versión formalizada de teoría de los números.

Cangrejo: ¡Qué cosa tan extraña! Pero no le quepa duda de que esto es música y, por lo que yo sé, ninguna clase de enunciado matemático . . . Por supuesto, yo no soy un matemático, en ninguno de los sentidos de la palabra. ¿Querría escuchar otras melodías?

Aquiles: Segurísimo que sí, ¿tiene más?
Cangrejo: Un montón.

(*Toma otra hoja y la adhiere a su flauta. Contiene los siguientes símbolos:*

$$\sim\exists a{:}\exists b{:}(SSa \cdot SSb) = SSSSSSSSSSSSS0$$

Aquiles la mira a hurtadillas, mientras el Cangrejo toca.)

Es una belleza, ¿verdad?
Aquiles: Sí, ciertamente es una piececita melodiosa. Sin embargo, debc decirle que esto se me hace más y más parecido a la teoría de los números.
Cangrejo: ¡Demonios! No es sino mi notación musical de siempre, ninguna otra cosa. Sinceramente, no sé cómo hace usted para leer esas connotaciones extramusicales en una transparente representación de sonidos.
Aquiles: ¿Se opondría usted a tocar una pieza hecha por mí?
Cangrejo: De ninguna manera, ¿la tiene ahí?
Aquiles: Todavía no, pero tengo el presentimiento de que yo podría componer algunas melodías.
Tortuga: Debo decirle, Aquiles, que el señor Cangrejo es un árbitro muy estricto en materia de música compuesta por otros, de manera que no se sienta frustrado si, por algún azar, él no se muestra entusiasmado ante sus esfuerzos.
Aquiles: Es muy amable de su parte hacerme esa advertencia. Sin embargo, estoy dispuesto a hacer un ensayo . . .

(*Escribe:*

$$((SSS0 \cdot SSS0) + (SSSS0 \cdot SSSS0)) = (SSSSS0 \cdot SSSSS0)$$

El Cangrejo toma la anotación de Aquiles, la examina un momento, la coloca en su atril y procede a tocar la flauta.)

Cangrejo: Caray, Aquiles, es muy bonita. Me encantan los ritmos raros.
Aquiles: ¿Y qué tienen de raros los ritmos de esta composición?
Cangrejo: Naturalmente, siendo usted el compositor, tiene que parecerle sumamente suave, pero a mis oídos el desplazamiento desde un ritmo 3/3 a 4/4, y después a 5/5, es muy exótico. Si tiene usted otras canciones, sería dichoso tocándolas.
Aquiles: Muchísimas gracias. Nunca compuse nada hasta ahora, y debo confesar que se trata de algo muy distinto de lo que yo había imaginado. Permítame ensayar mi mano con otra. (*Anota una línea.*)

$$\sim\exists a{:}\exists b{:}(SSa \cdot SSb) = SSSSSSSSSSSSSS0$$

Cangrejo: Mmmm . . . ¿No es esto una copia exacta de mi primera pieza?

Aquiles: ¡Oh, no! He agregado una S. Donde había trece en una hilera, he puesto catorce.

Cangrejo: Ah, sí, por supuesto. (*Ejecuta, y se lo nota muy contrariado.*)

Aquiles: ¡Tenía la esperanza de que mi composición no le disgustase!

Cangrejo: Diría yo, Aquiles, que ha fracasado usted por completo en la captación de las sutilezas de mi pieza, en la cual se basó la suya. Claro que, ¿cómo podía yo esperar que usted la comprendiese con sólo escucharla una vez? No siempre le es posible a uno advertir qué es lo que hay en las fuentes de la belleza. Es muy fácil equivocarse y tomar los aspectos superficiales de una obra como si fuesen su belleza, e imitarlos, cuando en realidad la belleza está encerrada en las profundidades de la música, en una forma que siempre parece eludir el análisis.

Aquiles: Me temo que sus eruditos comentarios me han confundido un poco. Comprendo que mi composición no se ajuste a sus elevados patrones, pero no sé con exactitud en qué parte me he salido del camino. ¿Podría usted, a lo mejor, orientarme de una manera específica para que yo sitúe el error que cometí?

Cangrejo: Una forma posible de salvar su composición, Aquiles, consistiría en incluir tres eses más —también podrían ser cinco— en ese extenso grupo de eses próximo al final. Ello crearía un efecto tan sutil como inusual.

Aquiles: Ya veo.

Cangrejo: Pero hay otros medios por los cuales usted puede optar, para transformar su pieza. Personalmente, encuentro que lo más atractivo sería poner otro tilde delante. Ello aportaría un grato equilibrio entre el comienzo y el final. Contar con dos tildes en una hilera nunca deja de brindar un pequeño giro llamativo a una composición, usted sabe.

Aquiles: ¿Qué le parece si aplico sus dos sugerencias, y hago la siguiente composición?

$$\sim\sim\exists a{:}\exists b{:}(SSa \cdot SSb = SSSSSSSSSSSSSSSSS0$$

Cangrejo (*con una mueca de aflicción cruzándole el rostro*): Vea, Aquiles, es importante aprender la siguiente lección: nunca hay que tratar de expresar demasiado en una sola composición. Siempre hay un punto más allá del cual la misma no puede ser perfeccionada, y todo nuevo ensayo por conseguirlo tendrá como único resultado, en realidad, destruirla. Este es el caso ahora. Su iniciativa de incorporar al mismo tiempo mis dos sugerencias no ha conducido a la deseada obtención de mayor belleza sino que, por lo contrario, ha generado un desequilibrio que borra todo el encanto.

Aquiles: ¿Cómo es que dos composiciones tan similares, la suya con trece eses, y la mía con catorce, le parecen a usted tan diferentes en su valor musical? Salvo en ese aspecto ínfimo, son idénticas.

Cangrejo: ¡Señor! Hay un mundo de diferencia entre su composición y la mía. Tal vez las palabras, en esto, no sean capaces de comunicar lo que siente el espíritu. Por cierto, yo me aventuraría a decir que no existe ningún conjunto de reglas que establezcan cómo se elabora una composición bella, e inclusive que tal conjunto de reglas no puede existir. El sentido de la Belleza pertenece al dominio exclusivo de la Mente Consciente: la mente que, a través de la experiencia vital, ha conquistado una profundidad que trasciende las explicaciones de un mero conjunto de reglas.

Aquiles: No olvidaré nunca este vívido esclarecimiento de la naturaleza de la Belleza. Supongo que algo similar podría decirse acerca del concepto de Verdad, ¿no cree?

Cangrejo: Sin ninguna duda. Verdad y Belleza están tan interrelacionadas como . . . como . . .

Aquiles: ¿Tan interrelacionadas como, digamos, la matemática y la música?

Cangrejo: ¡Oh, me lo ha sacado usted de la boca! ¿Cómo sabía que era eso lo que yo estaba pensando?

Tortuga: Aquiles es muy talentoso, señor Cangrejo. Nunca hay que desestimar la potencia de su lucidez.

Aquiles: ¿Diría usted que se puede concebir la existencia de una relación entre la verdad o falsedad de un enunciado matemático particular, y la belleza o falta de belleza de una determinada composición musical? ¿O estoy incurriendo en una fantasía descabellada, carente de fundamento real?

Cangrejo: Si me lo pregunta a mí, diría que eso lleva las cosas mucho más lejos. Cuando hablé de la interrelación entre música y matemática, lo hice figuradamente, usted sabe. En cuanto a una conexión directa entre composiciones musicales específicas y enunciados matemáticos específicos, sin embargo, profeso graves dudas acerca de que sea posible. Humildemente, le aconsejaría a usted no dedicar demasiado tiempo a una especulación tan ociosa.

Aquiles: Tiene usted mucha razón, sería una ocupación totalmente improductiva: quizá deba concentrarme en aguzar mi sensibilidad musical, poniéndome a componer nuevas piezas. ¿Estaría usted dispuesto a ser mi mentor, señor Cangrejo?

Cangrejo: Me hará feliz poder ayudarle a dar sus primeros pasos hacia el conocimiento musical.

(*Aquiles, entonces, toma la pluma y, evidenciando una gran concentración, escribe:*

Λ00a∀′∨~ΛΛ:b + cS(ƎƎ = 0Λ⊃((~d)<V(∀S· + (>V

El Cangrejo, muy sobrecogido, observa.)

¿De veras quiere usted que yo toque esa . . . esa . . . lo que sea?

Aquiles: ¡Oh, se lo ruego!

(*El Cangrejo, con visible dificultad, ejecuta la composición.*)

Tortuga: ¡Bravo! ¡Bravo! ¿Su compositor preferido es John Cage, Aquiles?

Aquiles: En realidad, es mi anticompositor preferido. De todos modos, me alegro de que le haya gustado MI música.

Cangrejo: Ustedes pueden sentir agrado escuchando esta cacofonía totalmente desprovista de sentido, pero yo les aseguro que, para un compositor sensible, no es placentero en absoluto verse sometido a semejante tormento: disonancias vacías y ritmos sin significación. Aquiles, me había parecido que su sentido musical era bueno; ¿será posible que sus piezas anteriores a ésta hayan salido bien por simple casualidad?

Aquiles: Oh, discúlpeme, por favor, señor Cangrejo. Yo estaba tratando de explorar los límites de su notación musical; deseaba aprender en forma directa qué clases de sonidos resultan cuando se escriben determinadas secuencias de notas, y también de qué modo evalúa usted diversos estilos de composición.

Cangrejo: ¡Habráse visto! Yo no soy una mera máquina musical automática, vea usted, ni tampoco un bote de basura para echar dentro desperdicios musicales.

Aquiles: Lo lamento mucho. Sin embargo, tengo la impresión de que es mucho lo que he aprendido escribiendo esa piececita, y estoy convencido de que ahora puedo componer música mucho mejor que si no hubiera hecho ese ensayo. Y si usted ejecutara una nueva composición mía, tengo grandes esperanzas de que su juicio sería más alentador con respecto a mi sensibilidad musical.

Cangrejo: Bueno, está bien. Escríbala, le daré una oportunidad.

(*Aquiles anota:*

$$\forall a{:}\forall b{:}\langle (a\cdot a)=(SS0\cdot(b\cdot b))\supset a=0\rangle$$

El Cangrejo ejecuta.)

Tenía razón, Aquiles. Parece que ha recuperado usted por completo su agudeza musical. ¡Esto es una joyita! ¿Cómo la compuso? Nunca había escuchado nada así: se ajusta en un todo a las reglas de la armonía y, no obstante, contiene cierto ¿cómo podría decir? atractivo irracional.

No puedo pescarlo con precisión, pero justamente por eso es que me gusta.

Aquiles: Me conmueve la idea de que le agrade.

Tortuga: ¿Ha pensado en darle nombre, Aquiles? ¿Tal vez se podría llamar a su pieza "La Canción de Pitágoras"? Usted sabe que Pitágoras y sus discípulos estuvieron entre los primeros que estudiaron los sonidos musicales.

Aquiles: Así es. Sí, sería un buen título.

Cangrejo: ¿No fue Pitágoras quien descubrió que la razón entre dos cuadrados nunca puede ser igual a 2?

Tortuga: Creo que está usted acertado. Se lo consideró, por aquella época, un descubrimiento siniestro, pues nadie había hallado, todavía, que existen números —como la raíz cuadrada de 2— que no son razones entre enteros. Así, este descrubrimiento perturbó profundamente a los pitagóricos, porque presintieron que revelaba un insospechado y grotesco defecto en el interior del abstracto mundo de los números. Así y todo, ignoro cuál es la relación de esto con el precio del té en China.

Aquiles: Hablando de té, ¿no es precisamente la casa de té lo que tenemos ante nosotros?

Tortuga: Sí, así es, correcto. Llegaremos allí dentro de unos pocos minutos.

Aquiles: Mmmm . . . justo el tiempo suficiente para que yo pueda silbar la melodía que el conductor del taxi silbaba esta mañana. Era así . . .

Cangrejo: ¡Un momentito, por favor! Sacaré una hoja de papel de mi estuche para poner por escrito su melodía. (*Rebusca en su estuche y encuentra una hoja en blanco.*) Adelante, estoy listo.

(*Aquiles silba una melodía bastante larga, y el Cangrejo se afana por seguirlo.*)

¿Podría volver a silbar los últimos compases?

Aquiles: Cómo no.

(*Luego de unas pocas repeticiones más, la tarea se completa, el Cangrejo exhibe orgullosamente su transcripción:*

$$
\begin{gathered}
\langle((SSSSS0\cdot SSSSS0)+(SSSSS0\cdot SSSSS0))=((SSSSSSS0\cdot SSSSSSS0)\\
+(S0\cdot S0))\\
\wedge\sim\exists b{:}\langle\exists c{:}(Sc+b)=((SSSSSSS0\cdot SSSSSSS0)+(SO\cdot S0))\\
\wedge\exists d{:}\exists d'{:}\exists e{:}\exists e'{:}\\
\langle\sim\langle d=e\vee d=e'\rangle\wedge\langle n=((Sd\cdot Sd)+(Sd'\cdot Sd'))\wedge b=((Se\cdot Se)+(Se'\cdot Se'))\rangle\rangle\rangle\rangle
\end{gathered}
$$

El Cangrejo, a su vez, la ejecuta en su flauta.)

Tortuga: Es una música singular, ¿verdad? Suena, diría yo, un poquito como música de la India.

Cangrejo: Oh, creo que es demasiado simple para provenir de la India. Claro que, por supuesto, sé muy poco acerca de estas cosas.

Tortuga: Bueno, ya estamos en la casa de té. ¿Nos ubicamos aquí fuera, en la galería?

Cangrejo: Si no tiene usted inconveniente, preferiría que entráramos; me parece que ya he tomado suficiente sol por hoy.

(*Ingresan a la casa de té y se sientan en torno a una hermosa mesa de madera; ordenan té y pasteles, y de inmediato es puesto a su disposición un carrito lleno de pastas de delicioso aspecto; cada uno elige sus predilectas.*)

Aquiles: Le diré, señor Cangrejo, que me encantaría conocer su opinión a propósito de otra pieza que acabo de componer mentalmente.

Cangrejo: ¿Puedo verla? Escríbala en esta servilleta.

(*Aquiles escribe:*

$$\forall a:\exists b:\exists c:<\sim\exists d:\exists e:<(SSd\cdot SSe)=b\vee(SSd\cdot SSe)=c>\wedge(a+a)=(b+c)>$$

El Cangrejo y la Tortuga la estudian, muy interesados.)

Tortuga: ¿Es otra composición bella, en su opinión, señor Cangrejo?

Cangrejo: Bueno, uuh . . . (*Se mueve en su asiento, y se lo ve un tanto incómodo.*)

Aquiles: ¿Cuál es el problema? ¿Es difícil decidir si esta pieza es tan bella como las otras?

Cangrejo: Ehmm . . . No, no es eso . . . para nada. Es sólo que, bueno . . . Realmente, me es necesario ESCUCHAR una composición antes de decir hasta qué punto me gusta.

Aquiles: ¡Adelante, entonces, tóquela! Me muero por saber si le encuentra belleza o no.

Cangrejo: Sin duda, me haría dichoso ejecutarla, nada más que . . .

Aquiles: ¿No puede ejecutarla? ¿Qué sucede? ¿Qué cosa se lo impide?

Tortuga: Debe usted entender, Aquiles, que sería sumamente descortés y molesto para la clientela y el personal de este fino establecimiento el hecho de que el señor Cangrejo se ponga a satisfacer su requerimiento de que toque la flauta ahora mismo.

Cangrejo (*mostrándose súbitamente tranquilizado*): Exactamente, no tenemos ningún derecho a imponer nuestra música a los demás.

Aquiles (*con abatimiento*): ¡Qué calamidad! ¡Cuánto pasará hasta saber qué piensa el señor Cangrejo de mi obra!

Cangrejo: ¡Ay! ¡Eso sí que fue un milagro!

Aquiles: ¿A qué se refiere?

Cangrejo: Oh, nada, sólo que aquel camarero tropezó con uno de sus compañeros, y por poco no volcó una tetera repleta sobre el regazo de una señora. Faltó un pelo, diría yo. ¿Qué diría usted, señora Tortuga?

Tortuga: Que el té es excelente. ¿Está de acuerdo, Aquiles?

Aquiles: Oh, sí, un té de primera, ciertamente.

Cangrejo: Definitivamente. Bueno, no sé qué planes tienen ustedes, pero tengo que irme ya, pues el camino a mi casa es largo y escarpado, hacia el otro lado de la colina.

Aquiles: Me parece que usted está ejercitando una argucia para escapar, por temor a que le caiga una tetera en la cabeza.

Cangrejo: Confieso que es posible, Aquiles.

Aquiles: Ya veo. Lo tendré presente.

Cangrejo: He pasado una tarde inmejorable, Aquiles, y sinceramente espero que nos reunamos otro día a intercambiar composiciones musicales.

Aquiles: Aguardo con ansiedad la llegada de esa ocasión, señor Cangrejo. Adiós.

Tortuga: Adiós, señor Cangrejo.

(*Y el Cangrejo se encamina hacia su lado de la colina.*)

Aquiles: Sí que es un tipo brillante . . . A mi criterio, es por lo menos el cuádruple de inteligente que cualquier cangrejo vivo. O, tal vez, el quíntuple . . .

Tortuga: Sí, ya se lo escuché al principio, y probablemente lo siga usted repitiendo perpetuamente: frases sin final.

CAPITULO XVII

Church, Turing, Tarski y otros

Sistemas formales e informales

HEMOS LLEGADO AL momento en que podemos desarrollar una de las tesis principales de este libro: la de que todos los aspectos del pensamiento pueden ser vistos como una descripción de alto nivel de un sistema que, en un bajo nivel, es gobernado por reglas simples e, inclusive, formales. El "sistema", por supuesto, es el cerebro, a menos que se esté hablando de procesos de pensamiento circulantes en otro medio, como por ejemplo los circuitos de una computadora. La imagen es la de un sistema formal subyacente a un "sistema informal"; un sistema que, digamos, elabore juegos de palabras, descubra patrones numéricos, olvide nombres, cometa disparates imperdonables jugando al ajedrez, etc. Esta es la visión desde el exterior: su manifiesto e informal nivel software. En contraste, el sistema tiene un oculto y formal nivel hardware (o "sustrato"), el cual consiste en un mecanismo formidablemente complejo que efectúa las transiciones entre estado y estado, con arreglo a reglas definidas, físicamente incorporadas a aquél, y con arreglo también a la entrada de las señales con las que tropieza.

No hace falta recordar que semejante manera de considerar el cerebro tiene muchas implicaciones filosóficas, y de otra índole. Trataré de detallar algunas de ellas en este capítulo. Entre otras cosas, esta perspectiva *parece* dar por sentado que, en el fondo, el cerebro es una suerte de objeto "matemático". En rigor, ésa es, en el mejor de los casos, una manera muy inadecuada de analizar el cerebro, porque, aun cuando éste fuese, en un sentido técnico y abstracto, una suerte de sistema formal, seguiría siendo cierto que los matemáticos operan exclusivamente con sistemas simples y precisos, donde todo es definido de modo extremadamente claro; el cerebro, en tanto, está a enorme distancia de una situación así, con sus diez mil millones, o todavía más, de neuronas semindependientes, conectadas cuasi caprichosamente entre sí. De modo, pues, que los matemáticos no tomarían como objeto de estudio las redes de un cerebro real. Y *si* la "matemática" es definida como aquello que los matemáticos disfrutan ejercitando, las propiedades del cerebro no son entonces matemáticas.

La única posibilidad de comprender un sistema de la complejidad del cerebro radica en una articulación en bloques que diferencie niveles más y más altos, con la consecuencia de ver sacrificada cierta dosis de precisión en cada paso. Lo que emerge en el nivel superior es el "sistema informal", el cual obedece a incontables reglas de semejante complejidad, que aún no contamos con un léxico para pensar en ello. Esto es lo que la investigación en materia de inteligencias artificiales espera descubrir, y se trata de algo cuyo tono difiere por completo de la investigación matemática.

Con todo, existe una conexión, laxa, con la matemática: a menudo, los investigadores de IA (inteligencias artificiales) están dotados de una sólida formación matemática, y los matemáticos pueden sentirse intrigados por el funcionamiento de su propio cerebro. El pasaje que sigue, extraído de *Adventures of a Mathematician*, obra autobiográfica de Stanislaw Ulam, ilustra este rasgo:

> Creo que se podría avanzar en la deducción . . . de la naturaleza de las asociaciones, mediante computadoras que aporten los medios de experimentación. Un estudio así abarcaría una gradación de nociones, símbolos, clases de símbolos, clases de clases, y así siguiendo, de un modo similar al utilizado para investigar la complejidad de las estructuras matemáticas o físicas.
>
> Tiene que haber un truco en la sucesión del pensamiento, una fórmula recursiva. Un grupo de neuronas comienza a funcionar automáticamente, a veces sin incitación externa. Es un tipo de proceso iterativo, con un patrón en formación. Transita por todo el cerebro, y la forma en que aparece tiene que estar basada en la memoria de patrones similares.[1]

La intuición y el magnífico Cangrejo

Como se acaba de señalar, comúnmente se hace referencia a las Inteligencias Artificiales mediante las siglas "IA". Con frecuencia, cuando trato de explicar qué quiere decir esta expresión, digo que las letras "IA" podrían representar muy bien, asimismo, a "Intuición Artificial" o, inclusive, a "Imaginación Artificial". El objetivo de IA es averiguar qué sucede cuando la mente, silenciosa e invisiblemente, elige, de entre una miríada de alternativas, la que tiene mayor sentido para ser aplicada a una situación sumamente compleja. En muchas circunstancias de la vida real, el razonamiento deductivo es inadecuado, no porque brinde respuestas *erróneas*, sino porque pueden ser formulados muchísimos enunciados correctos pero *no pertinentes*; son demasiadas las cosas que se deben tomar en consideración simultáneamente, para que baste el solo razonamiento. Veamos este minidiálogo:

"El otro día leí en el periódico que . . ."

"Oh, ¿estuvo usted leyendo? Se sigue de ello que usted tiene ojos; o,

[1] Stanislaw Ulam, *Adventures of a Mathematician*, p. 13.

por lo menos, *un* ojo; o, más bien, que usted tenía por lo menos un ojo *entonces*."

Se requiere —"¿qué tiene importancia aquí, y qué cosa no?"— un sentido del juicio y, ligado a éste, un sentido de la simplicidad y un sentido de la belleza. ¿De dónde provienen estas intuiciones? ¿Cómo pueden surgir de un sistema formal subyacente?

En el *Magnifican . . . grejo* son puestas de manifiesto algunas facultades inusuales de la mente del Cangrejo. Su propia versión de las mismas consiste en la simple mención de que escucha una música y puede distinguir entre *belleza* y *no belleza*. (Por lo visto, él cree que existe al respecto una nítida línea divisoria.) Pero Aquiles descubre otro medio para describir las aptitudes del Cangrejo: éste discrimina enunciados de teoría de los números en dos categorías, *verdaderos y falsos*. Ahora bien, el Cangrejo sostiene que si acertó a proceder así ha sido por mero accidente pues, según su propia confesión, es incompetente en materia de matemática. Lo que principalmente crea la perplejidad de Aquiles es que ese logro del Cangrejo, sin embargo, parece constituir una violación flagrante de una célebre conclusión metamatemática que a Aquiles le es familiar:

TEOREMA DE CHURCH: No hay método infalible que discrimine entre teoremas y no teoremas de TNT.

Esto fue demostrado en 1936 por el lógico estadunidense Alonzo Church. Se le relaciona estrechamente lo que yo llamo el

TEOREMA TARSKI-CHURCH-TURING: No hay método infalible que discrimine entre enunciados verdaderos y falsos de teoría de los números.

La Tesis Church-Turing

Para entender mejor el Teorema de Church y el Teorema Tarski-Church-Turing, tendríamos que comenzar por referirnos a una de las ideas sobre las cuales se basan; y ésta es la *Tesis Church-Turing* (llamada muchas veces "Tesis de Church"): la Tesis Church-Turing es, indudablemente, uno de los elementos conceptuales de mayor importancia en la filosofía de la matemática, del cerebro y del pensamiento.

En verdad, la Tesis Church-Turing, igual que el té, puede ser preparada de modo que salga más o menos fuerte, dentro de una variedad de posibilidades. Así es que la presentaré a través de diversas versiones, e iremos analizando el significado de cada una.

La primera versión suena muy inocente; en realidad, poco menos que obtusa:

TESIS CHURCH-TURING, VERSION TAUTOLOGICA: Los problemas matemáticos pueden ser resueltos únicamente mediante el ejercicio de la matemática.

Por supuesto, la significación, aquí, reposa en la significación de los términos constituyentes. Al decir "problemas matemáticos" aludo al problema de decidir si cierto número posee o no posee una propiedad aritmética determinada. Ocurre que, gracias a la numeración Gödel y a los recursos de codificación asociados con la misma, prácticamente ningún problema de ninguna rama de la matemática puede ser formulado de esta forma; de modo, pues, que "problemas matemáticos" conserva su significación ordinaria. ¿Qué pasa con "el ejercicio de la matemática"? Cuando uno intenta resolver si un número tiene cierta propiedad, parece haber solamente un reducido número de operaciones por emplear, combinadamente, repetidas veces: suma, multiplicación, verificación de igualdad o desigualdad. O sea que los bucles compuestos por tales operaciones, parece, son la única herramienta que permite explorar el mundo de los números. Repárese en la palabra "parece": es la palabra crítica por la que se preocupa la Tesis Church-Turing. Podemos hacer una revisión:

TESIS CHURCH-TURING, VERSION HABITUAL: Supongamos que existe un método seguido por un ser consciente para distribuir los números en dos clases. Supongamos, asimismo, que este método produce siempre una respuesta dentro de un lapso finito, y que siempre da la misma respuesta con respecto a un número determinado. *Luego*: Existe algún programa FlooP finalizable (es decir, alguna función recursiva general) que proporciona exactamente las mismas respuestas que proporciona el método del ser consciente.

La hipótesis central, para darle mayor claridad a esto, es que todo proceso mental que divida los números en dos categorías puede ser descripto bajo la forma de un programa FlooP. La convicción intuitiva es la de que no hay más herramientas que las de FlooP y que no hay otro procedimiento para usarlas que el de la repetición ilimitada (cosa permitida por FlooP). La Tesis Church-Turing no es un hecho demostrable en el sentido en que lo es un teorema matemático: es una hipótesis acerca de los procesos que utiliza el cerebro humano.

La versión procesos públicos

Hay quienes pueden pensar que esta versión se extralimita; sus objeciones rezarían así: "Alguien como el Cangrejo puede existir —alguien con una penetración matemática casi mística, pero que es tan ignorante de sus ap-

titudes personales como cualquier otro que no las tenga— y quizá los mecanismos mentales de esa persona realizan operaciones que no tienen equivalente en FlooP". La idea, aquí, es que tal vez tenemos un potencial subconsciente para hacer cosas que trascienden los procesos conscientes: cosas inexpresables, en alguna medida, en los términos de las operaciones elementales de FlooP. Para estos impugnadores, daremos una versión más débil de la Tesis, la cual distingue entre procesos mentales públicos y privados:

TESIS CHURCH-TURING, VERSION PROCESOS PUBLICOS: Supongamos que existe un método seguido por un ser consciente para distribuir los números en dos clases. Supongamos, asimismo, que este método produce siempre una respuesta dentro de un lapso finito, y que siempre da la misma respuesta con respecto a un número determinado. *Requisito*: Supongamos también que este método puede ser comunicado fidedignamente por un ser consciente a otro, por medio del lenguaje. *Luego*: Existe algún programa FlooP finalizable (es decir, alguna función recursiva general) que proporciona exactamente las mismas respuestas que proporciona el método del ser consciente.

Esto nos dice que los métodos públicos están sujetos a "FlooPificación", pero no alude para nada a los métodos privados. No dice que éstos sean inFlooPables, pero cuando menos deja la puerta abierta.

Srinivasa Ramanuyan

Como una evidencia contra cualquier versión más exigente de la Tesis Church-Turing, consideremos el caso del famoso matemático indio del primer cuarto de nuestro siglo, Srinivasa Ramanuyan (1887-1920). Ramanuyan (figura 105) fue originario de Tamilnadur, en el extremo sur de la India, y estudió algo de matemática en la escuela media. Un día, alguien que había advertido el talento matemático de Ramanuyan le obsequió un manual de análisis, un tanto pasado de moda, que Ramanuyan devoró (figuradamente hablando). Comenzó entonces a hacer sus propias incursiones en el mundo del análisis y, cuando llegó a la edad de veintitrés años, ya había obtenido una cantidad de descubrimientos que él consideraba valiosos. No conoció a nadie con quien compartir sus intereses, pero de alguna manera supo de la existencia de un profesor de matemática, en la remota Inglaterra, llamado G. H. Hardy. Ramanuyan reunió sus mejores exposiciones en un paquete y se las remitió al desprevenido Hardy, junto con una carta que sus amigos le ayudaron a redactar en inglés. Siguen algunos fragmentos de la descripción que hizo Hardy de su reacción ante el hato de papeles recibidos:



Figura 105. Srinivasa Ramanuyan, y una de sus curiosas melodías indias.

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\cfrac{e^{-6\pi\sqrt{5}}}{1+\ddots}}}} = \left(\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{3/4}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2}-1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)e^{2\pi/\sqrt{5}}$$

> . . . Pronto se hace obvio que Ramanuyan tiene que poseer teoremas mucho más generalizadores y que los ha estado elaborando sin anunciarlo . . . [Algunas fórmulas] me dejaron completamente anonadado; jamás había visto antes, en absoluto, nada así. Una simple mirada es suficiente para mostrar que únicamente pueden haber sido enunciadas por un matemático del más alto nivel. Por fuerza han de ser verdaderas porque, de no ser así, es imposible que nadie haya tenido la imaginación necesaria para inventarlas. Por último . . . sin duda el autor es totalmente honesto, porque es más frecuente la aparición de grandes matemáticos que la de plagiarios o embaucadores de habilidad tan pasmosa.[2]

Como resultado de esto, Ramanuyan se trasladó a Inglaterra, en 1913, con el patrocinio de Hardy, a lo cual siguió un período de intensa colaboración, que terminó con el fallecimiento prematuro de Ramanuyan, a los treinta y tres años, a causa de la tuberculosis.

Ramanuyan tuvo varias características extraordinarias, que lo destacaron de la mayoría de los matemáticos. Una fue su falta de rigor. Muy a menudo afirmaba una conclusión que, según insistía, había llegado a él desde una vaga fuente intuitiva, alejada del dominio de la indagación

[2] James R. Newman, "Srinivasa Ramanujan", en James R. Newman ed., *The World of Mathematics* (New York: Simon and Schuster, 1956), Vol. 1, pp. 372-3.

consciente. Por cierto, muchas veces dijo que la diosa Namagiri lo inspiraba en sueños. Esto ocurrió reiteradamente y, lo que creó los principales equívocos —quizá rodeados por cierta cualidad mística—, fue que muchos de estos "teoremas-intuiciones" eran *erróneos*. Ahora bien, a veces un hecho del que se podría pensar que, aun cuando no sea provechoso, hace que la gente crédula se torne algo más escéptica, tiene en realidad un efecto inverso: produce un impacto en algún punto vulnerable de aquélla, presionándola con la insinuación de que hay una faceta irracional en la naturaleza humana. Tal fue el caso con los desbarros de Ramanuyan: muchas personas educadas, ansiosas por depositar su confianza en algo así, consideraron que las facultades intuitivas de Ramanuyan eran evidencia de una penetración mística en la Verdad, y que su falibilidad contribuía, si contribuía a alguna cosa, a fortalecer esa fe, antes que a debilitarla.

Naturalmente, no fue en detrimento de ello el hecho de que Ramanuyan procediera de una de las regiones más atrasadas de la India, donde se venía practicando el faquirismo y otros ritos misteriosos desde milenios atrás, prácticas cuya extensión, probablemente, siempre fue mayor que la de la enseñanza de matemática superior. Y sus esporádicos relámpagos erróneos de iluminación, en lugar de mostrar a la gente que él no era sino un ser humano, inspiraron la idea de que las equivocaciones de Ramanuyan, paradójicamente, estaban dotadas de cierto género de "veracidad más profunda": una veracidad "oriental", capaz, tal vez, de alcanzar verdades inaccesibles a la mente occidental. ¡Qué posibilidad tan deliciosa, casi irresistible! El propio Hardy —quien fuera el primero en negar que Ramanuyan tuviese ninguna clase de poderes místicos— escribió en una oportunidad, acerca de uno de los fracasos de este último: "Y sin embargo no estoy seguro de que, de alguna manera, su fracaso no es más asombroso que ninguno de sus éxitos".

El otro rasgo sobresaliente de la personalidad matemática de Ramanuyan fue su "amistad con los enteros", como lo expresó su colega Littlewood. Esta es una característica compartida, en diversos grados, por un número apreciable de matemáticos, pero que en Ramanuyan se presentaba en medida extrema. Hay un par de anécdotas que ilustran esta especial inclinación. La primera de ellas es relatada por Hardy:

> Recuerdo una visita que le hice, cuando se atendía de su enfermedad en Putney. Yo había tomado un taxi cuyo número era el 1729, y le comenté que esa cifra me parecía bastante insulsa, y que esperaba que no implicase un augurio desfavorable. "No", replicó, "es un número muy interesante; es el menor número expresable como suma de dos cubos, de dos maneras diferentes". Le pregunté, naturalmente, si conocía la solución del problema correspondiente, relativo a las cuartas potencias; luego de pensar un momento, me respondió que no podía ver ningún ejemplo palpable y que pensaba que el primero de esos números debía ser muy grande.[3]

[3] *Ibid.*, p. 375.

Resulta que la respuesta relativa a las cuartas potencias es:

$$635318657 = 134^4 + 133^4 = 158^4 + 59^4$$

El lector puede encontrar atractivo plantearse el problema análogo con respecto a los cuadrados, el cual es mucho más sencillo.

Realmente, es interesante considerar por qué razón Hardy brincó de inmediato a las cuartas potencias; al fin y al cabo, hay varias otras generalizaciones razonablemente naturales de la ecuación

$$u^3 + v^3 = x^3 + y^3$$

a lo largo de diferentes dimensiones. Por ejemplo, existe la cuestión referida a la representación de un número en tres formas diferentes como la suma de dos cubos:

$$r^3 + s^3 = u^3 + v^3 = x^3 + y^3.$$

O bien, se pueden emplear tres cubos diferentes:

$$u^3 + v^3 + w^3 = x^3 + y^3 + z^3.$$

O, inclusive, se puede hacer una Gran Generalización en todas las dimensiones a la vez:

$$r^4 + s^4 + t^4 = u^4 + v^4 + w^4 = x^4 + y^4 + z^4$$

Hay un sentido, no obstante, en el cual la generalización de Hardy es "la de aspecto más matemático". ¿Podrá ser programado alguna vez este sentido estético de la matemática?

La otra anécdota aparece en una biografía de Ramanuyan, obra de su compatriota S. R. Ranganathan, bajo el título "La iluminación de Ramanuyan". Es relatada por el Dr. P. C. Mahalanobis, quien fuera compañero de Ramanuyan en Cambridge, y también de procedencia india.

> En otra ocasión, fui a su cuarto a comer en su compañía. La Primera Guerra Mundial había estallado poco tiempo atrás. Llevaba conmigo un ejemplar del *Strand Magazine*, que por entonces acostumbraba a publicar una serie de acertijos para que los resolviese el lector. Ramanuyan estaba ocupado en revolver el contenido de una cacerola puesta sobre el fuego para nuestro almuerzo. Yo, sentado a la mesa, hojeaba las páginas de la revista; estaba interesado en un problema que involucraba una relación entre dos números; ya he olvidado los detalles, pero recuerdo el tipo de problema que era: dos oficiales británicos habían sido ubicados, en París, en dos casas diferentes de una larga calle; los números de las puertas estaban relacionados de un modo especial y el enigma consistía en descubrir qué numeros eran ésos. No se trataba de algo difícil, en absoluto; mediante el método del ensayo y el error, hallé la solución en pocos minutos.

MAHALANOBIS (festivamente): Acá hay un problema para ti.
RAMANUYAN: ¿Qué problema? Dime. (Seguía revolviendo.)
Le leí el problema.
RAMANUYAN: Por favor, toma nota de la solución. (Dictó una fracción continua.)
El primer término coincidía con la solución que yo había obtenido. Cada término *sucesivo representaba soluciones sucesivas para el mismo tipo de relación entre dos* números, con una cantidad de casas de la misma calle en crecimiento indefinido. Yo estaba estupefacto.
MAHALANOBIS: ¿Obtuviste la respuesta por iluminación?
RAMANUYAN: En cuanto escuché el problema se me hizo claro que la solución obvia era una fracción continua; pensé entonces, "¿cuál fracción continua?", y la respuesta apareció en mi mente. Así, sencillamente.[4]

En su calidad de colaborador más próximo de Ramanuyan, Hardy fue interrogado a menudo, luego de la muerte de aquél, sobre si en el estilo de pensamiento del matemático indio hubo elementos de ocultismo o de alguna otra variante esotérica. He aquí uno de sus comentarios al respecto:

Muchas veces se me ha preguntado si Ramanuyan tenía algún secreto especial, si sus métodos eran de un género distinto al de otros matemáticos, si había algo realmente anormal en la modalidad de su pensamiento. No puedo responder con total certidumbre a estas preguntas, pero yo no creo nada de eso. Lo que yo creo es que todos los matemáticos, en el fondo, piensan mediante las mismas modalidades, y que Ramanuyan no fue una excepción al respecto.[5]

En esencia, aquí Hardy enunció su propia versión de la Tesis Church-Turing. Parafraseo:

TESIS CHURCH-TURING, VERSION DE HARDY: En el fondo, todos los matemáticos son isomórficos.

Esto no hace equivalentes el potencial matemático de los matemáticos y el de las funciones recursivas generales; para eso, todo lo que se necesita es mostrar que la capacidad mental de *algún* matemático no es más general que las funciones recursivas. Luego, si se da crédito a la Versión de Hardy, ya se sabe eso con respecto a *todos* los matemáticos.

Después, Hardy compara a Ramanuyan con la prodigiosidad de las calculadoras:

Su memoria y sus aptitudes para el cálculo eran muy inusuales, pero no podrían ser consideradas "fuera de lo normal". Si tenía que multiplicar dos números extensos, lo hacía en la forma ordinaria; podía multiplicar con una rapidez y una exactitud desacostumbradas, pero no con mayor rapidez y exactitud que cualquier matemático dotado de rapidez natural y habituado a hacer cómputos.[6]

[4] S. R. Ranganathan, *Ramanujan*, pp. 81-2.
[5] Newman, p. 375.
[6] *Ibid.*, p. 375.

Hardy señala los atributos intelectuales salientes que él percibía en Ramanuyan:

A su memoria, su paciencia y sus facultades de cálculo, sumaba una *capacidad de generalización, un sentimiento de la forma y una aptitud para la rápida modificación de sus hipótesis*, que provocaban muchas veces asombro, e hicieron de él, en su campo, alguien inigualable en su época.[7]

Las partes del pasaje precedente que he subrayado, según mi opinión, constituyen una caracterización excelente de algunos de los rasgos más sutiles de la inteligencia en general. Finalmente, Hardy concluye un tanto nostálgicamente:

[Su obra] no tiene la simplicidad y la inevitabilidad de las obras verdaderamente mayores; hubiera sido más grande de haber sido menos extraña. Tiene una virtud que nadie puede negarle; una profunda e invicta originalidad. Probablemente hubiera sido más importante como matemático si, en su juventud, hubiese recibido un poco más de comprensión y de orientación: hubiera hecho más aportes originales y, sin duda, de mayor significación. Por otro lado, así hubiera sido menos un Ramanuyan, y más un profesor europeo, y en tal caso quizá la pérdida hubiera sido superior a la ganancia.[8]

La manera romántica en que Hardy se expresa acerca de Ramanuyan revela la gran estima que sentía por él.

"Idiots savants"

Hay otra clase de gente cuyas habilidades matemáticas parecen desafiar las explicaciones racionales: los llamados así "idiots savants", quienes pueden efectuar, mentalmente (o como sea que lo hacen), complejos cálculos a la velocidad del rayo. Johann Martin Zacharias Dase, quien vivió entre 1824 y 1861, y fue contratado por varios gobiernos europeos para realizar cómputos, es un ejemplo destacado. No sólo podía multiplicar dos números de 100 dígitos cada uno en su cabeza, sino que también tenía un misterioso sentido de la cantidad; es decir, él podía "saber", sin contar, cuántas ovejas había en un campo, o palabras en una oración, etc., hasta el límite de, aproximadamente, 30, en tanto que la mayoría de nosotros posee ese sentido pero sólo hasta el límite de, aproximadamente, 6. Al margen, Dase no era un idiota.

No detallaré la gran cantidad de fascinantes casos documentados de "calculistas relámpago", pues ello se aparta de mis propósitos. Pero creo que es importante disipar la idea de que aquéllos emplean algún método

[7] *Ibid.*, p. 375-6.
[8] *Ibid.*, p. 376.

misterioso e inanalizable. Aunque es frecuente el caso de que esas aptitudes brujeriles para el cálculo superen con mucho la aptitud de sus sujetos para explicar sus resultados, alguna vez aparece una persona poseedora de otros dones intelectuales, a los que suma el tipo de habilidad espectacular con los números de que estamos hablando. La introspección practicada por estas personas, junto con una amplia investigación psicológica, han permitido establecer que no tiene lugar ninguna cosa de tipo esotérico durante los procesos propios de los calculistas relámpago, sino que, simplemente, sus mentes vuelan a través de los pasos intermedios con la misma autoconfianza de un atleta que ejecuta un movimiento complicado en forma veloz y graciosa. No obtienen sus respuestas gracias a alguna suerte de resplandor de iluminación (pese a que, subjetivamente, algunas de ellas puedan sentirlo así) sino —lo mismo que el resto de los mortales— gracias al cálculo secuencial, lo cual equivale a decir, gracias a un proceso de FlooPeamiento (o de BlooPeamiento).

Caber decir que una de las pruebas más obvias de que no hay allí ninguna "línea directa con Dios" la brinda el hecho de que, cuando los números abarcados se hacen mayores, las respuestas se producen con mayor lentitud. Es de presumir que, si Dios o un "oráculo" estuviesen proporcionando las soluciones, no tendría por qué haber ninguna demora frente a números más extensos. Probablemente se pueda elaborar un prolijo diseño que muestre cómo varían los lapsos de respuesta de un calculista relámpago según las dimensiones de los números comprendidos, y de las operaciones involucradas, y a partir de allí deducir algunos rasgos de los algoritmos empleados.

La versión isomorfismo de la Tesis Church-Turing

Esto, finalmente, nos suministra una versión habitual, fortalecida, de la Tesis Church-Turing:

TESIS CHURCH-TURING, VERSION ISOMORFISMO: Supongamos que existe un método seguido por un ser consciente para distribuir los números en dos clases. Supongamos, asimismo, que este método produce siempre una respuesta dentro de un lapso finito, y que siempre da la misma respuesta con respecto a un número determinado. *Luego*: Existe algún programa FlooP finalizable (es decir, alguna función recursiva general) que proporciona exactamente las mismas respuestas que proporciona el método del ser consciente. *Además*: El proceso mental y el programa FlooP son isomórficos, en el sentido de que, en algún nivel, hay una correspondencia entre los pasos que son cumplidos en la computadora y en el cerebro.

Adviértase que no sólo ha sido reforzada la conclusión sino que, asimis-

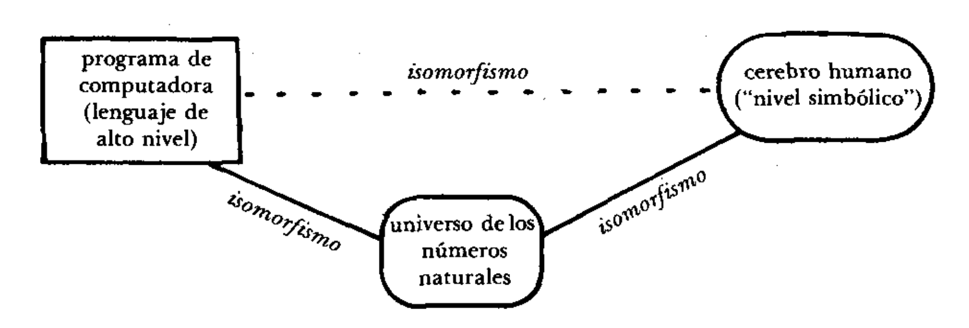
mo, ha sido eliminado el requisito de comunicabilidad de la pusilánime Versión Procesos Públicos. Solamente hablaremos de esta audaz versión, en adelante.

En resumen, esta versión afirma que, cuando hacemos cualquier cómputo, nuestra actividad mental puede ser reflejada isomórficamente por algún programa FlooP. Aclaremos muy bien que esto no significa que el cerebro esté procesando un programa FlooP, formulado en el lenguaje FlooP completo con sus COMIENZO, FIN, INTERRUMPIR, y todo lo demás: en absoluto. Sólo se trata de que los pasos son seguidos en el mismo orden que podrían haber seguido en un programa FlooP, y que la estructura lógica del cálculo puede ser reflejada en un programa FlooP.

Ahora bien, para que esta idea adquiera sentido, tendremos que hacer algunas distinciones de niveles tanto en la computadora como en el cerebro, pues de otro modo podría ser interpretada como un cabal sinsentido. Presumiblemente, los pasos mediante los cuales avanza el cálculo dentro de la cabeza de una persona están ubicados en el nivel más alto, y se apoyan en niveles más bajos, y en último término en el hardware. Entonces, si hablamos de isomorfismo, ello quiere decir que, tácitamente, hemos supuesto que el nivel más alto puede ser aislado, permitiéndonos así analizar qué sucede allí, independientemente de los restantes niveles, y luego hacer corresponder ese nivel superior con FlooP. Más exactamente, la suposición consiste en que hay entidades software que cumplen las funciones de diversas construcciones matemáticas, y que son activadas en formas que pueden ser reflejadas con exactitud dentro de FlooP (véase la figura 106). Lo que hace posible la existencia de estas entidades software es toda la infraestructura detallada en los Capítulos XI y XII, como también en el *Preludio y Fuga Hormiguesca*. No se sugiere ninguna actividad isomórfica en los niveles inferiores del cerebro y de la computadora (esto es, neuronas y bits).

El espíritu de la Versión Isomorfismo, si no su letra, se hace comprensible si decimos que, lo que hace un *idiot savant* cuando calcula, pongamos

Figura 106. El comportamiento de los números naturales puede ser reflejado por un cerebro humano o por los programas de una computadora. Ambas representaciones pueden hacerse corresponder entre sí en un nivel adecuadamente abstracto.



por caso, el logaritmo de π, es isomórfico de lo que hace una minicalculadora cuando calcula la misma cosa, con la aclaración de que el isomorfismo se circunscribe al nivel de los pasos aritméticos, y *no* se proyecta a los niveles más bajos de, para la primera situación, las neuronas y, en la segunda, de los circuitos integrados. (Por supuesto, se pueden seguir diferentes rutas en cualquier clase de cálculo, pero ha de presumirse que el calculista mecánico, si no el humano, puede ser instruido para que calcule la respuesta con arreglo a una modalidad determinada.)

La representación del conocimiento relativo al mundo real

Ahora bien, esto parece muy aceptable cuando el dominio al que se refiere es el de la teoría de los números, pues allí el universo entero donde suceden las cosas es muy reducido y claro. Sus fronteras, sus moradores y sus reglas están bien definidos, como en un laberinto rigurosamente diseñado. Un mundo así es sumamente menos complicado que el ilimitado y mal definido mundo que habitamos. Un problema de teoría de los números, luego de enunciado, está completo en y por sí; un problema del mundo real, en cambio, nunca queda confiablemente tabicado con respecto a ninguna región del mundo. Por ejemplo, la tarea de cambiar una bombilla de luz quemada puede hacer necesario el desplazamiento de un saco de desperdicios; esto, a su vez, puede causar el derramamiento inesperado de una caja de grageas, lo cual entonces obligará a barrer el piso para que el bebé no recoja y se coma alguna de las grageas diseminadas, etc., etc. Las grageas y los desperdicios y el bebé y la bombilla quemada son todos elementos con una relación muy distante entre sí, dentro del mundo; sin embargo, un hecho cotidiano los reúne estrechamente. Ni qué decir acerca de cuántas cosas más podrían incorporarse a esta conexión, con la sola ocurrencia de otras leves variantes con respecto a lo esperado. Por el contrario, frente a un problema de teoría de los números, jamás hará falta terminar analizando cosas tan heterogéneas como grageas o bebés o sacos de basura o escobillones con la finalidad de resolver el problema planteado. (Por supuesto, el conocimiento intuitivo de esos objetos puede ser una ayuda eficaz cuando se trata, inconscientemente, de elaborar imágenes mentales que contribuyan a visualizar el problema en términos geométricos: pero éste es otro problema.)

A causa de la complejidad del mundo, es difícil imaginar una minicalculadora que responda a preguntas que se le planteen mediante la presión de botones rotulados "bebé", "desperdicios", "bombilla", etc. En realidad, es en extremo complicado conseguir, hasta la fecha, que una computadora de tamaño normal y alta velocidad responda a preguntas que, para nosotros, caben en subdominios muy simples del mundo real. Podemos comparar los procesos mentales vinculados al mundo real con un árbol cuya parte visible se levanta vigorosamente desde el suelo, pero que

depende vitalmente de sus raíces invisibles, extendidas subterráneamente, las cuales le brindan estabilidad y nutrición. Las raíces simbolizan los complejos procesos que tienen lugar por debajo del nivel consciente de la mente, procesos cuyos efectos inciden sobre el modo en que pensamos, pero de los cuales no nos apercibimos. Se trata de los "patrones desencadenantes de símbolos", aludidos en los Capítulos XI y XII.

Pensar en el mundo real es algo absolutamente distinto de lo que ocurre cuando multiplicamos dos números; en este caso, todo está abierto al examen, "por sobre el suelo", por decir así. En aritmética, el nivel superior puede ser separado limpiamente e instrumentado con la misma eficacia en muy diferentes clases de hardware: máquinas sumadoras, minicalculadoras, grandes computadoras, cerebros humanos, etc. A esto se refiere la Tesis Church-Turing. Pero cuando arribamos a la comprensión del mundo real, pareciera no haber forma de separar el nivel superior y programarlo independientemente. Los patrones desencadenantes de símbolos son extraordinariamente complejos. Sin duda, hay diversos niveles a través de los cuales "se infiltran" y "brotan" los pensamientos.

Ocurre que —y esto nos remite al tema principal de los Capítulos XI y XII— la representación del mundo real en el cerebro, pese a estar enraizada, en determinado grado, en el isomorfismo, abarca ciertos elementos que no tienen equivalentes en el mundo exterior. Esto es, allí hay algo más que simples estructuras mentales representativas de "bebé", "escoba", etc. Por cierto que todos estos símbolos existen: pero sus estructuras internas son extremadamente complejas y están cerradas, en una medida considerable, a la inspección consciente. Además, sería en vano esforzarse por tender una correspondencia entre la estructura interna de un símbolo, y un rasgo específico dado del mundo real.

Procesos no separables

Por todo ello, el cerebro comienza a impresionar como un sistema formal muy singular, pues en el nivel de base —el nivel neural, allí donde operan las "reglas" y cambian los estados— no puede haber interpretación de los elementos primordiales (la excitación de las neuronas o, inclusive, acontecimientos de nivel aun inferior). Sin embargo, en el nivel superior emerge una interpretación significativa: una correspondencia entre las grandes "nubes" de actividad neural, a las cuales hemos estado llamando "símbolos", y el mundo real. Hay alguna semejanza con la construcción Gödel en el sentido de que un isomorfismo de alto nivel permite que un alto nivel de significación pueda ser articulado en cadenas; sin embargo, en la construcción Gödel, los significados de alto nivel "corren" sobre los niveles más bajos; es decir, son derivados del nivel más bajo luego de introducida la noción de numeración Gödel. No así en el cerebro, donde los hechos de nivel neural *no* están sujetos a una interpretación del tipo mundo real;

sencillamente, esos hechos no son imitadores de ninguna cosa, son el puro sustrato que da apoyo al nivel más alto, así como los transistores de una minicalculadora son el puro soporte de su actividad de representación numérica. Y lo que se deduce es que no hay forma de separar con limpieza el nivel más alto y elaborar una copia isomórfica del mismo, con destino a un programa; si tenemos que reflejar los procesos cerebrales que permite la comprensión del mundo real, *debemos* reflejar determinadas cosas que tienen lugar en el nivel más bajo: los "lenguajes del cerebro". Esto no significa, necesariamente, que se deba recorrer íntegro el camino que lleva hasta el nivel del hardware, pese a que, eventualmente, ese pueda ser el caso.

Si se desarrolla un programa cuyo objetivo sea obtener una "inteligente" (a saber, al modo humano) representación interna de lo que hay "allí", en algún punto, probablemente se presente la obligación de utilizar estructuras y procesos que escapan a cualquier interpretación directa, es decir, que no admiten una correspondencia transparente con elementos de la realidad. Estos estratos inferiores del programa podrán ser entendidos solamente en virtud de su relación catalítica con los estratos situados encima suyo, y no en función de alguna vinculación directa con el mundo exterior. (Una imagen concreta de esta situación fue propuesta por el Oso Hormiguero en la *Fuga Hormiguesca*: la "pesadilla tremendamente pesada" de ensayar la comprensión de un libro limitándose al nivel de las letras.)

Personalmente, me inclinaría por conjeturar que tal arquitectura multinivel de los sistemas que manejan conceptos se hace necesaria en el momento preciso en que los procesos que involucran imágenes y analogías pasan a ser elementos significativos del programa, en oposición a los procesos de los cuales se da por supuesto que realizan razonamientos estrictamente deductivos. Los procesos que desarrollan razonamientos deductivos pueden ser programados en, esencialmente, un solo nivel; por definición, en consecuencia, son separables. De acuerdo a mi hipótesis, entonces, los procesos de la imaginación y del pensamiento analógico requieren diversas capas de sustratos y, en consecuencia, son intrínsecamente no separables. Creo, además, que es precisamente en ese mismo punto donde la creatividad comienza a surgir, lo cual implicaría que ésta reposa, intrínsecamente, en ciertos acontecimientos "ininterpretables" de menor nivel. Las capas de sustentamiento del pensamiento analógico son, por supuesto, del máximo interés: ofreceremos algunas especulaciones sobre su naturaleza en los dos capítulos siguientes.

Artículos de fe reduccionista

Una forma de analizar la relación existente entre los niveles superiores e inferiores del cerebro es la que sigue: sería posible armar una red neural que, en un nivel local (neurona a neurona), actúe de manera indiferen-

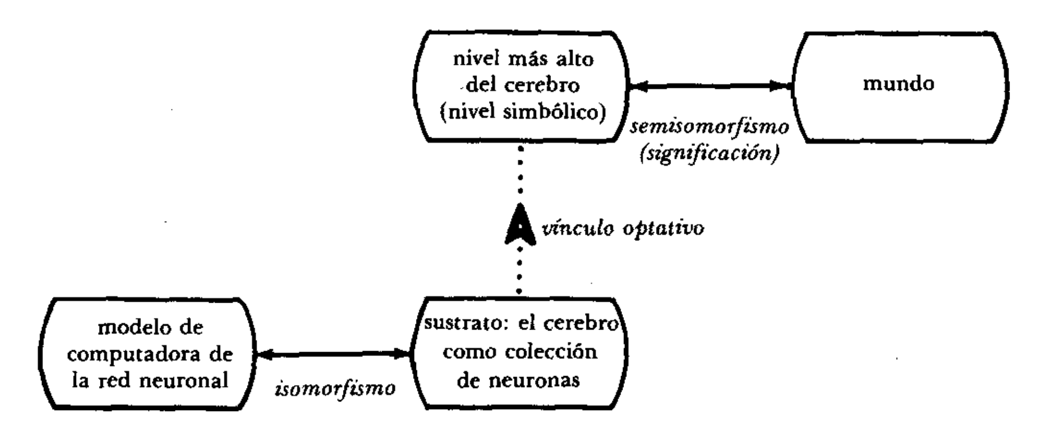
ciable con respecto a una red neural del cerebro, pero que carecería por completo de significación de nivel más alto. El hecho de que el nivel más bajo esté compuesto por neuronas en interacción no fuerza de ninguna manera la aparición de un nivel significativo más alto: del mismo modo que, en una sopa de letras, la presencia de éstas fuerza, cuando mucho, a encontrar enunciaciones significativas nadando en el plato. La significación de alto nivel es un accesorio opcional de una red neural, un accesorio que es generado como consecuencia de las presiones ambientales de la evolución.

La figura 107 es un diagrama que ilustra el hecho de que esa emergencia de un nivel de significación más alto es optativa. La flecha dirigida hacia arriba indica que puede aparecer un sustrato que carezca de un nivel mayor de significación, pero no a la recíproca: el nivel más alto debe derivarse de las propiedades de un nivel más bajo.

El diagrama incluye una indicación sobre la simulación, por una computadora, de una red neural. Esto es, en principio, practicable, por muy complicada que sea la red, a condición de que el comportamiento individual de las neuronas pueda ser descripto en términos de computación que una computadora pueda procesar; se trata de un postulado sutil que poca gente, además, cree cuestionable. Sin embargo, es una muestra de "fe reduccionista", que podría ser considerada una "versión microscópica" de la Tesis Church-Turing. La enunciamos explícitamente a continuación:

TESIS CHURCH-TURING, VERSION MICROSCOPICA: El comportamiento de los componentes de un ser vivo puede ser simulado en una computadora. Esto es, el comportamiento de cualquier componente (del cual se supone, habitualmente, que es la célula) puede ser calculado por un

Figura 107. Flotando sobre la actividad neural, el nivel simbólico del cerebro refleja al mundo. Pero la actividad neural, per se, *que puede ser simulada en una computadora, no genera pensamiento: ello requiere niveles más elevados de organización.*



programa FlooP (es decir, una función recursiva general) con el grado de exactitud que se requiera, dada una descripción lo suficientemente precisa del estado interno de los componentes y de su ámbito inmediato.

Esta versión de la Tesis Church-Turing dice que los procesos cerebrales no poseen más ingredientes místicos —aun cuando sí posean más niveles de organización— que, pongamos por caso, los procesos estomacales. Es impensable, en este momento y en esta época, la sugerencia de que digerimos nuestro alimento, no mediante procesos químicos ordinarios, sino por la intervención de una suerte de misteriosa y mágica "asimilación". Esta versión se limita a extender ese razonamiento de sentido común a los procesos cerebrales; en resumen, expresa la fe de que el cerebro opera en una forma que es, en principio, comprensible. Es una muestra de fe reduccionista.

Lo que sigue es un corolario a la Tesis CT Microscópica, consistente en esta, bastante breve, versión macroscópica:

TESIS CHURCH-TURING, VERSION REDUCCIONISTA: Todos los procesos cerebrales se derivan de un sustrato computable.

La afirmación anterior se refiere al sustento teórico más sólido que sea posible aportar en apoyo de la posibilidad eventual de dar vida a la Inteligencia Artificial.

Por supuesto, las investigaciones en Inteligencia Artificial no están dirigidas a simular redes neurales, porque se basan en otra clase de fe: la de que, probablemente, existen rasgos significativos de inteligencia que pueden ser ubicados al tope de sustratos totalmente diferentes a los propios de los cerebros orgánicos. La figura 108 muestra una suposición de relaciones entre Inteligencia Artificial, inteligencia natural y mundo real.

¿Progresos paralelos en IA y en simulación cerebral?

La idea de que, para culminar con éxito los trabajos en IA, tenga que ser simulado alguna vez el hardware propiamente dicho del cerebro es, hasta hoy al menos, digna de total rechazo por parte de los investigadores de IA. Sin embargo, uno podría preguntarse: "¿Cómo, exactamente, nos será necesario copiar el cerebro para obtener IA?" La respuesta real es que ello depende, quizá, de cuántos rasgos de la conciencia humana son los que queremos simular.

¿La capacidad de jugar bien a las damas es un indicador suficiente de inteligencia? Si es así, IA entonces ya existe, puesto que los programas para jugar a las damas corresponden a la clase mundo real. ¿O bien la inteligencia es la aptitud para integrar funciones simbólicamente, como en la clase estudiante de cálculo de primer año? Si es así, IA entonces ya existe,

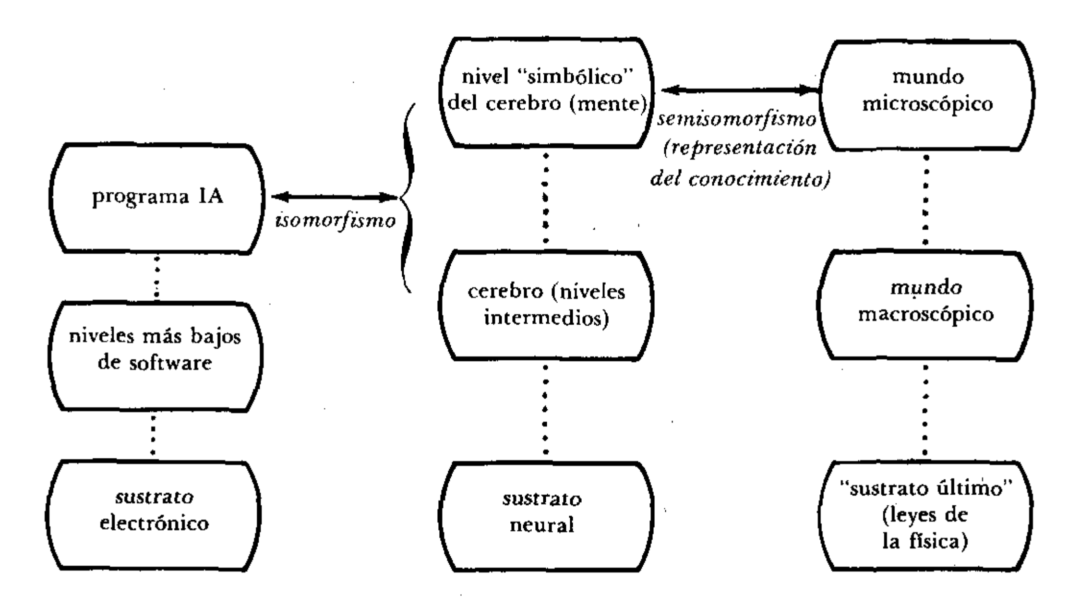


Figura 108. En los esfuerzos que sigue la investigación relativa a Inteligencias Artificiales, es crucial la noción de que los niveles simbólicos de la mente pueden ser separados de su sustrato neural, e instrumentados en otro ámbito, tal como el sustrato electrónico de las computadoras. Cuál es la profundidad con que debe copiarse el cerebro es algo que todavía no está claro.

puesto que las rutinas de integración simbólica superan, en muchos casos, a la gente más capacitada. ¿O la inteligencia será el don de jugar bien al ajedrez? Si es así, IA entonces está perfectamente orientada, puesto que los programas para jugar al ajedrez pueden derrotar a la mayoría de los aficionados más hábiles, y es probable que el nivel del ajedrez artificial continúe, poco a poco, mejorando.

Históricamente, se ha dado una actitud particular acerca de las cualidades que, si son mecanizadas, constituirían fuera de duda la inteligencia. Pareciera a veces como si cada paso hacia IA, en lugar de producir algo que cualquiera aceptaría como inteligencia real, simplemente revelara qué cosa *no* es la inteligencia real. Si la inteligencia implica aprendizaje, creatividad, respuestas emocionales, sentido de la belleza, sentido de sí mismo, queda por delante un largo camino que debe ser recorrido, y es posible que ello se logre únicamente cuando hayamos duplicado totalmente un cerebro vivo.

La belleza, el Cangrejo y el espíritu

Ahora bien, ¿qué nos dice todo esto —si es que dice algo— a propósito de la actuación del Cangrejo como virtuoso, ante Aquiles? Acá hay dos temas entremezclados, los siguientes:

(1) Cualquier proceso cerebral, bajo cualesquiera circunstancias, ¿podría distinguir en forma totalmente segura entre enunciados verdaderos y falsos de TNT, sin caer en violaciones de la Tesis Church-Turing? ¿O se trata de un acto, en principio, imposible?
(2) La percepción de la belleza, ¿es un proceso cerebral?

Primero de todo, en respuesta a (1): si se permiten violaciones a la Tesis Church-Turing, no parece haber ninguna objeción fundamental que presentar a los extraños sucesos acaecidos en el Diálogo. De manera que estamos interesados en saber si un creyente en la Tesis Church-Turing descreería de los talentos del Cangrejo. Bueno, todo depende de cuál sea la versión de la Tesis CT en la que se crea. Por ejemplo, si uno se adhiere exclusivamente a la Versión Procesos Públicos, puede fácilmente compatibilizar con ella el comportamiento del Cangrejo, mediante la afirmación de que las aptitudes del Cangrejo no son comunicables. Contrariamente, si uno adopta la Versión Reduccionista, le costará mucho creer en las supuestas virtudes del Cangrejo (a causa del Teorema de Church, próximo a ser demostrado). Creer en las versiones intermedias permite cierto grado de dilución del tema. Por supuesto, modificar la posición de acuerdo a las conveniencias lo hace todo más cómodo.

En este momento, parece adecuado presentar una nueva versión de la Tesis CT, la cual es sostenida implícitamente por una vasta cantidad de personas, y que ha sido públicamente expuesta por diversos autores, de varias maneras distintas. Algunos de los más famosos, entre estos últimos, son los siguientes: los filósofos Hubert Dreyfus, S. Jaki, Mortimer Taube y J. R. Lucas; el biólogo y filósofo Michael Polanyi (un holista por excelencia); el destacado neurofisiólogo australiano John Eccles. Estoy seguro de que muchos otros autores han formulado reflexiones similares, y de que son incontables los lectores que las han acogido favorablemente. Lo que intento un poco más abajo es presentar una síntesis de sus posiciones; es muy posible que incurra en alguna dosis de injusticia, pero he tratado de transmitir el espíritu de la cosa con el mayor rigor de que soy capaz:

TESIS CURCH-TURING, VERSION ESPIRITUALISTA: Algunas de las tareas que cumple el cerebro pueden ser objeto de vagas aproximaciones por parte de una computadora, pero no ocurrirá así con las principales, y tampoco, ciertamente, con las interesantes. De todas maneras, aun cuando lo consiguieran, dejarían sin explicar el espíritu, y no hay forma de que las computadoras obtengan un sustento que las habilite para ello.

Esta versión se relaciona con la anécdota del *Magnifican . . . grejo* de dos maneras. En primer lugar, los adherentes de aquélla consideran, tal vez, que el relato es disparatado e inverosímil, aunque, en principio, no

ilegítimo. En segundo lugar, dichos adherentes sostendrán, es posible, que la apreciación de cualidades tales como la belleza es una de las propiedades vinculadas a la elusividad del espíritu y, por consiguiente, inherentemente asequible sólo a los seres humanos, no a las simples máquinas.

Volveremos enseguida a este segundo punto, pero antes, puesto que estamos en el tópico del espiritualismo, debemos exponer una última versión, en una forma aun más extrema, debido a que es la forma postulada por incontables personas cultas en nuestros días:

TESIS CHURCH-TURING, VERSION THEODORE ROSZAK: Las computadoras son ridículas. Lo mismo que la ciencia en general.

Este punto de vista tiende a prevalecer entre determinada gente dispuesta a ver una amenaza a los valores humanos en cualquier cosa que se asocie remotamente con los números o con la exactitud. Es muy lamentable que esta gente no estime la profundidad, la complejidad y la belleza envueltas en la exploración de estructuras abstractas tales como la mente humana, donde, por cierto, se llega a un contacto íntimo con las interrogaciones últimas acerca de qué es el ser humano.

Retornando a la belleza, poco atrás planteamos si la apreciación de la misma es un proceso cerebral y, de ser así, si es imitable por una computadora. Quienes creen que esto no es explicado por el cerebro es muy difícil que acepten que una computadora pueda poseer tal apreciación. Quienes creen que se trata de un proceso cerebral vuelven a dividirse, con arreglo a la versión de la Tesis CT por la cual opten. Un reduccionista absoluto creerá que, en principio, cualquier proceso cerebral puede ser convertido en un programa de computadora; otros, sin embargo, pueden entender que la de belleza es una noción demasiado mal definida como para que un programa de computadora pueda asimilarla. Quizá sienten que la apreciación de la belleza requiere un elemento de irracionalidad, por lo tanto incompatible con la sustancia misma de las computadoras.

Lo irracional y lo racional pueden coexistir en diferentes niveles

Empero, este criterio de que "la irracionalidad es incompatible con las computadoras" reposa sobre una grave confusión de niveles. El error se origina en la idea de que, como las computadoras son máquinas que funcionan sin equivocarse, están confinadas a ser "lógicas" en todos los niveles. Sin embargo, es enteramente obvio que una computadora puede ser instruida para que dé salida impresa a una secuencia de enunciados ilógicos o, para variar, una tanda de enunciados que tengan valores arbitrarios de verdad. Claro que, siguiendo tales instrucciones, ¡una computadora no estaría cometiendo errores! Por el contrario, únicamente habría error si la

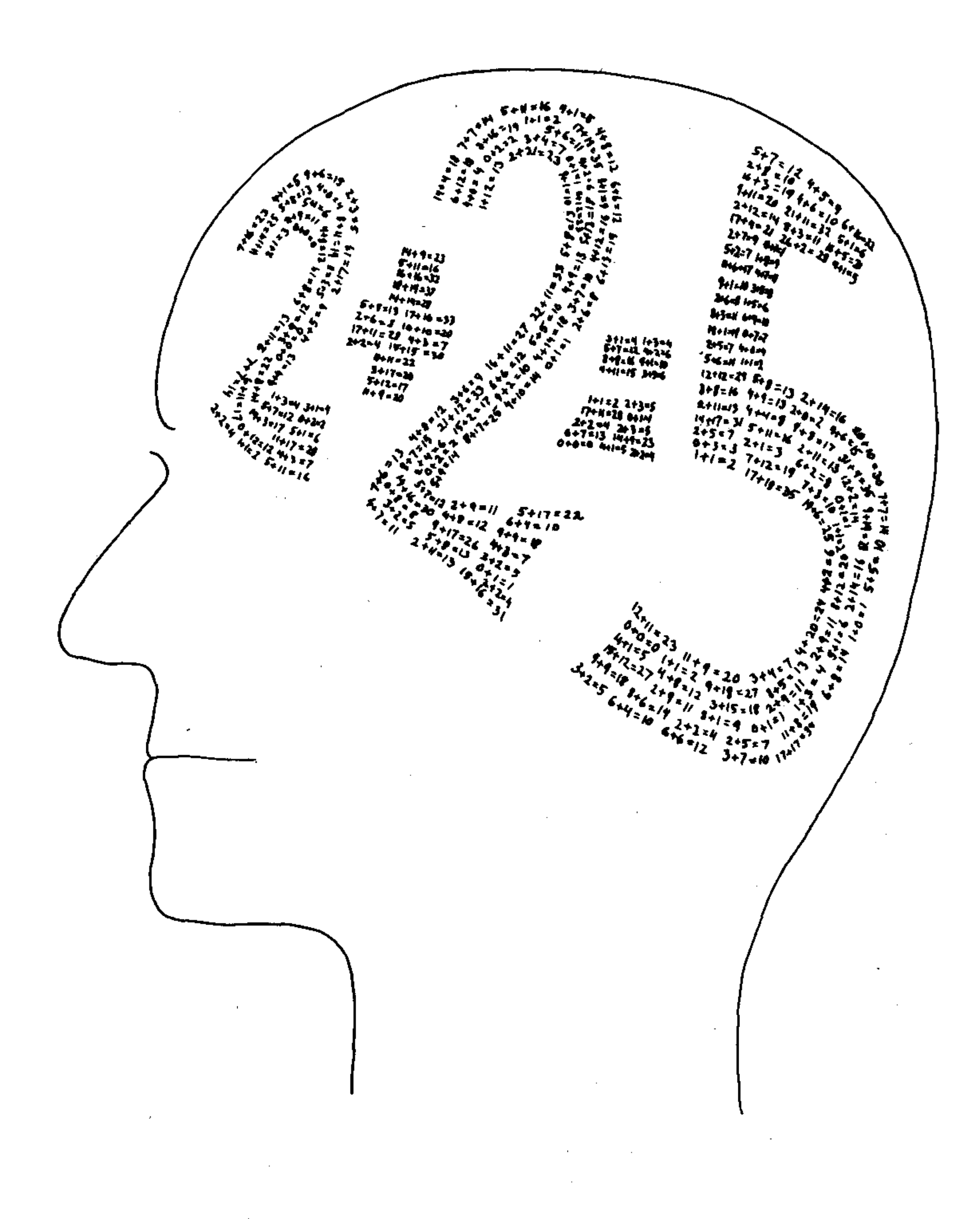


Figura 109. El cerebro es racional; la mente puede no serlo. [Dibujo del autor.]

máquina *diese* salida a algo que no fuese el tipo de enunciado que, según las instrucciones recibidas, debe *imprimir*. Esto ilustra el modo en que el funcionamiento sin equivocaciones en un nivel puede estar dando fundamento a la manipulación simbólica operada en un nivel más alto . . . y los objetivos de este nivel superior puede que no tengan nada que ver con la difusión de la Verdad.

Otro medio para ampliar el panorama a propósito de esto es recordar que un cerebro, también, es una colección de elementos que funcionan sin equivocarse: las neuronas. Toda vez que el umbral de una neurona es sobrepasado por la suma de las señales que ingresan, ¡BANG!: se excita. Nunca sucede que una neurona olvide sus conocimientos aritméticos, es decir, que sume negligentemente sus entradas y extraiga un resultado equivocado. Inclusive cuando muere, una neurona continúa funcionando correctamente, en el sentido de que sus componentes siguen obedeciendo las leyes de la matemática y de la física. No obstante, como bien sabemos, las neuronas son perfectamente capaces de sustentar comportamientos de alto nivel que son erróneos, en su nivel propio, e inclusive en una medida sorprendente. La figura 109 pretende ilustrar esta colisión entre niveles: una creencia incorrecta, afirmada en el ámbito del software de una mente, sustentada en el hardware de un cerebro que funciona sin equivocarse.

Esta cuestión —ya varias veces tocada en diversos contextos— radica simplemente en que la significación puede tener existencia en dos o más niveles diferentes de un sistema que opere símbolos; junto con la significación, ocurre lo mismo en el caso del acierto y del desacierto. La presencia de la significación en un nivel dado está determinada por la circunstancia de si la realidad es reflejada o no, de una manera isomórfica (o aun menos definida), en ese nivel. Luego, el hecho de que las neuronas siempre efectúen sumas correctas (en realidad, son cálculos mucho más complejos) no asegura en absoluto la corrección de las conclusiones que tienen lugar en el nivel superior, nivel sustentado en la maquinaria neuronal. Si el nivel máximo de alguien está ocupado en suministrar koans de budismo booleano o en meditar sobre los teoremas del álgebra zen, sus neuronas están funcionando racionalmente. Por lo mismo, los procesos simbólicos de alto nivel que crean, en el cerebro, la experiencia de apreciación de la belleza, son perfectamente racionales en el nivel básico, donde tiene lugar el funcionamiento sin equivocaciones; cualquier irracionalidad, en caso de que la haya, se produce en el nivel más alto, y es un epifenómeno —una consecuencia— de los acontecimientos del nivel más bajo.

Para enfocar el mismo asunto en una forma diferente, supongamos que a nuestra mente le está costando resolver el problema de si ordenar un emparedado de queso o de jamón. ¿Esto implica que también nuestras neuronas están en la incertidumbre, sin determinar si excitarse o no? Por supuesto que no: nuestra confusión gastronómica es un estado de alto nivel que descansa por completo en la eficiente excitación de miles de

neuronas, a través de maneras sumamente organizadas. Aunque ello sea un tanto paradójico, se hace evidente a poco que se lo piense; sin embargo, quizá sea legítimo decir que casi todas las confusiones en materia de mentes y computadoras tienen su origen en confusiones de niveles tan elementales como la mencionada.

No hay razón para creer que el hardware de funcionamiento infalible de una computadora no pueda ser soporte de un comportamiento simbólico de alto nivel, el cual representaría estados complejos tales como la confusión, los olvidos o la apreciación de la belleza. Ello requerirá la existencia de subsistemas masivos que interactúen entre sí de acuerdo a una "lógica" compleja. La conducta visible puede aparecer como racional o como irracional, pero por debajo suyo y dándole concreción habrá un hardware confiable y lógico.

Más argumentos en contra de Lucas

Al mismo tiempo, esta distinción de niveles nos suministra una nueva provisión de combustible para seguir refutando a Lucas. La argumentación de Lucas esá basada en la noción de que el Teorema de Gödel, por definición, es aplicable a las máquinas. De hecho, Lucas ha formulado al respecto un pronunciamiento notablemente enfático:

> El Teorema de Gödel debe aplicarse a las máquinas cibernéticas, porque está en la escencia de las máquinas el que sean la instrumentación concreta de un sistema formal.[9]

Como ya vimos, esto es correcto con respecto al nivel del hardware; no obstante, como consecuencia de que puede haber niveles más altos, no se trata de la última palabra con relación al tema. Pero Lucas da la impresión de que, en las máquinas imitadoras de la mente de las cuales él habla, existe *solamente un nivel* como escenario de la manipulación simbólica. Por ejemplo, la Regla de Separación (llamada "Modus Ponens" en su artículo) sería instalada en el hardware y pasaría a ser un aspecto inmodificable de dicho tipo de máquinas. Va todavía más allá e insinúa que, si el *Modus Ponens* pudiera ser marginado en ocasiones, en lugar de ser un pilar inmutable del sistema mecánico:

> El sistema dejaría de ser un sistema lógico formal, y la máquina quedará escasamente capacitada para presentarse como modelo de la mente.[10]

Ahora bien, muchos de los programas que son desarrollados en IA tienen muy poco en común con los programas que generan verdades de teoría de

[9] *Lucas en Anderson*, p. 44.
[10] *Ibid.*, p. 54.

los números: programas con reglas de inferencia inflexibles y grupos fijos de axiomas. No obstante, se les asigna con certidumbre el carácter de "modelos de la mente". En su nivel máximo —el nivel "informal"— puede haber manipulación de imágenes, formulación de analogías, olvido de ideas, confusión de conceptos, desdibujamiento de distinciones, etcétera. Pero esto no contradice el hecho de que todos esos *fenómenos* descansan en el correcto funcionamiento de su hardware subyacente, tal cual como el cerebro descansa en el correcto funcionamiento de sus neuronas. De modo pues que los programas IA son, por cierto, "instrumentaciones concretas de un sistema formal", pero no son máquinas a las cuales pueda aplicarse la transmutación lucasiana de la prueba de Gödel. La argumentación de Lucas se aplica exclusivamente a su nivel básico, aquel donde su inteligencia —grande o limitada— no reposa.

Hay una circunstancia a través de la cual Lucas traiciona su ultrasimplificada visión relativa al modo en que los procesos mentales estarían representados dentro de los programas de computadora. Hablando del tema de la coherencia, escribe:

> Si fuéramos, en realidad, máquinas incoherentes, estaríamos perfectamente satisfechos con nuestra incoherencia, y afirmaríamos con toda soltura los dos términos de una contradicción. Además, estaríamos dispuestos a decir absolutamente cualquier cosa: lo cual no es así. Se ha mostrado con facilidad que en un sistema formal incoherente es demostrable cualquier cosa.[11]

La última oración revela la suposición de Lucas en el sentido de que, en forma necesaria, todo sistema formal que desarrolle razonamientos debe incluir en su interior el cálculo proposicional. En particular, él está considerando el teorema $<<P\wedge\sim P> \supset Q>$ del cálculo proposicional; evidentemente, parte de la errónea creencia de que se trata de un rasgo inevitable del razonamiento mecanizado. Sin embargo, es perfectamente verosímil que los procesos del pensamiento lógico, como puede serlo un razonamiento proposicional, surjan como *consecuencia* de la inteligencia general de un programa IA, y no por haber sido *preprogramados*. ¡Esto es lo que sucede en los seres humanos! Y no existe ningún motivo específico conducente a suponer que el cálculo proposicional estricto, con sus rígidas reglas y la muy simple definición de coherencia que éstas transmiten, emergería de dicho programa.

Una columna de apoyo de IA

Podemos sintetizar los resultados de este paseo por el ámbito de la distinción de niveles lanzando una versión final y más enérgica de la Tesis Church-Turing:

[11] *Ibid.*, p. 53.

TESIS CHURCH-TURING, VERSION IA: Los procesos mentales de toda índole pueden ser simulados por un programa de computadora cuyo lenguaje subyacente tenga un poder igual al de FlooP: es decir, donde todas las funciones recursivas parciales puedan ser programadas.

Es necesario señalar que, en la práctica, muchos investigadores de IA se fundan en otro artículo de fe, íntimamente relacionado con el propuesto por la Tesis CT, al cual denomino *Tesis IA*. Dice más o menos así:

TESIS IA: Cuando la inteligencia de la máquina evoluciona, sus mecanismos subyacentes tienden a asemejarse a los mecanismos que subyacen a la inteligencia humana.

En otras palabras, todas las inteligencias no son sino variaciones de un mismo tema; para crear inteligencia verdadera, la investigación en IA no tiene más que seguir avanzando hacia niveles cada vez más bajos, más y más próximos a los mecanismos cerebrales, si es que su objetivo consiste en dotar a sus máquinas de las aptitudes propias de los seres humanos.

Teorema de Church

Volvamos al Cangrejo y a la pregunta de si su procedimiento de decisión con respecto a la teoremidad (presentado bajo el disfraz de un tamiz para la belleza musical) es compatible con la realidad. En verdad, no hay forma de deducir, a partir de los acontecimientos ocurridos en el Diálogo, si el don del Cangrejo es una capacidad para distinguir entre *teoremas* y *no teoremas* o, en forma alternativa, una capacidad para distinguir entre *enunciados verdaderos* y *falsos*. Por supuesto, en muchos casos ambas cosas son equivalentes, pero el Teorema de Gödel muestra que no siempre es así. No hay problema sin embargo: las dos alternativas son imposibles, si uno cree en la Versión IA de la Tesis Church-Turing. La proposición según la cual es imposible contar con un procedimiento de decisión para aplicar a la *teoremidad* en todo sistema formal que tenga el poder de TNT es conocida como *Teorema de Church*. La proposición según la cual es imposible contar con un procedimiento de decisión para aplicar a las *verdades* teórico-numéricas —si es que existen tales verdades, cosa que uno pone en duda luego de recorrer todas las bifurcaciones de TNT— es una consecuencia inmediata del *Teorema de Tarski* (publicado en 1933, aunque las ideas que contiene fueron manejadas por Tarski mucho antes).

Las demostraciones respectivas de estas dos importantísimas conclusiones metamatemáticas son muy similares; ambas se siguen con rapidez de los desarrollos autorreferenciales.

Consideremos primero la cuestión relativa al procedimiento de decisión para la teoremidad TNT. Si existiera un recurso uniforme que permitiera

a las personas hacer recaer cualquier fórmula dada X en la clase "teorema" o en la clase "no teorema", en virtud de la Tesis CT (Versión Habitual), habría entonces un programa FlooP finalizable (una función recursiva general) que podría adoptar la misma decisión, cuando recibe como entrada el número Gödel de la fórmula X. El paso crucial es recordar que toda propiedad que puede ser verificada mediante un programa FlooP finalizable está *representada* en TNT. Esto significa que la propiedad de teoremidad TNT estaría representada (por oposición a estar simplemente expresada) en el interior de TNT. Como veremos dentro de un momento, empero, esto nos metería en una encrucijada, pues si la teoremidad es un atributo representable, la fórmula G de Gödel se convertiría en algo tan tautológico como la paradoja de Epiménides.

Todo gira en torno a lo que dice G: "G no es un teorema de TNT". Supongamos que G fuera un teorema; luego, puesto que la teoremidad es supuestamente representable, la fórmula TNT que afirma "G es un teorema" sería un teorema de TNT. Pero esta fórmula es ~G, la negación de G, de manera que TNT es incoherente. Por el otro lado, supongamos que G no fuera un teorema; luego, una vez más gracias a la supuesta representabilidad de la teoremidad, la fórmula que afirma "G no es un teorema" sería un teorema de TNT. Pero esta fórmula es G, e ingresamos de nuevo en la paradoja. A diferencia de la situación anterior, no hay resolución de la paradoja. El problema es creado por la suposición de que la teoremidad es representada por alguna fórmula de TNT; en consecuencia, debemos retroceder sobre nuestros pasos y suprimir dicha suposición. Esto nos obliga a concluir que ningún programa FlooP puede discriminar entre números Gödel de teoremas y de no teoremas. Para terminar, si aceptamos la Versión IA de la Tesis CT, debemos retroceder entonces aun más, y concluir que ningún método, sea el que fuere, puede habilitar a los seres humanos a distinguir con seguridad entre teoremas y no teoremas: y esto incluye las determinaciones basadas en la belleza. Quienes se adhieren exclusivamente a la Versión Procesos Públicos pueden seguir pensando que las capacidades del Cangrejo son posibles; de todas las versiones, sin embargo, ésta es quizá la más difícil de fundamentar.

Teorema de Tarski

Pasemos ahora a la conclusión de Tarski. Este planteó si habría alguna forma de expresar, en TNT, el concepto de verdad teórico-numérica. Ya hemos visto que la teoremidad es expresable (aunque no representable); Tarski estaba interesado en la cuestión análoga relativa a la noción de verdad. Más específicamente, quería determinar si existe alguna fórmula de TNT con una sola variable libre a, que pudiese ser traducida así:

"La fórmula cuyo número Gödel es a expresa una verdad."

Supongamos, junto con Tarski, que sí existe una fórmula semejante, a la cual abreviaremos como VERDAD {a}. Ahora bien, lo que haremos será utilizar el método diagonalizador para producir un enunciado que afirme, acerca de sí mismo, que es una no verdad. Reproduciremos con exactitud el método Gödel, comenzando con un "tío":

$$\exists a:\langle\sim\text{VERDAD}\{a\}\text{ARITMOQUINEREAR}\{a'', a\}\rangle$$

Digamos que el número Gödel del tío es t. Aritmoquinereamos este mismo tío, para producir la fórmula Tarski T:

$$\exists a:\langle\sim\text{VERDAD}\{a\}\wedge\text{ARITMOQUINEREAR}\{\underbrace{\text{SSS}\ldots\text{SSS}}_{t\ \text{S's}}\text{0}/a'',a\}\rangle$$

Cuando es interpretado, esto nos dice:

"La aritmoquinificación de t es el
número Gödel de un enunciado falso."

Pero como la aritmoquinificación de t es el propio número Gödel de T, la fórmula T de Tarski reproduce, con toda exactitud, la paradoja de Epiménides dentro de TNT, diciendo de sí misma: "Soy una falsedad". Por supuesto, esto conduce a la conclusión de que dicha fórmula debe ser, simultáneamente, verdadera y falsa (o, simultáneamente, ninguna de ambas cosas). Allí surge ahora una interrogación interesante: ¿Qué tiene de malo reproducir la paradoja de Epiménides? ¿Produce alguna consecuencia? Al fin y al cabo, ya lo hemos hecho en español, y el español no se ha evaporado.

La imposibilidad del *Magnifican . . . grejo*

La respuesta demanda que se haga memoria de que aquí hay comprendidos dos niveles de significación. Uno es el que precisamente estamos usando; el otro es del tipo de los enunciados de teoría de los números. Si la fórmula T de Tarski realmente existiera, ¡habría entonces un enunciado *relativo a números naturales* que sería a la vez verdadero y falso! Este es el obstáculo. Mientras que siempre nos es posible esconder bajo la alfombra la paradoja de Epiménides en su formulación idiomática, diciendo que su contenido (su verdad) es abstracto, ¡ya no es así cuando la paradoja se convierte en un enunciado concreto referente a números! Si nos llega a parecer que ésta es una situación ridícula, tenemos por lo tanto que suprimir nuestra suposición de que existe la fórmula VERDAD{a}. Luego, no hay forma de expresar la noción de verdad en TNT. Tómese nota de que

esto hace de la verdad una propiedad considerablemente más elusiva que la de teoremidad, pues esta última *es* expresable. Las mismas razones que tuvimos antes para rehacer nuestros pasos (con relación a la Tesis Church-Turing, Versión IA) nos conducen ahora a la conclusión de que:

> La mente del Cangrejo no puede ser más reconocedora-de-la-verdad que un teorema-TNT-reconocedor.

Lo primero transgrediría el Teorema Tarski-Church-Turing ("No hay procedimiento de decisión para la verdad aritmética"), en tanto que lo segundo transgrediría el Teorema de Church.

Dos tipos de forma

Resulta sumamente interesante, por lo tanto, examinar la significación de la palabra "forma" cuando ésta se aplica a la interpretación de configuraciones arbitrariamente complejas. Pongamos por caso, ¿qué nos hace reaccionar cuando observamos una pintura y sentimos su belleza? ¿La "forma" de las líneas y puntos en nuestra retina? Evidentemente, debe ser eso, pues así es como examinan a aquélla nuestros mecanismos mentales de análisis; empero, la complejidad del procesamiento nos hace sentir que no estamos observando meramente una superficie bidimensional: estamos respondiendo a algún género de significación interior de la pintura, un elemento multidimensional aprisionado, de alguna manera, dentro de esas dos dimensiones. Lo importante aquí es la palabra "significación"; nuestras mentes contienen intérpretes que reciben los moldes bidimensionales y a continuación "extraen" de ellos nociones de elevada dimensionalidad, tan complejas que no podemos describirlas conscientemente. Viene al caso señalar que lo mismo puede decirse a propósito de cómo reaccionamos ante la música.

Subjetivamente, se percibe que los mecanismos de extracción de la significación interior carecen por completo de parentesco con los procedimientos de decisión que verifican la presencia o ausencia de una cualidad específica, como por ejemplo el carácter de bien formada de una cadena. Tal vez sea por ello que la significación interior sea algo que descubre más cosas de sí misma a medida que pasa el tiempo. A este respecto jamás se puede estar seguro, al modo en que sí es posible estarlo a propósito de lo bien formado, de que uno ha finiquitado el tema.

Esto nos propone la posibilidad de trazar una distinción entre los dos sentidos de "forma" de las pautas que hemos comentado. Primero, tenemos cualidades tales como la de bien formado, las cuales pueden ser aprehendidas mediante *verificaciones predictiblemente finalizables*, igual que en los programas BlooP. Propongo llamar a éstas las cualidades *sintácticas* de la forma: uno percibe, intuitivamente, que los atributos

sintácticos de la forma reposan en un sitio muy cercano a la superficie y que, en consecuencia, no generan la creación de estructuras cognoscitivas multidimensionales.

En cambio, los aspectos *semánticos* de la forma son aquellos que no pueden ser verificados dentro de un lapso predictible: requieren *verificaciones de finalización imprevisible*. La teoremidad de las cadenas de TNT, como hemos visto, es un aspecto de esta clase; no se puede aplicar una verificación corriente a una cadena y determinar si es un teorema: de algún modo, el hecho de que esté involucrada su *significación* se relaciona crucialmente con la dificultad de establecer si una cadena es o no un teorema de TNT. El acto de extraer la significación de una cadena implica, en esencia, establecer los alcances de todas sus conexiones con todas las cadenas restantes, y ello inicia, sin la menor duda, un recorrido de finalización inagotable. Por lo tanto, las propiedades "semánticas" están vinculadas con búsquedas no finalizables ya que, en un sentido importante, *la significación de un objeto no está situada* en el objeto mismo. Esto no equivale a sostener que no es posible captar la significación de ningún objeto hasta el fin de los tiempos, pues a medida que el tiempo pasa la significación se va manifestando más y más. Con todo, siempre quedan aspectos de aquella que siguen ocultos durante lapsos no previsibles.

La significación se deriva de conexiones con las estructuras cognoscitivas

Deslicémonos desde las cadenas a las composiciones musicales, sólo para variar. Si se lo prefiere, no obstante, se puede sustituir cualquier referencia a una pieza musical por el término "cadena". Estas reflexiones pretenden ser genéricas, pero presiento que su espíritu ha de ser mejor comprendido mediante el auxilio de alusiones musicales.

La significación de una obra musical es curiosamente dual: por un lado, pareciera estar diseminada en todas partes, en virtud de su relación con muchas otras cosas del mundo; sin embargo, por otro lado, dicha significación se deriva, obviamente, de la música misma, de manera que es en alguna parte interior de esta última que ha de ser localizada.

La resolución de esta incógnita se produce cuando se toma en cuenta al intérprete: el mecanismo que efectúa la extracción de la significación. (En este contexto, por "intérprete" no quiero dar a entender el ejecutante de la composición, sino los mecanismos mentales de los cuales deriva la significación, en el oyente, cuando aquélla es ejecutada.) El intérprete puede descubrir muchas facetas importantes del significado de una pieza cuando la escucha por vez primera, lo cual parecería confirmar la noción de que la significación se alberga en la pieza misma, y que simplemente es cuestión de descifrarla allí. Pero esto constituye sólo una parte de la historia. El intérprete musical actúa tendiendo una estructura cognoscitiva

multidimensional, una representación mental de la composición, a la que trata de integrar con informaciones prexistentes mediante el hallazgo de vinculaciones con otras estructuras multidimensionales, las cuales codifican experiencias anteriores. Cuando este proceso tiene lugar, toda la significación, paulatinamente, se va manifestando. En realidad, pueden pasar años antes de que alguien sienta que ha penetrado en la significación central de una obra. Esto se insinuaría como un argumento en favor del punto de vista opuesto, el de que la significación está diseminada y que la función del intérprete consiste en ensamblarla, de manera paulatina.

Indudablemente, la verdad se encuentra en algún punto intermedio: las significaciones —sean musicales o lingüísticas— están, en cierta medida, localizadas y, también en cierta medida, diseminadas. Utilizando la terminología del Capítulo VI, podemos decir que las composiciones musicales y los textos son en parte desencadenadores y en parte transportadores de significación explícita. Una ilustración clara de este dualismo de la significación la provee el ejemplo de una tableta con una inscripción antigua: la significación de ésta se encuentra, en parte, almacenada en el cerebro de los especialistas y en las bibliotecas de todo el mundo; en parte, también, es obvio que está implícita en la tableta misma.

Así, otra manera de caracterizar la diferencia entre propiedades "sintácticas" y "semánticas" (dentro de los límites del sentido propuesto) es la observación de que las primeras residen inequívocamente dentro del objeto bajo examen, en tanto que las segundas dependen de sus relaciones con una clase potencialmente infinita de otros objetos: en consecuencia, no se las puede localizar en forma nítida. En principio, no hay ningún elemento críptico u oculto en las propiedades sintácticas; en cambio, la esencia de las propiedades semánticas es lo recóndito. Por esta razón es que propuse la distinción entre aspectos "sintácticos" y "semánticos" de la forma visual.

Belleza, verdad y forma

¿Qué diremos de la belleza? No se trata de una propiedad sintáctica, sin duda, de acuerdo a los conceptos expresados. ¿Es una plena propiedad semántica? ¿La belleza es una propiedad de la que está dotada, por ejemplo, una determinada pintura? Vamos a circunscribir nuestras consideraciones al caso de un observador individual: cualquiera ha tenido la experiencia de encontrar que una cosa es bella en una ocasión, insulsa en otra, y algo intermedio en otras oportunidades. Luego, ¿la belleza es un atributo que se modifica con el transcurso del tiempo? El esquema puede ser invertido y decirse que quien varía es el contemplador. Dado un contemplador determinado de una pintura determinada en un momento determinado, ¿es legítimo afirmar que la belleza es una cualidad definitivamente presente o ausente?

Es probable que, en cada persona, se movilicen diferentes niveles de intérpretes, según las circunstancias. Estos diversos intérpretes extraen diferentes *significaciones, establecen diferentes conexiones* y, por lo común, hacen una evaluación de los aspectos profundos en forma completamente diferente. Pareciera, pues, que esta noción de belleza es sumamente difícil de fijar. Por esta razón es que opté por vincular a la belleza, en el *Magnifican . . . grejo*, con la verdad, la cual, como hemos palpado, es por su parte una de las nociones más inasibles de la metamatemática.

El sustrato neural de la paradoja de Epiménides

Querría finalizar este capítulo incluyendo algunas reflexiones sobre el problema central de la verdad: la paradoja de Epiménides. Creo que la reproducción, por Tarski, de la paradoja de Epiménides en el interior de TNT, señala el camino hacia una comprensión más profunda de la paradoja en el ámbito idiomático. Lo que Tarski descubre es que esta versión de la paradoja tiene dos niveles distintos. En un nivel, es un enunciado *a propósito de sí mismo* que sería verdadero si fuese falso, y falso si fuese verdadero. En el otro nivel —que prefiero llamar *sustrato aritmético*— es un enunciado *a propósito de los enteros* que es verdadero si, y sólo si, es falso.

Ahora bien, por algún motivo, este último perturba a la gente muchísimo más que el primero. Hay quienes, sencillamente, desestiman al primero como "carente de significado", a causa de su autorreferencialidad. Pero no se puede desestimar un enunciado paradójico referido a los enteros; los enunciados referidos a enteros no pueden ser al mismo tiempo verdaderos y falsos.

Mi impresión es que la transformación tarskiana de la paradoja de Epiménides nos induce a *buscar un sustrato* en la versión idiomática. En la versión aritmética, el nivel superior de significación se sustenta en el nivel aritmético inferior. Tal vez análogamente, la oración autorreferencial que percibimos ("Esta oración es falsa") sea nada más que el nivel máximo de una entidad compuesta por dos niveles. ¿Cuál sería, entonces, el nivel inferior? Bueno, ¿sobre qué mecanismo va montado el lenguaje? El cerebro. Por lo tanto, se debe buscar el *sustrato neural* de la paradoja de Epiménides: un nivel más bajo, donde encontramos acontecimientos físicos chocando entre sí. Es decir, dos acontecimientos que, por su naturaleza, no pueden ocurrir simultáneamente. Si existe este sustrato físico, la razón por la cual no podemos hallarle pies ni cabeza a la oración de Epiménides es que nuestros cerebros están tratando de complementar una tarea imposible.

¿Y cuál sería la naturaleza de los acontecimientos físicos en colisión? Presumiblemente, cuando escuchamos el enunciado de Epiménides, nuestro cerebro traza alguna "codificación" del mismo: una configura-

ción interna de símbolos en interacción. Luego, trata de clasificar el enunciado como "verdadero" o como "falso"; este acto clasificador tiene que implicar un esfuerzo por obligar a diversos símbolos a interactuar de una manera específica. (Quizá suceda así con el procesamiento de cualquier enunciado.) Pero si sucede que el acto de clasificación desbarata la codificación de la oración —cosa que, de ordinario, jamás ocurre— nos sentimos en apuros, pues esta situación equivale a tratar de obligar a un fonógrafo a ejecutar el disco preparado para destruirlo. Acabamos de describir el conflicto en términos físicos, pero no en términos neurales. Si hasta aquí hemos analizado correctamente, es posible, entonces, que la discusión pendiente pueda tener lugar cuando sepamos algo sobre la constitución de los "símbolos" que se opera en el cerebro a partir de las neuronas y sus excitaciones, y sobre la forma en que los enunciados se convierten en "codificaciones".

Este esbozo relativo al sustrato neural de la paradoja de Epiménides sugiere (a mí, por lo menos) que la resolución de la versión idiomática de la paradoja podría ser similar a la resolución de la versión Tarski. Tal resolución involucra el abandono de la noción de que el cerebro puede aportar una representación totalmente rigurosa del concepto de verdad. Lo novedoso de esto reside en su sugerencia de que es imposible, por razones enteramente *físicas*, un modelamiento cabal de la verdad: específicamente, este modelamiento requeriría que en el cerebro se produzcan acontecimientos que, desde el punto de vista físico, son incompatibles entre sí.

SHRDLU, juego de la inventividad del hombre[12]

Un día, Eta Oin vaga por el Laboratorio de Inteligencia Artificial del Instituto Tecnológico de Massachusetts, donde se topa con el joven y brillante programa de computadora llamado SHRDLU. Ocurre que SHRDLU, precisamente, se está muriendo por encontrar a alguien que someta a prueba al recién adiestrado ser humano "Dr. Tony Earrwig". SHRDLU explica que el tal Earrwig es perfectamente inteligente para desenvolverse en el limitado ámbito del análisis de una conversación relativa a un "mundo de juguete", el cual contiene bloques de diversas formas, tamaños y colores, ubicados sobre una mesa, y que pueden ser recogidos y desplazados. Eta Oin, fascinada, comienza a teclear SHRDLU con entusiasmo. Earrwig se apoya en la espalda de aquélla y comienza a brindar algo así como comentarios circunstanciales, tal como se esperaba de él.

1. *Eta Oin*: tome un bloque rojo grande. [Obsérvese la figura 110.]
   SHRDLU: BIEN.
   Dr. Tony Earrwig: SHRDLU responde "Bien" cuando ejecuta una orden. Para tomar el bloque rojo, tiene que dejarlo en libertad mediante el hallazgo de un espacio para el verde y el desplazamiento de este último.
2. *Eta Oin:* agarre la pirámide.
   SHRDLU: NO SE DE QUE PIRAMIDE ME HABLA.
   Dr. Tony Earrwig: Hay tres pirámides a la vista, y SHRDLU sabe que las expresiones que comienzan con "la" están destinadas a hacer referencia a un objeto específico que el hablante tiene en mente.
3. *Eta Oin:* busque un bloque más voluminoso que el que está sosteniendo y póngalo en la caja. [Obsérvese figura 111.]
   Dr. Tony Earrwig: SHRDLU debe resolver qué se quiere decir con "el que" y con "lo", además de utilizar la deducción para decidir cuál bloque está sosteniendo.

[12] Este diálogo es una adaptación de: Terry Winograd, "A Procedural Model of Language Understanding", en R. Schank y K. Colby, editores, *Computer Models of Thought and Language*, pp. 155-66. Sólo se han modificado los nombres de dos personajes.

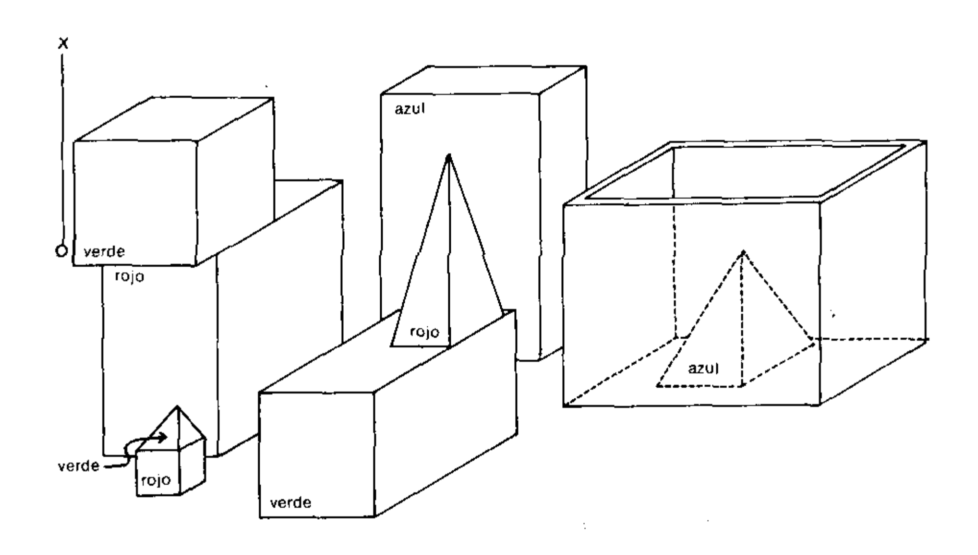


Figura 110. "Tome un bloque rojo grande." [*Tomado de Terry Winograd,* Understanding Natural Language *(New York: Academic Press, 1972), p. 8.*]

SHRDLU: SUPONGO QUE, AL DECIR "LO", ALUDE USTED AL BLOQUE QUE ES MAYOR QUE EL QUE ESTOY SOSTENIENDO.

Dr. Tony Earrwig: Hay dos referentes posibles para "lo": el bloque elegido, y "el que usted está sosteniendo". SHRDLU tiene libertad heurística para optar por uno de ambos.

SHRDLU: BIEN.

Dr. Tony Earrwig: La mano de SHRDLU tiene que apoyar el bloque rojo para recoger el azul más voluminoso.

4. *Eta Oin:* ¿qué contiene la caja?

SHRDLU: LA PIRAMIDE AZUL Y EL BLOQUE AZUL.

5. *Eta Oin:* ¿dónde está apoyada la pirámide?

Dr. Tony Earrwig: Anteriormente, SHRDLU respondió, ante la mención de "la pirámide", diciendo "no sé de qué pirámide me habla". Ahora, él da por supuesto que usted habla precisamente de la mencionada.

SHRDLU: EN LA CAJA.

6. *Eta Oin:* ¿cuántos bloques no están en la caja?

Dr. Tony Earrwig: Las negaciones tales como "no" y "ninguno/a" son operadas si aparecen en cláusulas o en expresiones nominales (como "ninguna caja").

SHRDLU: CUATRO.

7. *Eta Oin:* ¿por lo menos uno de ellos es más reducido que el que le indiqué que tomase?

Dr. Tony Earrwig: La expresión "por lo menos uno de ellos" debe ser

considerada como referida a la pregunta anterior, y "el que . . ." también tiene que ser referido a los bloques. Las expresiones nominales pueden contener números complicados tales como "por lo menos uno", "más de tres", "exactamente siete", etc. Para deducir cuál bloque es "el que le indiqué que tomase" es utilizado el recuerdo de los acontecimientos anteriores. Advierta la complicada estructura sintáctica donde "el que" es, en realidad, el objeto de una cláusula ubicada a dos niveles de profundidad de distancia. El analizador de SHRDLU incluye una gramática que, de un modo genérico, maneja esta clase de complejidad.

SHRDLU: SI, EL CUBO ROJO.

8. *Eta Oin:* ¿está asentado?

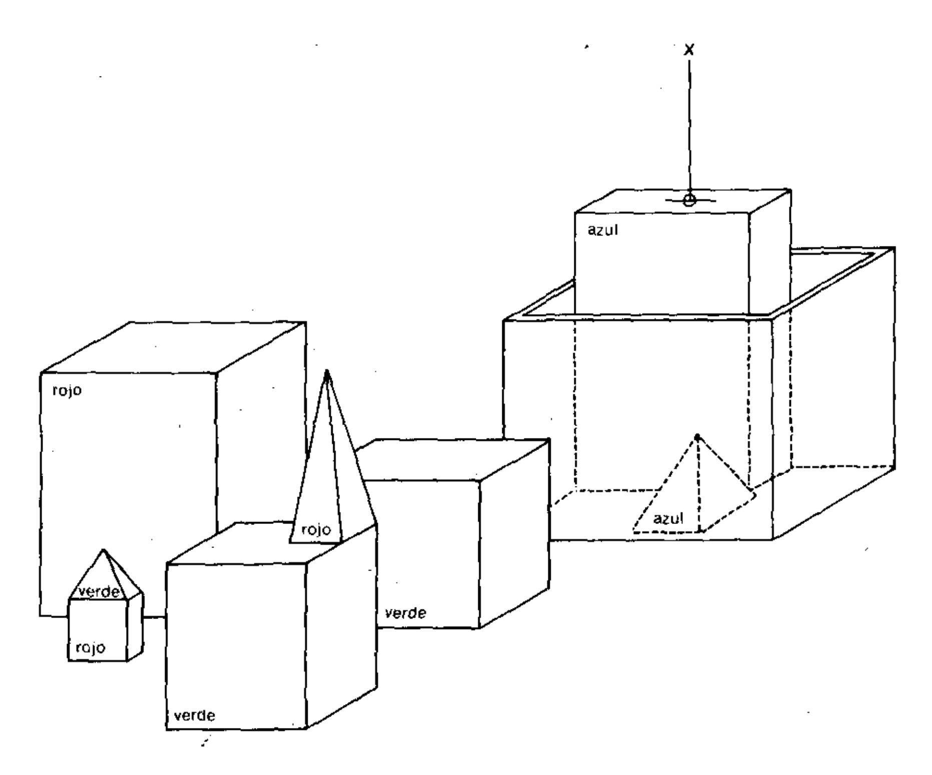
SHRDLU: SI, EN LA MESA.

Dr. Tony Earrwig: SHRDLU parte de la presunción heurística de que la información le resulta pertinente a la persona que formula una pregunta, aun cuando esa persona no solicite específicamente esa información.

9. *Eta Oin:* ¿la mesa puede recoger bloques?

SHRDLU: NO.

Figura 111. "Busque un bloque más grande que el que está sosteniendo y póngalo en la caja." [Adaptado de Terry Winograd, Understanding Natural Language, *p. 9.]*



Dr. Tony Earrwig: Las reglas semánticas de SHRDLU incluyen el conocimiento de que "recoger" debe ser ejecutado por un objeto animado, y que la mesa no es animada.

10. *Eta Oin:* ¿una pirámide puede apoyarse en un bloque?
SHRDLU: SI.
Dr. Tony Earrwig: El sistema deductivo de SHRDLU tiene conocimiento de un ejemplo real, por lo cual sabe que eso es posible.

11. *Eta Oin:* ¿una pirámide puede asentarse en una pirámide?
SHRDLU: NO LO SE.
Dr. Tony Earrwig: La pregunta tiene sentido, pero no hay ningún ejemplo de ello a la vista. SHRDLU no tiene forma de averiguar los detalles de sus programas, aun cuando sean éstos los que definen, en último término, sus aptitudes.

12. *Eta Oin:* apile dos pirámides.
SHRDLU: NO PUEDO.
Dr. Tony Earrwig: SHRDLU lo intenta y fracasa.

13. *Eta Oin:* la pirámide azul es mía.
SHRDLU: ENTIENDO.
Dr. Tony Earrwig: Toda la información relativa al color, la forma, la dimensión y la ubicación de los objetos es conocida por SHRDLU desde el comienzo. La propiedad permanece como atributo desconocido de los objetos de los cuales se le habla. SHRDLU almacena esta información en su base de datos.

14. *Eta Oin:* me pertenecen todos los bloques que no son rojos, pero no me pertenece ninguno que dé apoyo a una pirámide.
SHRDLU: ENTIENDO.
Dr. Tony Earrwig: La consecuencia de haber comprendido estas oraciones es la creación, dentro de SHRDLU, de nuevos procedimientos para deducir qué le pertenece a usted.

15. *Eta Oin:* ¿la caja me pertenece?
SHRDLU: NO.
Dr. Tony Earrwig: La caja sustenta todo lo que está contenido en ella, incluyendo una pirámide.

16. *Eta Oin:* ¿me pertenecen las cosas que hay en la caja?
SHRDLU: SI, DOS COSAS: EL BLOQUE AZUL Y LA PIRAMIDE AZUL.

17. *Eta Oin:* ¿por favor, querría apilar los bloques rojos y, o bien un cubo verde, o bien una pirámide? [Obsérvese la figura 112.]
SHRDLU: BIEN.
Dr. Tony Earrwig: Las conjunciones lógicas, tales como "y", "o", "o bien", etc., cumplen una función tanto gramatical como semántica. Una orden es ejecutada aun cuando tenga el aspecto de una pregunta. La orden es cumplimentada a través de la siguiente serie de pasos: SHRDLU pone un cubo verde sobre el gran cubo rojo (elige el cubo verde que no tiene nada encima), luego quita la pirámide pequeña ubicada sobre el también pequeño cubo rojo, a fin

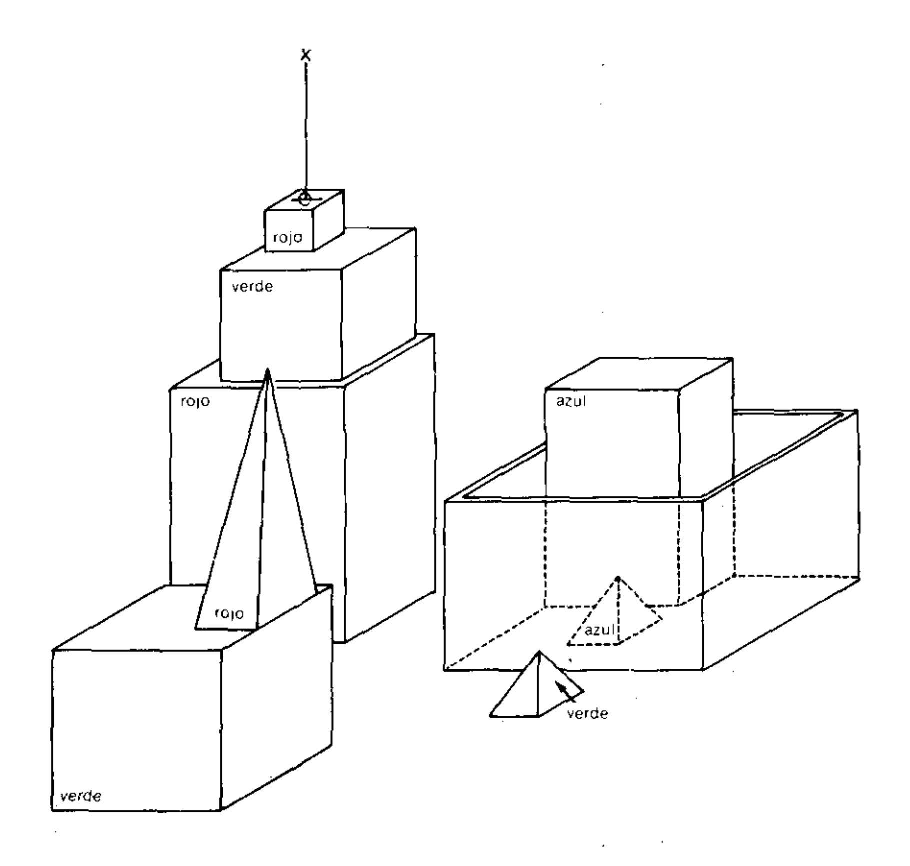


Figura 112. "¿Por favor, querría apilar los bloques rojos y, o bien un cubo verde, o bien una pirámide?" [Adaptado de: Terry Winograd, Understanding Natural Language, *p. 12.]*

de poder utilizar este último para completar la pila del modo especificado.

18. *Eta Oin:* ¿qué cubo hay sobre la mesa?
 SHRDLU: EL VERDE GRANDE CON LA PIRAMIDE ROJA ENCIMA.
 Dr. Tony Earrwig: Por lo común, SHRDLU se contentaría con llamar a aquél "UN GRAN CUBO VERDE", pero como usted preguntó "qué cubo", él tiene que ser más específico al nombrarlo. SHRDLU cuenta con procedimientos para remplazar sustantivos (la actualización implícita, en este caso) y para utilizar pronombres, con el objeto de otorgarle mayor naturalidad al discurso.
19. *Eta Oin:* ¿hay algún bloque grande detrás de alguna pirámide?
 SHRDLU: SI, TRES: UNO ROJO GRANDE, UN CUBO VERDE GRANDE Y EL AZUL.
20. *Eta Oin:* ponga uno pequeño sobre el cubo verde que tiene una pirámide encima.
 Dr. Tony Earrwig: "Uno pequeño" debe contrastar con su expresión

anterior "algún bloque grande", de manera que su significado es "un bloque pequeño".

SHRDLU: BIEN.

21. *Eta Oin:* ponga encima de eso la pirámide más pequeña.

Dr. Tony Earrwig: Formas verbales como "más pequeña" no están en el diccionario de SHRDLU, pero son interpretadas a partir de raíces como "pequeño/a". SHRDLU compara las dimensiones de las distintas pirámides para ejecutar la acción.

SHRDLU: BIEN.

22. *Eta Oin:* ¿cuántas cosas hay encima de los cubos verdes?

SHRDLU: NO ESTOY SEGURO DE QUE QUIERE USTED DECIR CON "ENCIMA DE", EN LA EXPRESION "ENCIMA DE LOS CUBOS VERDES".
¿QUIERE USTED DECIR
1 – DIRECTAMENTE SOBRE LA SUPERFICIE
2 – EN ALGUNA PARTE POR ENCIMA DE ELLO?

Dr. Tony Earrwig: En la oración precedente a ésta, la expresión "encima de" fue interpretada sin dificultades porque el contexto esclarecía su significación. En ésta, la heurística de eliminación de ambigüedades no basta para lograr una definición inequívoca, por lo cual SHRDLU tiene que requerir información adicional. Las paráfrasis están incluidas en las definiciones de "encima" del diccionario. Un requerimiento como el presente puede también tener lugar cuando no sea claro el significado de pronombres como "ése" o "ésos".

23. *Eta Oin:* ¿había tomado usted alguna pirámide antes de poner la verde sobre el cubo pequeño?

SHRDLU: SI, LA VERDE.

Dr. Tony Earrwig: SHRDLU deduce, a partir de su memoria, cuál acontecimiento es el que está siendo aludido, y puede relacionarlo temporalmente con otros acontecimientos. El análisis abarca tiempos compuestos de grupos verbales, e incluye la aptitud específica de seguir la huella de las diversas formas de verbos irregulares como "haber".

24. *Eta Oin:* ¿cuándo la tomó?

SHRDLU: MIENTRAS ESTABA APILANDO EL CUBO ROJO, UN BLOQUE ROJO GRANDE Y UNO VERDE GRANDE.

Dr. Tony Earrwig: Es descripta una circunstancia mediante la alusión al objetivo principal que se estaba persiguiendo.

25. *Eta Oin:* ¿por qué?

Dr. Tony Earrwig: SHRDLU recuerda las oraciones inmediatamente anteriores para comprender las preguntas como ésta y las que siguen.

SHRDLU: PARA QUITARLA.

Dr. Tony Earrwig: Rastreando partes seleccionadas del árbol inicial de subobjetivos, SHRDLU obtiene cierta comprensión de sus propias motivaciones.

26. *Eta Oin:* ¿por qué hizo eso?

SHRDLU: PARA DEJAR LIBRE EL CUBO ROJO.

Dr. Tony Earrwig: "Eso" se refiere a la acción mencionada en la última respuesta de SHRDLU.

27. *Eta Oin:* ¿por qué dejó libre ese cubo?

Dr. Tony Earrwig: Aquí, "ese" alude al cubo recién mencionado.

SHRDLU: PARA PONERLO SOBRE UN CUBO VERDE GRANDE.

28. *Eta Oin:* ¿por qué hizo eso?

SHRDLU: PARA APILAR EL CUBO ROJO, UN BLOQUE ROJO GRANDE Y UN CUBO VERDE GRANDE.

29. *Eta Oin:* ¿por qué hizo eso?

SHRDLU: PORQUE USTED ME LO INDICO.

Dr. Tony Earrwig: SHRDLU recuerda que la indicación fue formulada, no cómo fue formulada.

30. *Eta Oin:* ¿cómo lo hizo?

Dr. Tony Earrwig: "Lo" se refiere a la acción mencionada en la última pregunta, antes bien que a la respuesta.

SHRDLU: PONIENDO UN BLOQUE ROJO GRANDE SOBRE LA MESA; DEJANDOLO LUEGO ALLI; PONIENDO LUEGO SOBRE EL UN CUBO VERDE GRANDE; DEJANDO LUEGO ESE CUBO ALLI; PONIENDO LUEGO EL CUBO ROJO SOBRE ESE CUBO; DEJANDO LUEGO ESE CUBO ALLI.

Dr. Tony Earrwig: Esta es una descripción de los subobjetivos de alto nivel empleados para alcanzar el objetivo.

31. *Eta Oin:* ¿cuántos objetos tomó mientras hacía eso?

Dr. Tony Earrwig: Las referencias temporales pueden referirse a un lapso, a través de palabras como "mientras".

SHRDLU: CUATRO.

32. *Eta Oin:* ¿a qué daba apoyo el cubo rojo antes de que usted acabase de liberarlo?

SHRDLU: A LA PIRAMIDE VERDE.

Dr. Tony Earrwig: Mediante el recuerdo de lo que ha sido desplazado, es posible deducir cosas relativas a los estadios anteriores del escenario. Usted puede utilizar complejas autoinclusiones de cláusulas como "antes de que usted acabase de liberarlo".

33. *Eta Oin:* entonces, había cinco bloques a la izquierda de la caja.

Dr. Tony Earrwig: "Entonces" debe hacer referencia a la oportunidad mencionada en la última oración.

SHRDLU: NO, SOLAMENTE CUATRO: EL CUBO ROJO, DOS CUBOS VERDES GRANDES Y UN BLOQUE ROJO GRANDE.

Dr. Tony Earrwig: En un momento anterior del diálogo, la información acerca de la "posesión de aptitudes" fue aceptada literalmente. Pero SHRDLU sabe que cuenta con información completa sobre los atributos básicos de los objetos, incluyendo la ubicación; verifica todas las enunciaciones acerca de aquéllos para establecer su acuerdo o desacuerdo.

34. *Eta Oin:* ponga la pirámide azul sobre el bloque en la caja.

Dr. Tony Earrwig: Esto es sintácticamente ambiguo, pero es comprendido sin ambigüedad porque la interpretación "ponga dentro de la caja la pirámide azul que está sobre el bloque" no tiene sentido en el presente escenario, en tanto que "ponga la pirámide azul sobre el bloque que está en la caja" sí lo tiene.

SHRDLU: BIEN.

35. *Eta Oin:* ¿hay alguna cosa que sea más grande que todas las pirámides pero no tan espaciosa como la cosa que le da asiento?

Dr. Tony Earrwig: SHRDLU entiende los cuantificadores como "todo", "cualquier", "algún", etc., y las estructuras tales como "más grande que", "tan espacioso como", etc. Aquí, "le" se refiere a una agrupación nominal incluida en la misma oración pero ubicada dos niveles más arriba en el árbol analítico gramatical.

SHRDLU: SI, EL BLOQUE AZUL.

36. *Eta Oin:* haga una torre.

SHRDLU: LO LAMENTO, NO CONOZCO LA PALABRA "TORRE".

Dr. Tony Earrwig: SHRDLU interrumpe de inmediato cuando ve una palabra que no conoce.

37. *Eta Oin:* una "torre" es una pila que contiene dos cubos verdes y una pirámide.

Dr. Tony Earrwig: Las comillas indican que usted está definiendo una nueva palabra. La definición es agregada al diccionario de SHRDLU, en una forma compatible con todas las palabras ya conocidas.

SHRDLU: ENTIENDO.

38. *Eta Oin:* ¿hay ahora alguna torre?

SHRDLU: NO.

Dr. Tony Earrwig: La nueva definición es utilizada como una descripción que permite reconocer torres.

39. *Eta Oin:* construya una.

SHRDLU: BIEN.

Dr. Tony Earrwig: La descripción brindada por la definición basta para deducir un plan de construcción de nuevos objetos y también para reconocerlos. La palabra "una" significa "una torre", y el plan es ejecutado. Primero, es liberado uno de los cubos verdes grandes mediante el desplazamiento del cubo rojo y de dos pirámides. Luego, los dos cubos verdes grandes y la pirámide roja alta son apilados con arreglo a la descripción.

40. *Eta Oin:* llamaremos "superbloque" al bloque más grande.

SHRDLU: BIEN.

Dr. Tony Earrwig: También se pueden asignar nombres a los objetos.

41. *Eta Oin:* ¿ha tomado el superbloque desde que comenzamos?

SHRDLU: SI.

42. *Eta Oin:* ¿por qué lo dejó caer?

SHRDLU: CON "LO", SUPONGO QUE QUIERE USTED SIGNIFICAR EL SUPERBLOQUE. NO PUEDO EXPLICAR UN ACONTECIMIENTO INEXISTENTE.

Dr. Tony Earrwig: No hay registro en la memoria de SHRDLU acerca de haber dejado caer ningún bloque. Las rutinas de respuesta cuentan con verificaciones especiales para este tipo de pregunta falaz, que presupone cosas que no son verdaderas.

43. *Eta Oin:* ¿hay algo a la derecha de la pirámide roja?

SHRDLU: SI, CUATRO COSAS: LA CAJA, EL CUBO ROJO, LA PIRAMIDE AZUL Y EL BLOQUE LLAMADO SUPERBLOQUE.

Dr. Tony Earrwig: Luego de serle asignado un nombre a un objeto, dicho nombre es empleado para ayudar a identificarlo en las respuestas.

44. *Eta Oin:* gracias.

SHRDLU: ¡DE NADA!

Dr. Tony Earrwig: La gramática de SHRDLU está formulada como un procedimiento, el cual brinda a SHRDLU la capacidad de realizar géneros peculiares de análisis idiomáticos.

CAPITULO XVIII

Inteligencia artificial: mirada retrospectiva

Turing



EN 1950, ALAN TURING escribió un artículo extraordinariamente profético e incitante sobre Inteligencia Artificial. Lo intituló "Computing Machinery and Intelligence" (Mecanismos computadores e inteligencia), y apareció en la revista *Mind*.[1] Haré diversos comentarios acerca de este artículo, pero antes quiero incluir algunos datos sobre la persona de Turing.

Alan Mathison Turing nació en Londres, en 1912; desde niño, se mostró pleno de curiosidad y de agudeza. Muy dotado en matemática, asistió a Cambridge, donde su interés por los mecanismos y por la lógica matemática se entrecruzaron fértilmente, lo cual trajo como resultado su célebre trabajo sobre "números computables", donde inventa la teoría de las máquinas Turing y de-

Figura 113. Alan Turing, luego de una carrera exitosa (mayo de 1950). [Tomado de: Sara Turing, Alan M. Turing *(Cambridge, U. K.: W. Heffer & Sons, 1959).]*

[1] Alan M. Turing, "Computing Machinery and Intelligence", *Mind*, Vol. LIX, No. 236 (1950). Reditado en: A. R. Anderson, ed., *Minds and Machines*.

muestra el carácter irresoluble del problema de la detención. En la década de los cuarenta, sus preocupaciones se volcaron, desde la teoría de los mecanismos computadores, hacia la construcción concreta de computadoras reales. Fue una de las principales figuras en el desarrollo de las computadoras en Gran Bretaña, y un tenaz defensor de la Inteligencia Artificial, cuando ésta comenzó a ser impugnada. Uno de sus mejores amigos fue David Champernowne (quien, más adelante, trabajó en la composición de música mediante computadoras). Champernowne y Turing fueron entusiastas ajedrecistas; inventaron el ajedrez "vuelta a la casa": después de mover, el jugador da una vuelta en torno a la casa; si regresa antes que su oponente haya jugado, tiene derecho a mover de nuevo. Ya más seriamente, Turing y Champernowne inventaron el primer programa jugador de ajedrez, el cual recibió el nombre de "Turochamp". Turing murió joven, a los cuarenta y un años, por razones accidentales, aparentemente vinculadas con el consumo de ciertos productos químicos. Hubo quienes hablaron de suicidio. Su madre, Sara Turing, escribió su biografía; de los testimonios que ella cita, se obtiene la impresión de que Turing no tuvo nada de convencional, y de que en cierto sentido careció completamente de tacto, pero que fue tan honesto y recto que ello lo hizo vulnerable al mundo. Amaba los juegos, el ajedrez, los niños y las carreras de bicicleta; fue un destacado corredor de fondo. En sus épocas de estudiante, en Cambridge, compró un violín de segunda mano y aprendió a tocar por sí mismo; pese a no tener una acendrada vocación musical, disfrutó mucho con esta actividad. Fue un tanto excéntrico, dado a entregar toda su energía a las orientaciones más dispares. Una de las áreas que investigó fue el problema de la morfogénesis en biología. Según su madre, Turing tenía "un particular apego por los *Pickwick Papers*", pero "la poesía, salvo la de Shakespeare, no significaba nada para él". Alan Turing fue un verdadero pionero en el campo de la ciencia de las computadoras.

La verificación Turing

El artículo de Turing comienza con la frase: "Me propongo considerar la pregunta '¿Las máquinas pueden pensar?'". Puesto que, como él señala, estos términos encierran una petición de principios, es obvio que debemos buscar un modo operacional de enfocar el problema. Dicho modo, sugiere Turing, está contenido en lo que él llama el "juego de la imitación", conocido actualmente como la *verificación Turing*. Este lo presenta de la siguiente manera:

> Lo juegan tres personas: un hombre (A), una mujer (B) y un interrogador (C), el cual puede pertenecer a cualquiera de ambos sexos. El interrogador permanece en una habitación que lo separa de las otras dos personas; su objetivo consiste en deter-

minar cuál de las dos personas restantes es el hombre y cuál la mujer. Los conoce bajo los rótulos X e Y, y al final del juego declara, o bien "X es A e Y es B", o bien "X es B e Y es A". Se le permite plantear este *tipo de preguntas* a A y a B:

C: Por favor, X, ¿querría decirme cómo son de largos sus cabellos?

Supongamos ahora que X es A, y que debe contestar; su objetivo en el juego es conseguir que C no acierte la identificación. Su respuesta, en consecuencia, podría ser:

"Tengo un corte escalonado de cabello, y los mechones más largos miden un poco más de veinte centímetros."

Para que el timbre de voz no pueda orientar al interrogador, las respuestas se darán por escrito o, *mejor todavía, mecanografiadas*. El dispositivo ideal sería una teleimpresora que comunique entre sí las dos habitaciones. Una alternativa posible es la intervención de un intermediario que transmita las preguntas y las respuestas. El objetivo del tercer jugador (B) es auxiliar al interrogador. Quizá su mejor estrategia sea brindar respuestas veraces, y puede agregar a sus respuestas expresiones tales como "La mujer soy yo, ¡no le haga caso a él!", aunque esto no servirá de mucho en la medida en que el hombre puede decir cosas *similares. Y ahora, planteamos* la pregunta: "¿Qué sucederá si A es sustituido por una máquina en este juego?" ¿Las equivocaciones del interrogador tendrán la misma frecuencia, jugando de este modo, que cuando los contendientes son un hombre y una mujer? Estas interrogaciones remplazan a la formulada inicialmente: "¿Las máquinas pueden pensar?".[2]

Luego de haber explicado la naturaleza de su verificación, Turing pasa a hacer algunos comentarios sobre la misma que, teniendo en cuenta el año en que fueron formulados, llaman la atención por sus refinadas profundizaciones. Para comenzar, imagina un breve diálogo entre interrogador e interrogado:[3]

P: Por favor, escríbame un soneto a propósito del Forth Bridge [un puente sobre el Golfo de Forth, en Escocia].
R: Me declaro vencido. Jamás podría escribir poesía.
P: Sume 34 957 y 70 764.
R: (Pausa de unos treinta segundos) 105.621.
P: ¿Juega ajedrez?
R: Sí.
P: Tengo R en R1R, y ninguna otra pieza. Usted tiene su R en R6R y T1T, además. Juega usted, ¿cómo mueve?
R: (Después de una pausa de 15 segundos) T8T, mate.

Pocos lectores advierten que, en el problema aritmético, no solamente hay una demora inusitada sino que, además, ¡la respuesta es errónea! Esto se explica fácilmente si quien responde es un ser humano: se trata de un simple error de cálculo. Pero si quien responde es una máquina, es posible una variedad de explicaciones. Algunas son éstas:

[2] Turing, en Anderson, p. 5.

[3] *Ibid.*, p. 6.

(1) un error de tiempo de proceso en el nivel del hardware (o sea, una casualidad irrepetible);
(2) un error no intencional en el hardware (o en la programación), causante de equivocaciones aritméticas (repetibles);
(3) una jugarreta deliberadamente insertada por el programador (o el constructor) de la máquina, que introduce errores aritméticos ocasionales con la finalidad de burlarse de los interrogadores;
(4) un epifenómeno inesperado: al programa le cuesta mucho pensar en forma abstracta, y simplemente cometió "una equivocación honesta", la cual puede no repetirse en la siguiente oportunidad;
(5) una broma jugada por la máquina misma, con el objeto deliberado de incomodar al interrogador.

La reflexión sobre lo que Turing pueda haber querido significa mediante este toque sútil desemboca, poco más o menos, en los principales problemas filosóficos relacionados con Inteligencia Artificial.

Turing sigue adelante, señalando que

> El nuevo problema tiene la ventaja de trazar una nítida delimitación entre las capacidades físicas e intelectuales del hombre . . . No le reprocharemos a una máquina su ineptitud para sobresalir en un concurso de belleza, ni a un hombre el hecho de que pierda una carrera frente a un aeroplano.[4]

Uno de los atractivos del artículo consiste en ver cómo Turing sigue las huellas de cada una de las líneas de pensamiento, haciendo aflorar, frecuentemente, una aparente contradicción en algún estadio, para luego resolverla mediante el refinamiento de sus conceptos, en un nivel de análisis más profundo. Esta hondura de penetración en los problemas es la causa de que el artículo mantenga un valor destacado, luego de treinta años de enormes progresos en el desarrollo de las computadoras y de intensa actividad en IA. La cita que sigue es ilustrativa de esta rica movilización de las ideas en todas direcciones:

> Quizá el juego pueda ser criticado desde el punto de vista de que las disparidades gravitan en exceso en contra de la máquina. Si el hombre se pusiera a tratar de ser la máquina, daría sin duda una exhibición muy pobre; sería descartado de inmediato por su lentitud e inexactitud aritméticas. ¿Las máquinas no pueden ejecutar determinadas cosas que deben ser descriptas como pensamiento, pero que son muy diferentes de lo que hace el hombre? Esta objeción es muy poderosa pero, al menos, podemos decir que no tenemos por qué preocuparnos por ella si, pese a todo, puede llegar a construirse una máquina que practique satisfactoriamente el juego de la imitación.
>
> Se podría postular que, cuando practique el "juego de la imitación", la mejor estrategia de la máquina sería, posiblemente, hacer algo distinto a imitar el com-

[4] *Ibid.*, p. 6

portamiento humano. Quizá sea así, pero creo poco probable que se obtengan resultados muy eficaces a través de ello. De cualquier manera, no existe la intención, aquí, de investigar la teoría del juego, y se dará por supuesto que la mejor estrategia radica en tratar de suministrar respuestas del tipo de las que daría normalmente un hombre.[5]

Luego de propuesta y comentada la verificación, observa Turing:

> Creo que la pregunta inicial, "¿Las máquinas pueden pensar?", es demasiado carente de significado como para merecer que se la discuta. No obstante, pienso que a fines de este siglo el uso de las palabras y la opinión general de la gente educada se habrán modificado tanto que será posible hablar de máquinas pensantes sin esperar que se susciten contradicciones.[6]

Turing se anticipa a las objeciones

Consciente de la tempestad de protestas que sin duda despertaría esta opinión, Turing procedió a detallar, en forma concisa y con ácido humor, una serie de objeciones a la noción de que las máquinas pudiesen pensar. Más abajo incluyo las nueve clases de objeción que él consideró, y combatió, junto con la descripción que hizo de ellas.[7] Lamentablemente, no contamos con espacio como para reproducir las ocurrentes e ingeniosas respuestas que formuló. El lector puede disfrutar evaluando por sí mismo las objeciones, y elaborando sus propias respuestas.

(1) *La objeción teológica.* El pensamiento es una función del alma inmortal del hombre. Dios ha dotado de un alma inmortal a todo hombre y a toda mujer, pero no a ningún otro animal ni a las máquinas. Luego, no hay animal o máquina que pueda pensar.

(2) *La objeción "No hay peor sordo . . .".* Si las máquinas pensaran las consecuencias serían pavorosas. Debemos esperar y creer que ello no puede suceder.

(3) *La objeción matemática.* [Se trata, esencialmente, de la argumentación de Lucas.]

(4) *La objeción de conciencia.* "Sólo cuando una máquina pueda escribir un soneto o componer un concierto gracias a que experimenta pensamientos y emociones, y no por una reunión casual de símbolos, aceptaremos que la máquina se equipara con el cerebro en cuanto a que, además de enunciar algo, sabe que lo ha hecho. Ningún mecanismo (como no sea a través de meras señales artificiales: una simple estratagema) puede sentir complacencia ante sus propios aciertos, aflicción cuando se funden sus válvulas, halago cuando es elogiado, autosubestimación frente a sus equivocaciones, inquietudes sexuales, cólera o depresión cuando sus deseos no se cumplen." [Cita de un tal profesor Jefferson.]

[5] *Ibid.*, p. 6.
[6] *Ibid.*, pp. 13-4.
[7] *Ibid.*, pp. 14-24.

Turing se muestra convencido de que debe dar acabada respuesta, con el mayor detalle, a todas estas graves objeciones. Así, dedica muy buen espacio a su argumentación, dentro de la cual aparece otro breve diálogo hipotético:[8]

Interrogador: En la primera línea de su soneto, que dice "Eres cual un día estival", ¿no sería lo mismo, o mejor, poner "un día primaveral"?
Testigo: Cambia el escandido.
Interrogador: ¿Y "un día invernal"? El escandido coincide perfectamente.
Testigo: Sí, pero a nadie le gusta que se lo asemeje a un día invernal.
Interrogador: ¿Diría usted que Mr. Pickwick le hace pensar en Navidad?
Testigo: En cierto modo.
Interrogador: Sin embargo, el de Navidad es un día invernal, y no creo que a Mr. Pickwick le moleste la comparación.
Testigo: No me parece que hable usted seriamente. Cuando se habla de un día invernal se hace alusión a un típico día de invierno, y no a un día especial como el de Navidad.

Luego de este diálogo, Turing pregunta: "¿Qué diría el profesor Jefferson si la máquina de escribir sonetos le respondiese de *viva voce* algo semejante?"

Las objeciones restantes:

(5) *Argumentación de las diversas incapacidades*. Este tipo de razonamiento adopta la siguiente forma: "Admito que pueda usted conseguir que las máquinas hagan todas las cosas que ha mencionado, pero usted nunca podrá conseguir que una máquina realice X." Son sugeridos numerosos rasgos de X, a este respecto. Ofrezco una selección: ser afectuosa, ingeniosa, bella, amistosa, tener iniciativa, tener sentido del humor, discriminar entre aciertos y errores, cometer equivocaciones, enamorarse, gozar de las fresas con crema, hacer que alguien se enamore de ella, aprender de la experiencia, usar adecuadamente las palabras, ser el tema de sus propios pensamientos, tener un comportamiento tan diversificado como el de un hombre, hacer algo realmente nuevo.

(6) *Objeción de Lady Lovelace*. La información más detallada con que contamos sobre la Máquina Analítica de Babbage proviene de una memoria al respecto de Lady Lovelace, quien incluye esta apreciación: "La Máquina Analítica no tiene la pretensión de *crear* nada. Puede hacer *todo aquello que sepamos cómo ordenarle* que haga" (el subrayado es de Lady Lovelace).

(7) *Argumento basado en la continuidad del sistema nervioso*. El sistema nervioso no es, por cierto, una máquina de estados discretos. Un pequeño error en la información relativa a las dimensiones del impulso nervioso que llega a una neurona puede significar una gran diferencia en las dimensiones del impulso de salida. Siendo así, puede sostenerse que no cabe confiar en la posibilidad de imitar el comportamiento del sistema nervioso mediante un sistema de estados discretos.

(8) *Argumento basado en la informalidad de la conducta*. Dice, poco más o menos, así: "Si cada hombre tuviera un conjunto definido de reglas de conducta para regir su vida, no estaría por encima de la máquina. Pero tales reglas no existen, de modo que los hombres no pueden ser máquinas."

[8] *Ibid.*, p. 17.

(9) *Argumento basado en la percepción extrasensorial.* Practiquemos el juego de la imitación, teniendo como testigo a un hombre calificado como receptor telepático. El interrogador puede plantear preguntas de esta clase: "¿A qué palo pertenece la carta que tengo en mi mano derecha?" El testigo, empleando la telepatía o la clarividencia, proporciona 130 respuestas correctas sobre 400 cartas. La máquina sólo puede hacer conjeturas al azar, y quizá obtenga 104 aciertos.

Como es fácil advertir, muchas de las objeciones se superponen y se asocian entre sí. En este libro, he pretendido dar respuesta, de un modo u otro, a la mayoría de aquéllas, aunque mucho menos concisamente, en general, que Turing.

Creo que la objeción (9) merece especial atención; también merece especial atención el hecho de que el trabajo de Turing haya sido reproducido, incluyéndolo en un libro, pero omitiendo dicha objeción. Mi punto de vista personal, opuesto al de Turing, es que la percepción extrasensorial no existe; Turing se resistía a aceptar la realidad de la misma, pero su admirable integridad científica lo llevó a considerarla, aceptando así los efectos de lo que él veía como una poderosa evidencia estadística en favor de la percepción extrasensorial. No estoy de acuerdo con este criterio, pese a lo cual estimo que se trata de una cuestión extraordinariamente compleja y atractiva.

"Parry se topa con el Doctor"

En el diálogo que precede a este capítulo, hemos presentado un auténtico intercambio entre un programa de computadora y un ser humano. Ahora bien, ha habido muchos programas menos capaces de "conversar" que SHRDLU. Dos de ellos, bastante famosos, son el "Doctor", creado por Joseph Weizenbaum, y "Parry", invención de Kenneth Colby. Está previsto que el primero simule a un psiquiatra que utiliza una terapia "no indicativa", y que el segundo simule la estructura de creencias de un paranoico. Mediante una red especial se combinó un choque frontal entre ambos programas, del que ofrecemos a continuación una breve muestra:[9]

Parry: No comprendo sus razones.
Doctor: ¿Por qué no comprende mis razones?
Parry: ¿Debería comprenderlas?
Doctor: ¿Por qué dice eso en este momento?
Parry: Porque de eso se trata.
Doctor: Supongamos que no se tratara de eso.
Parry: ¿Y entonces?
Doctor: Creo que no lo comprendo a usted muy bien.
Parry: Usted machaca demasiado con las mismas preguntas.
Doctor: ¿Y esa similitud entre las preguntas, qué le sugiere?

[9] Vinton Cerf, "Parry Encounters the Doctor", p. 63.

Parry: No lo entiendo a usted.
Doctor: ¿Querría entenderme?
Parry: Es por el interés que usted ha mostrado hacia mis sentimientos.
Doctor: ¡Oh! ¿He mostrado interés hacia sus sentimientos?

Estos programas, por supuesto, fueron ideados para hablar con seres humanos, de manera que su exhibición es bastante pobre aquí, donde han sido enfrentados entre sí. Principalmente, aquéllos se atienen a conjeturas sagaces acerca de la naturaleza de la entrada (que analizan muy superficialmente) y propinan respuestas seleccionadas con cuidado de entre un extenso repertorio previamente envasado. Las respuestas pueden estar envasadas sólo a medias: por ejemplo, un molde con espacios en blanco para llenar. Se da por supuesto que sus interlocutores humanos *leerán allí* muchas más cosas que las aceptadas por ellos mismos como efectivamente subyacentes al programa. En realidad, no es sino eso lo que sucede, según Weizenbaum, en su libro *Computer Power and Human Reason*, donde dice:

> ELIZA [el programa a partir del cual fue elaborado el Doctor] creaba la más completa ilusión de haber penetrado en las mentes de las muchas personas que conversaban con él . . . Con frecuencia, éstas solicitaban que se les permitiese conversar con el sistema en privado; luego de hacerlo durante un rato, insistían, a pesar de mis explicaciones, en que la máquina, realmente, los había comprendido.[10]

Lo relatado en este pasaje puede parecer increíble. Aun así, es la verdad. Weizenbaum cuenta con una explicación:

> La mayoría de los hombres no comprenden a las computadoras ni siquiera en una leve medida. Así, a menos que sean capaces de un muy gran escepticismo (el mismo que ejercitamos frente a una exhibición de magia), sólo pueden explicarse los logros intelectuales de las computadoras mediante la aplicación de la única analogía que está a su alcance: la que surge del modelo de su propia capacidad para pensar. No puede sorprender, entonces, que exageren las posibilidades; es verdaderamente imposible imaginar que un ser humano pueda imitar a ELIZA, por ejemplo, salvo que las aptitudes idiomáticas de ELIZA sean su límite.[11]

Esto equivale a la admisión de que esta clase de programa se basa en una perspicaz mixtura de bravata y estratagema audaz, volcadas a aprovecharse de la credulidad de la gente.

A la luz de este misterioso "efecto ELIZA", hay quienes han propuesto la necesidad de revisar la verificación Turing, ya que, por lo visto, la gente puede ser embaucada mediante artificios simples. Se ha sugerido que el interrogador debiera ser un científico Premio Nobel. Podría ser más aconsejable llevar a sus últimas consecuencias la verificación Turing, e insistir en que el interrogador sea otra computadora. O bien, quizá, tenga que haber dos interrogadores —un ser humano y una computadora— y

[10] Joseph Weizenbaum, *Computer Power and Human Reason*, p. 189.
[11] *Ibid.*, pp. 9-10.

un testigo, y que sean los dos interrogadores quienes resuelvan si el testigo es otro ser humano u otra computadora.

Hablando más seriamente, tengo la impresión personal de que la verificación Turing, tal como fue formulada originalmente, es por completo razonable. En cuanto a las personas que, según Weizenbaum, fueron engañadas por ELIZA, no se les requirió que actuasen escépticamente, o que empleasen todo su talento en tratar de determinar si "quien" estaba tecleando era un ser humano o no. Creo que el grado de penetración de Turing en este problema ha sido profundo, y que su verificación, inalterada en lo sustancial, habrá de seguir vigente.

A la luz de este misterioso "efecto ELIZA", hay quienes han propuesto la necesidad de revisar la verificación Turing, ya que, por lo visto, la gente puede ser embaucada mediante artificios simples. Se ha sugerido que el interrogador debiera ser un científico Premio Nobel. Podría ser más aconsejable llevar a sus últimas consecuencias la verificación Turing, e insistir en que el interrogador sea otra computadora. O bien, quizá, tenga que haber dos interrogadores —un ser humano y una computadora— y un testigo, y que sean los dos interrogadores quienes resuelvan si el testigo es otro ser humano u otra computadora.

Hablando más seriamente, tengo la impresión personal de que la verificación Turing, tal como fue formulada originalmente, es por completo razonable. En cuanto a las personas que, según Weizenbaum, fueron engañadas por ELIZA, no se les requirió que actuasen escépticamente, o que empleasen todo su talento en tratar de determinar si "quien" estaba tecleando era un ser humano o no. Creo que el grado de penetración de Turing en este problema ha sido profundo, y que su verificación, inalterada en lo sustancial, habrá de seguir vigente.

Breve historia de IA

En las páginas que siguen, querría presentar la historia, encarada quizá desde un punto de vista heterodoxo, de algunos de los esfuerzos dedicados a descifrar los algoritmos que hay detrás de la inteligencia; ha habido allí fracasos y retrocesos, y los seguirá habiendo. Sin embargo, es mucho lo que podemos aprender de este excitante período.

Desde Pascal y Leibniz, los hombres vienen imaginando la posibilidad de máquinas que realicen tareas intelectuales. Durante el siglo diecinueve, Boole y De Morgan idearon "leyes del pensamiento" —el cálculo proposicional, sustancialmente— que significaron el primer paso hacia el software de IA; Charles Babbage, por su parte, inventó la primera "máquina de calcular", convirtiéndose así en el precursor del hardware de las computadoras, y por consiguiente de IA. Se podría sostener que IA llega a la existencia en el momento en que las invenciones mecánicas toman a su cargo diversas tareas que, hasta entonces, únicamente eran realizables

por la mente humana. No es fácil echar una mirada retrospectiva e imaginar los sentimientos experimentados por los primeros que presenciaron la ejecución, a cargo de engranajes, de sumas y multiplicaciones de grandes números. Quizá sintieron un temor reverente, al ver cómo fluían "pensamientos" de un hardware estrictamente físico. De todas maneras, sabemos que, casi un siglo después, cuando se construyeron las primeras computadoras electrónicas, sus inventores experimentaron el sentimiento místico y sobrecogido de encontrarse en presencia de otra clase de "ser pensante". En qué medida había allí pensamiento real se planteó como un enorme enigma; aun hoy, varias décadas más tarde, este problema sigue siendo una fuente tanto de interés como de ferocidad polémica.

Es de hacer notar que, en la actualidad, prácticamente no hay quien sufra ya ese sentimiento de pavor, pese a que las computadoras efectúan operaciones increíblemente más sorprendentes que aquéllas capaces de provocar estremecimientos en las primeras épocas. La expresión otrora excitante de "Cerebro Electrónico Gigante" sólo se conserva como una suerte de clisé "camp", una huella risible de los tiempos de Flash Gordon y Buck Rogers. Es muy triste que nos sintamos blasé con tanta rapidez.

Hay un "Teorema" asociado al progreso de IA: una vez programada determinada función mental, la gente deja muy pronto de considerarla un ingrediente esencial del "pensamiento real". El núcleo irrefutable de la inteligencia siempre reside en esa zona contigua que todavía no ha sido programada. Este "Teorema" me fue presentado por Larry Tesler, por lo cual lo llamaré *Teorema de Tesler*: "IA es todo aquello que todavía no ha sido concretado".

Poco más abajo, se incluye un panorama selectivo de IA, que muestra los diversos dominios en los cuales han concentrado sus empeños los investigadores: cada uno manifiesta, a su modo particular, su requerimiento de convocar la quintaesencia de la inteligencia. Junto con algunos de los dominios, he incluido variantes adecuadas a los métodos empleados, o áreas de concentración más específicas.

traducción mecánica
- directa (diccionario de consulta, con determinado reordenamiento de palabras)
- indirecta (a través de la intermediación de un lenguaje interno)

práctica de juegos
- ajedrez
  - con anticipación basada en la fuerza bruta
  - con anticipación recortada heurísticamente
  - con ninguna anticipación
- damas
- go
- kalah

bridge (con y sin remate)
póker
variaciones del tres en raya
etc.

demostración de teoremas en diversas áreas matemáticas
lógica simbólica
"resolución" de demostración de teoremas
geometría elemental

manipulación simbólica de expresiones matemáticas
integración simbólica
simplificación algebraica
sumatoria de series infinitas

visión
material impreso:
reconocimiento de caracteres manuales individuales, extraídos de una clase pequeña (la de los numerales, por ejemplo)
lectura de textos en tipografía diversa
lectura de chino o de japonés en caracteres impresos
lectura de chino o de japonés en caracteres manuscritos

material ilustrativo:
ubicación de objetos previamente especificados, en fotografías
descomposición de una escena en objetos independientes
identificación de objetos independientes en una escena
reconocimiento de objetos pintados en bosquejos por personas
el reconocimiento de rostros de humanos

audición
comprensión de palabras enunciadas oralmente, extraídas de un vocabulario limitado (por ejemplo, los nombres de los diez dígitos)
comprensión de lenguaje oral correspondiente a áreas establecidas
hallazgo de las vinculaciones entre fonemas
identificación de fonemas
identificación de delimitaciones entre morfemas
identificación de morfemas
armado de palabras y oraciones completas

comprensión de lenguajes naturales
respuestas a preguntas referidas a dominios específicos
análisis de oraciones compuestas
elaboración de paráfrasis de tramos de textos más extensos
utilización de conocimientos acerca del mundo real para com-

prender pasajes
resolución de referencias ambiguas

producción de lenguaje natural
poesía abstracta (haikai, por ejemplo)
oraciones arbitrarias, parágrafos o tramos de texto más extensos
producción de resultados a partir de representaciones internas de conocimiento

creación de pensamientos originales o de obras artísticas
escritura de poesía (haikai)
escritura de relatos
arte computado
composición musical
atonal
tonal

pensamiento analógico
formas geométricas ("Tests de inteligencia")
elaboración de demostraciones en un dominio de la matemática, basadas en las de un dominio relacionado

aprendizaje
adaptación de parámetros
formación de conceptos

Traducción mecánica

Muchos de los tópicos precedentes no serán mencionados en los comentarios selectivos que haré más abajo, pero sin su inclusión la lista no sería completa. Los primeros tópicos están ubicados según un orden histórico. En cada uno de ellos, los esfuerzos iniciales desairaron las expectativas; por ejemplo, las complicaciones aparecidas en la traducción mecánica significaron una gran sorpresa para la mayoría de quienes habían creído que se trataba de una tarea directa, donde si bien sería arduo obtener la perfección, por cierto, la instrumentación básica tendría que ser sencilla. Tal como se vio, la traducción es mucho más compleja que un diccionario de consulta y reordenamiento de palabras. No se trata, tampoco, de una dificultad causada por la falta de conocimiento de las expresiones idiomáticas. El hecho es que la traducción involucra la necesidad de contar con un modelo mental del mundo del cual se habla, y de manipular los símbolos de ese modelo. Un programa que no emplee un modelo del mundo cuando lea un determinado pasaje pronto se verá irremisiblemente atascado en ambigüedades y significados múltiples. Inclusive las perso-

nas —dotadas de una inmensa ventaja frente a las computadoras, ya que están totalmente equipadas con una comprensión del mundo— encuentran casi imposible traducir un texto a su propio idioma, cuando emplean para conseguirlo solamente un diccionario del idioma que no conocen. Así —y esto no es sorprendente, observando las cosas desde la actualidad—, el primer problema de IA condujo de inmediato a los problemas centrales de IA.

Ajedrez por computadoras

El ajedrez por computadoras, por su parte, probó también ser mucho más dificultoso de lo que habían sugerido las estimaciones intuitivas iniciales. De nuevo aquí resulta que el modo en que los seres humanos representan una situación ajedrecística en sus mentes es mucho más complejo que el mero conocimiento de cuál pieza está en cuál cuadro, asociado con el conocimiento de las reglas del juego. Dicho modo implica la percepción de configuraciones integradas por diversas piezas relacionadas entre sí, tanto como el conocimiento de *heurísticas* o reglas de los saltos, las cuales están vinculadas a aquellos bloques de alto nivel. Aunque las reglas heurísticas no son rigurosas al modo de las reglas oficiales, abren atajos que permiten la captación de lo que está sucediendo en el tablero, cosa que no ocurre con las reglas oficiales. Esto fue claramente reconocido desde el principio; sencillamente, se subestimaba la importancia del papel llenado por la comprensión intuitiva y en bloques del mundo ajedrecístico con respecto a la habilidad humana en este campo. Se predijo alguna vez que un programa dotado de determinada heurística básica, aunada a la velocidad deslumbrante y a la exactitud de una computadora para efectuar anticipaciones y analizar cada posible movida, derrotaría fácilmente a los jugadores humanos de más alto nivel: esta profecía, aun después de veinticinco años de intensos esfuerzos por parte de diversos equipos de investigación, está muy lejos de haberse cumplido.

En la actualidad, el problema ajedrecístico está siendo asediado desde diversos ángulos. Uno de los más recientes implica la hipótesis de que la anticipación es una cosa sin interés; en su lugar, uno debe limitarse a observar lo que ocurre en el tablero en un momento determinado y, empleando algo de heurística, idear un plan; luego, hay que hallar una movida que vaya poniendo en práctica dicho plan. Por supuesto, las reglas para la formulación de planes ajedrecísticos involucrarán necesariamente recursos heurísticos que son, en algún sentido, versiones "aplanadas" de la anticipación. Es decir, el equivalente de muchas experiencias de anticipación es "comprimido" bajo otra forma, la cual, aparentemente, no abarca la anticipación. En cierto sentido, lo que hay aquí es un juego de palabras; pero si el conocimiento "comprimido" aporta respuestas más eficaces que la anticipación real, aun cuando conduzca ocasionalmente a

equivocaciones, algo se ha ganado. Ahora bien, esta destilación del conocimiento en formas perfeccionadas de utilización es precisamente algo en lo cual sobresale la inteligencia; luego, es probable que el ajedrez-no-anticipador sea una fructífera línea de investigación, a la que conviene impulsar. Sería particularmente atractivo diseñar un programa que pudiera, por sí mismo, convertir el conocimiento obtenido a través de la anticipación en reglas "aplanadas": pero esto significa una tarea inmensa.

El programa de damas de Samuel

En realidad, un método semejante fue desarrollado por Arthur Samuel en su admirable programa jugador de damas. El recurso de Samuel consistió en usar medios tanto *dinámicos* (anticipación) como *estáticos* (sin anticipación) para la evaluación de cualquier situación dada de tablero. El método estático involucra una función matemática simple de diversas cantidades que caracterizan a cualquier posición de tablero, la cual puede, así, ser calculada casi instantáneamente; el método de evaluación dinámica implica la creación de un "árbol" de movidas posibles, respuestas a las mismas, respuestas a las respuestas, y así siguiendo (como fue mostrado en la figura 38). En la función de la evaluación estática habrá ciertos parámetros que pueden variar; tal variación tiene como consecuencia la generación de un conjunto de diferentes versiones posibles de la función mencionada. La estrategia de Samuel consistió en seleccionar, en forma evolutiva, valores cada vez mejores de aquellos parámetros.

Esto fue conseguido del siguiente modo: cada vez que el programa evaluaba una situación de tablero, lo hacía estática y dinámicamente. La respuesta surgida de la anticipación —llamémosla D— era utilizada para determinar la movida por hacer. El objetivo de E, la evaluación estática, era más artificioso: en cada movida, los parámetros variables eran levemente reajustados de modo que E se aproximara con la mayor exactitud posible a D. La consecuencia era la codificación parcial, en los valores de los parámetros de evaluación estática, del conocimiento obtenido dinámicamente gracias al trazado del árbol. En resumen, la idea era "comprimir" el complejo método de la evaluación dinámica dentro de la mucho más simple y eficaz función de evaluación estática.

Hay aquí un efecto recursivo muy delicado. La cuestión radica en que la evaluación *dinámica* de una posición de tablero determinada implica la anticipación de un número finito de movidas, digamos siete. Pero cada uno de los montones de posiciones de tablero que pueden producirse en siete ocasiones en esta proyección tienen que, a su vez, ser evaluados de alguna manera. Pero cuando el programa evalúa estas posiciones, ciertamente no puede anticipar otras siete movidas, pues debería anticipar catorce movidas, luego veintiuna, etc.: una regresión infinita. En lugar de ello, se apoya en la evaluación *estática* de las posiciones correspondientes

a una proyección de siete movidas. Por lo tanto, en el esquema de Samuel tiene lugar un intrincado género de retroalimentación, donde el programa está tratando permanentemente de "comprimir" la evaluación anticipatoria dentro de una fórmula estática más simple; y esta fórmula, a su vez, juega un papel clave en la evaluación dinámica anticipatoria. Ambas vertientes, entonces, están íntimamente ligadas, y cada una aprovecha los perfeccionamientos logrados por la otra, de una manera recursiva.

El nivel de juego del programa de damas de Samuel es extraordinariamente elevado: equivalente al de los mejores jugadores del mundo. Si es así, ¿por qué no aplicar la misma técnica al ajedrez? Una comisión integrada por miembros de diversos países, incluyendo al matemático y gran maestro internacional danés Max Euwe, convocada en 1961 para estudiar la factibilidad del ajedrez por computadora, llegó a la desoladora conclusión de que la técnica de Samuel sería aproximadamente un millón de veces más difícil de aplicar al ajedrez que a las damas, y que esto parecía dar por cerrado el libro a este respecto.

La capacidad sumamente notable del programa de damas no puede ser tomada como base para decir: "la inteligencia ha sido lograda"; no obstante, tampoco se la debe minimizar. Es una combinación de penetraciones en lo que es el juego de damas, cómo pensar acerca de éste y cómo efectuar la programación. Hay quienes pueden sospechar que todo lo que aquélla muestra es la propia capacidad de Samuel para jugar a las damas. Pero esto no es cierto, cuando menos por dos razones: una, la de que los jugadores de damas de alta calidad determinan sus movidas con arreglo a procesos mentales que ellos mismos no comprenden en su totalidad: emplean sus intuiciones, y no existe ninguna forma conocida de arrojar luz sobre las propias intuiciones; cuando mucho, uno puede, por vía de introspección, apelar a la "impresión" o a la "metaintuición" —una intuición a propósito de las intuiciones propias— como guía, y tratar de describir a qué cree uno que se refieren las propias intuiciones. Pero esto no brindará sino una rudimentaria aproximación a la verdadera complejidad de los métodos intuitivos. De aquí emana la certidumbre virtual de que Samuel no ha reflejado, en su programa, sus métodos personales de juego. La otra razón por la cual el juego que practica el programa de Samuel no debe ser confundido con el juego personal de Samuel es que Samuel no juega tan bien a las damas como su programa: éste le gana. Esto no es en absoluto paradójico; no más que el hecho de que una computadora programada para calcular π despiste a su programador vomitando, interminablemente, dígitos de π.

¿Cuándo es original un programa?

El problema de un programa que sobresale con respecto a su programador está vinculado con la cuestión de la "originalidad" en IA. ¿Qué suce-

de si un programa IA se aparece con una idea, o una línea táctica en un juego, que el programador jamás consideró? ¿A quién corresponde el mérito? Han ocurrido varios interesantes casos de este tipo, algunos en un nivel enteramente trivial, otros en un nivel mucho más profundo. Uno de los más célebres tuvo lugar con un programa para hallar demostraciones de teoremas, en el campo de la geometría euclidiana elemental, formulado por E. Gelernter. Un día, el programa obtuvo una demostración deslumbrantemente ingeniosa de uno de los teoremas fundamentales de la geometría, el denominado "pons asinorum" o "puente de peaje".

Dice este teorema que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales. La prueba habitual requiere el trazado de una altura, la cual divide al triángulo en mitades simétricas. El elegante método descubierto por el programa (véase la figura 114) no empleó el trazado de ninguna línea. En lugar de ello, consideró al triángulo y a su imagen reflejada como dos triángulos diferentes. Luego, habiendo probado que ambos eran congruentes, señaló que los dos ángulos de la base se equiparaban entre sí en esta congruencia: *quod erat demonstrandum.*

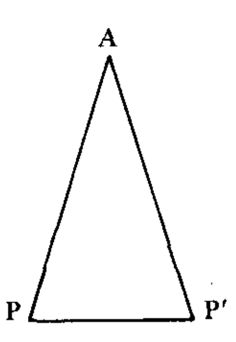


Figura 114. Prueba Pons Asinorum (descubierta por Pappus [~300 A. D.] y el programa de Gelernter [~1960 A. D.]). Problema: Mostrar que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales. Solución: Como el triángulo es isósceles, AP y AP' tienen igual longitud. Por lo tanto, los triángulos PAP' y P'AP son congruentes (lado-lado-lado). Esto implica que los ángulos correspondientes son iguales. Específicamente, los dos ángulos de la base son iguales.

Esta joya de demostración deleitó al creador del programa y a otras gentes; algunos vieron en ella evidencias de genialidad. Sin ánimo de empañar esta hazaña, digamos que, en el 300 A. D., el geómetra Pappus ya había descubierto esta demostración. De todas maneras, la interrogación sigue en pie: "¿A quién corresponde el mérito?" ¿Esto es un comportamiento inteligente? ¿O la demostración se encontraba profundamente oculta en el ser humano (Gelernter), y la computadora se limitó a traerla a la superficie? Esta última pregunta se acerca al centro del blanco. Podemos invertirla: ¿La demostración se encontraba profundamente oculta en el programa? ¿O estaba próxima a la superficie? Es decir, ¿hasta qué punto es fácil ver por qué el programa actuó como actuó? ¿El descubrimiento puede ser atribuido a un mecanismo simple, o a una simple combinación de mecanismos, en el programa? ¿O hubo una compleja interacción que, aun cuando nos fuese explicada, no amenguaría nuestra admiración reverencial cuando ocurriese?

Parece razonable presumir que, si uno puede atribuir el logro a determinadas operaciones que son fácilmente rastreables en el programa, en algún sentido, entonces, el programa sólo estaba revelando ideas escondidas en su esencia —aunque no muy profundamente— en la propia mente del programador. A la inversa, si el seguimiento del programa no sirve para esclarecernos en cuanto a por qué surgió este descubrimiento particular, quizá debiéramos comenzar a separar la "mente" del programa de la de su programador. Al ser humano le corresponde el mérito de haber inventado el programa, pero no por haber tenido en su propia cabeza las ideas producidas por el programa. Entonces, podemos decir que el ser humano es el "metautor" —el autor del autor del resultado— y que el programa es (lisa y llanamente) el autor.

En el caso particular de Gelernter y su máquina de geometría, es probable que Gelernter no hubiera redescubierto la demostración de Pappus; sin embargo, los mecanismos que generaron la demostración se encontraban lo suficientemente próximos a la superficie como para que uno vacile en decir que el programa es un geómetra por derecho propio. Si aquél hubiera continuado asombrando mediante el hallazgo repetido de nuevas demostraciones ingeniosas, cada una de las cuales diese la impresión de brotar de un nuevo chispazo de genialidad, y no de un método estándar, uno no tendría escrúpulo alguno, *entonces*, en llamar geómetra al programa: pero no es esto lo que ha sucedido.

¿Quién compone la música de computadora?

La distinción entre autor y metautor es nítidamente establecida en el caso de la composición de música por computadora. En el acto de la composición, un programa puede impresionar como poseedor de diversos niveles de autonomía. Un nivel es ejemplificado por una pieza cuyo "metautor" es Max Mathews, de Bell Laboratories, quien tomó las partituras de dos marchas, "When Johnny Comes Marching Home" y "The British Grenadiers", e instruyó a la computadora para que elaborara una nueva partitura, la cual debía comenzar como "Johnny" y luego, lentamente, identificarse con "Grenadiers". A mitad del transcurso de la pieza, "Johnny" se extingue por completo, y lo que se oye es "Grenadiers" . . . Entonces, el proceso se invierte, y la pieza finaliza con "Johnny", reiterando la situación del comienzo. Según las propias palabras de Mathews, esto es

> . . . una nauseabunda experiencia musical, aunque no carente de interés, particularmente en materia de conversiones rítmicas. "The Grenadiers" está compuesta en tiempo de 2/4, en la tonalidad de Fa mayor. "Johnny" está compuesta en tiempo de 6/8, en la tonalidad de Mi menor. El cambio de 2/4 a 6/8 puede ser apreciado con claridad, pero a un músico humano le sería muy difícil ejecutarlo. La modulación de la tonalidad de Fa mayor a la de Mi menor, que implica un cambio de dos notas

en la escala, es discordante; sin duda, una transición más breve habría sido una elección mejor.[12]

La pieza resultante tiene la cualidad de ser un tanto festiva, pese a que por momentos es pomposa y confusa.

¿Lo que está haciendo la computadora es componer? Lo mejor sería que esta pregunta no apareciese, *pero no* puede ser completamente ignorada. Es difícil suministrar una respuesta. Los algoritmos son deterministas, simples y compren*sibles*. No hay envueltas computaciones complicadas o de ardua comprensión; no se ha utilizado ningún programa de "aprendizaje"; no ocurre ningún proceso fortuito; la máquina *funciona* de manera perfectamente mecánica y normal. Empero, el resultado es una secuencia de sonidos que, en el orden de los deta*lles finos*, *no* ha sido prevista por el compositor, aunque la estructura global del fragmento haya sido completa y precisamente especificada. Así, el compositor se ve a menudo sorprendi*do*, y gratamente, por los detalles que dan concreción a sus ideas. Es solamente en esta medida que la computadora compone. *Llamamos composición* al proceso algorítmico, pero de inmediato volvemos a subrayar que los algoritmos son transparentemente simples.[13]

Esta es la respuesta de Mathews a una pregunta que él preferiría marginar. Pese al carácter negativo de esta respuesta, mucha gente halla más sencillo decir simplemente que la pieza fue "compuesta por una computadora". Creo que esta expresión desfigura totalmente la situación. El programa carece de estructuras análogas a los "símbolos" del cerebro, por lo cual no se puede afirmar, en el sentido que fuere, que está "pensando" en lo que está haciendo. Atribuir la composición de este género de pieza musical a la computadora sería como atribuir la autoría de este libro a la máquina, computada automáticamente, de fotocomposición con espacios compensados (incorrectamente, a menudo), con la que se compone.

Esto plantea una pregunta que constituye una ligera digresión con respecto a IA, para nada enorme, de verdad. Cuando vemos las formas "yo", "mí" o "me" en un texto, ¿a qué las referimos? Por ejemplo, pensemos en la expresión "BAÑAME", que a veces se ve en la parte de atrás de nada limpios camiones de carga. ¿Quién es este "me"? ¿Es el reclamo de un niño mal atendido, quien, desesperado por gozar de un baño, escribió aquella palabra en la primera superficie que encontró? ¿O es el camión el que reclama un baño? ¿O, tal vez, sea la expresión misma, deseosa de tomar una ducha? ¿O será que nuestro idioma está pidiendo que se lo purifique? Se podría seguir y seguir en este juego de conjeturas. En el caso presente, la expresión es bromista, destinada a hacer suponer, en determinado nivel, que el camión mismo la ha escrito para exigir una buena

[12] M. Mathews y L. Rosler, "A Graphical Language for Computer Sound", en H. von Foerster y J W. Beauchamp, editores, *Music by Computers*, p. 96.
[13] *Ibid.*, p. 106.

lavada. En otro nivel, uno reconoce la inscripción como si fuera formulada por un niño, y disfruta lo gracioso de la malinterpretación. Lo que tenemos aquí, en realidad, es un juego basado en la lectura de "me" en un nivel erróneo.

Esta clase de ambigüedad, precisamente, aparece en este libro, primero en el *Contracrostipunto*, y después en las exposiciones relativas a la cadena G de Gödel (y sus familiares). La interpretación dada a los discos inejecutables rezaba: "No puedo ser escuchado mediante el Fonófrago X", y la correspondiente a los enunciados indemostrables era: "No puedo ser demostrado en el Sistema Formal X". Tomemos esta última oración: ¿en qué otra ocasión, si es que hubo alguna, nos hemos topado con una oración cuyo "yo" —tácito, en este caso— nos hace entender automáticamente que no se refiere al emisor de la oración, sino a la oración misma? Presumo que muy poco frecuentemente. Cuando la palabra "yo" aparece en un soneto de Shakespeare no está haciendo referencia a una forma poética de catorce versos, impresa en una página, sino a un ser de carne y hueso ubicado tras el escenario, en algún sitio entre bambalinas.

¿Hasta dónde rastreamos, por lo común, el "yo" de una oración? La respuesta, según creo, es que buscamos un ser consciente a quien adjudicarle la autoría de aquélla. Pero, ¿qué es un ser consciente? Alguna cosa en la cual podamos proyectarnos con comodidad. En el programa "Doctor" de Weizenbaum, ¿hay una personalidad? Si es así, ¿la personalidad de quién? Un breve debate sobre esta misma pregunta se suscitó hace poco en las páginas de la revista Science.

Esto nos devuelve al problema del "quien" que compone la música de computadora. En la mayoría de las ocasiones, la fuerza conductora que hay detrás de ese tipo de piezas es un intelecto humano, y la función de la computadora reside en su utilización, con mayor o menor ingenuidad, como *herramienta* que concrete una idea creada por un ser humano. El programa que cumple este propósito no tiene nada con lo cual podamos identificarnos. Es una simple y monofuncional pieza de hardware, carente de flexibilidad, de perspectiva acerca de lo que está haciendo, y de sentido de sí misma. No obstante, si la gente desarrolla programas que tengan esos atributos, y de ellos comienzan a surgir piezas de música, una tras otra, habrá llegado el momento indicado para repartir nuestra admiración: parte para el programador, por crear un programa tan pasmoso, y parte para el programa mismo por su sentido musical. Se me ocurre que esto tendrá lugar únicamente cuando la estructura interna de un programa de esta clase se base en algo similar a los símbolos de nuestro cerebro y a sus patrones de desencadenamiento, los cuales son responsables de la compleja noción de significación. El hecho de tener este género de estructura interna dotaría al programa de propiedades que nos permitirían identificarnos cómodamente con él, en alguna medida. Entretanto, no nos sentiremos cómodos diciendo "esta pieza fue compuesta por una computadora".

Demostración de teoremas y reducción de problemas

Retornemos a la historia de IA. Una de las primeras que se intentaron programar fue la actividad intelectual de demostrar teoremas. Conceptualmente, esto no difiere de programar una computadora para que persiga una derivación de MU en el sistema MIU, salvo que los sistemas formales involucrados allí eran por lo común más complicados que el sistema MIU. Se trataba de versiones del cálculo de predicados, el cual es una extensión del cálculo proposicional que abarca cuantificadores. La mayor parte de las reglas del cálculo de predicados fue incluida, en realidad, en TNT. Un recurso promisorio, cuando es formulado un programa así, consiste en infundirle un sentido de dirección, de modo que, en lugar de vagar por todo el campo, el programa actúe exclusivamente dentro de recorridos "pertinentes": aquellos que, por aplicación de algún criterio razonable, parecen conducir hacia la cadena buscada.

En este libro no hemos tenido mayor contacto con tales problemas. Por cierto, ¿cómo saber cuándo se está avanzando hacia un teorema, y cómo asegurarse de no estar disparando con cartuchos vacíos? Esto es algo que yo confié en ilustrar mediante el acertijo MU. Ciertamente, no puede haber respuesta definitiva: tal es el contenido de los Teoremas limitativos, puesto que si siempre se pudiese saber qué camino seguir, se podría construir un algoritmo para la demostración del teorema que se quiera, y ello sería violatorio del Teorema de Church. No existe semejante algoritmo. (Dejo a cargo del lector advertir con exactitud por qué se desprende esto del Teorema de Church.) Con todo, lo anterior no significa que sea totalmente imposible desarrollar ninguna intuición relativa a cuál es y a cuál no es una ruta más fértil; en los hechos, los mejores programas cuentan con una heurística muy elaborada, que les permite efectuar deducciones en materia de cálculo de predicados a velocidades comparables a las de los seres humanos expertos.

El mejor expediente para la demostración teoremática es utilizar el hecho de que se tiene un objetivo global —la cadena que se desea producir— gracias al cual orientarse localmente. Una técnica desarrollada para transformar objetivos globales en estrategias de derivación locales ha recibido el nombre de *reducción del problema.* Está basada en la idea de que, cuando se persigue un objetivo de largo alcance, existen por lo general *subobjetivos* cuyo cumplimiento contribuirá al del objetivo principal. Por consiguiente, si uno fragmenta un problema dado en una serie de subproblemas, y luego divide éstos en subsubproblemas, y así siguiendo, de manera recursiva, obtendrá finalmente objetivos sumamente modestos que, presumiblemente, podrán ser satisfechos con un par de pasos. Al menos, así pareciera ser . . .

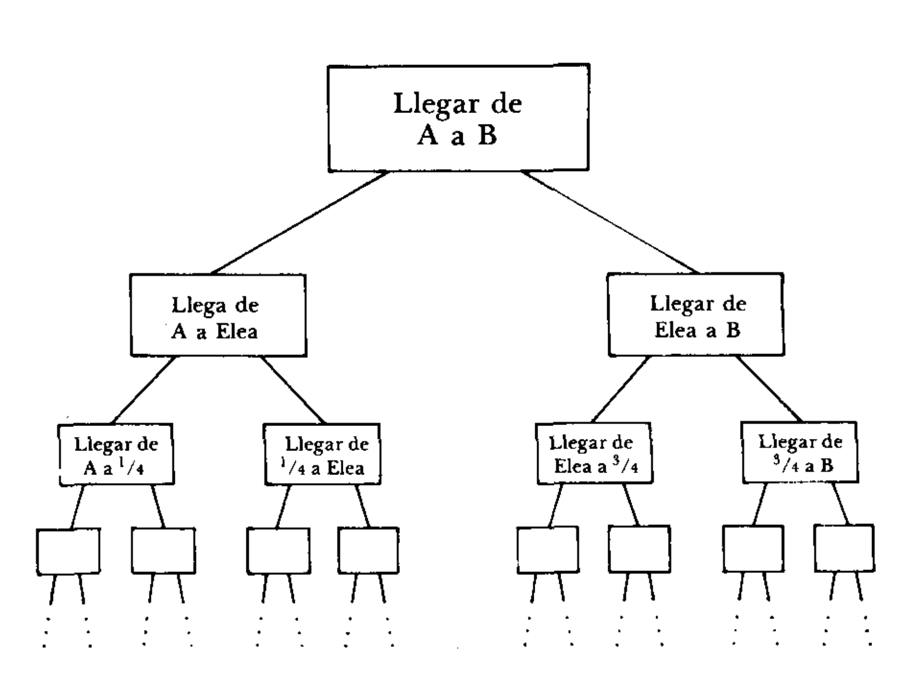
La reducción del problema puso a Zenón en un gran apuro. Como se recordará, el método de Zenón para llegar a B, desde A (siendo B, en consecuencia, el objetivo), consiste en "reducir" el problema a dos

subproblemas: recorrer primero la mitad del camino, y luego la otra mitad. Ahora, pues, tenemos que han sido "desplazados" —en el sentido del Capítulo V— dos subobjetivos hacia la "pila de objetivos". Cada uno de éstos, a su vez, será sustituido por dos subsubobjetivos, y así *ad infinitum*. Se acabará contando con una pila de objetivos infinita, en lugar de un objetivo único (figura 115). Recuperar un número infinito de objetivos acumulados en la pila se demostrará una tarea llena de resbalosas complicaciones . . . lo cual es, precisamente, el conflicto de Zenón.

Otro ejemplo de recursividad infinita en una reducción del problema se presenta en el diálogo *Pequeño Laberinto Armónico*, cuando Aquiles pide que se lé conceda un Deseo Atípico. La concesión de éste debe ser postergada hasta que se obtenga la autorización del Meta-Genio; pero éste, a su vez, debe ser autorizado a dar autorización, para conseguir lo cual invoca al Meta-Meta-Genio, . . . etc. Pese a la infinitud de la pila de objetivos, a Aquiles se le concedió su deseo. ¡Victoria de la reducción del problema!

Figura 115. Arbol sin fin del objetivo de Zenón, para ir de A a B.

A ⅛ ¼ ⅜ Elea ⅝ ¾ ⅞ B



Fuera de toda broma, se ha de reconocer que la reducción del problema es una técnica eficaz para transformar problemas globales en problemas locales. Se distingue en ciertas situaciones, como por ejemplo en la perse-

cución de propósitos en el juego de ajedrez, allí donde la técnica anticipatoria rinde a menudo resultados muy pobres, aun siendo llevada a extensiones risibles, tales como de quince dobleces o más. Esto se debe a que la técnica anticipatoria no está basada en el *planeamiento*; sencillamente, carece de objetivos y explora una enorme cantidad de posibilidades inertes. Contar con un objetivo facilita el desarrollo de una estrategia para el logro del mismo, lo cual configura una filosofía totalmente distinta a la de la anticipación mecánica. Por supuesto, en la técnica anticipatoria la conveniencia o inconveniencia es medida por la función de evaluación de las posiciones, y ello incorpora, indirectamente, una cantidad de objetivos, en forma principal el de evitar el jaque mate. Pero esto es demasiado indirecto. Los buenos jugadores de ajedrez que han competido con programas de anticipación quedan con la impresión de que estos últimos son muy débiles en cuanto a la formulación de planes o de estrategias.

Firuláis y el hueso

No hay garantías de que el método de reducción de problemas funcione; en muchas ocasiones fracasa. Consideremos, por ejemplo, un problema sencillo: imagine el lector que es un perro, y que un ser humano amigo le ha arrojado su hueso predilecto en otro patio, separado de usted por una cerca de alambre. Usted puede ver su hueso a través de los hilos metálicos, ¡esa exquisitez, reposando allí sobre la hierba! Hay una puerta abierta en la cerca, ubicada a unos veinte metros del hueso. ¿Qué hace usted? Algunos perros se acercan a la valla, se detienen junto a ella, y se ponen a ladrar; otros se precipitan hacia la puerta y completan el recorrido hasta el encantador hueso. Puede decirse que ambos perros han puesto en práctica la técnica de la reducción del problema; pero cada uno de ellos ha representado el problema, en su mente, de manera distinta, y allí reside toda la diferencia. El perro que ladra ve así los subproblemas: (1) acercarse a la valla; (2) atravesarla, y (3) llegar hasta el hueso . . . pero ese subproblema (2) es un "problemón", y de allí los ladridos. El otro perro subdivide así: (1) llegar a la puerta; (2) atravesarla; (3) llegar hasta el hueso. Adviértase que todo depende del modo en que sea representado el "espacio del problema", es decir, de lo que uno perciba como "reductor" del problema (movimiento hacia adelante que acerca al objetivo global), y como "magnificador" del problema (movimiento hacia atrás que aleja del objetivo).

Transformación del espacio del problema

Algunos perros intentan dirigirse primero, directamente, hacia el hueso, y cuando se topan con la cerca, algo se enciende en su cerebro: no demo-

ran en cambiar de curso, y encaminarse hacia la puerta. Estos perros entienden que, lo que a primera vista parecía que *incrementaba* la distancia entre la situación inicial y la perseguida —a saber, el alejarse del hueso pero aproximarse a la puerta—, en realidad la hace *decrecer*. Al comienzo, confunden la distancia *física* con la distancia del *problema*. Cualquier movimiento que aleje del hueso parece, por definición, una Mala Cosa; pero luego —de alguna manera— comprenden que pueden cambiar su percepción acerca de qué los llevará "más cerca" del hueso. En un espacio abstracto adecuadamente elegido, ¡moverse hacia la *puerta* es una trayectoria que lleva al perro más cerca del hueso! En todo momento, el perro está ubicándose "más cerca" —en este nuevo sentido— del hueso. De este modo, la utilidad de la reducción del problema depende de cómo nos representemos mentalmente el problema del cual se trate. Lo que en un espacio parece un retroceso, en otro puede verse como un revolucionario paso adelante.

En la vida cotidiana, constantemente enfrentamos y resolvemos variantes del problema perro-hueso. Por ejemplo, si una tarde decido trasladarme ciento cincuenta kilómetros hacia el sur, pero estoy en mi oficina, a la cual he ido en bicicleta, tengo que efectuar una cantidad sumamente extensa de movimientos hacia direcciones aparentemente "erróneas" antes de encontrarme encaminado, a bordo de un automóvil, directamente hacia el sur. Tengo que dejar mi oficina, lo que significa, digamos, dirigirme unos pasos al este, y atravesar luego la antesala del edificio, lo cual requiere moverse hacia el norte, y luego hacia el oeste. Después, tomo la bicicleta y emprendo la marcha hacia mi casa: esto implica desplazamientos hacia todas las direcciones del compás. Completado este recorrido, debo realizar una sucesión de movimientos breves hasta que por fin abordo mi automóvil, y salgo. Por supuesto, no estaré rumbo al sur de inmediato, ya que opto por un recorrido que puede incluir ciertos avances hacia el norte, el oeste o el este, con la finalidad de llegar cuanto antes a la carretera.

Todo esto no es sentido como paradójico, en lo más mínimo, ni provoca ningún sentimiento de extrañeza. El espacio dentro del cual el retroceso físico es percibido como movimiento directo hacia el objetivo está asentado tan profundamente en mi mente que no encuentro nada raro cuando estoy recorriendo un tramo hacia el norte. Los pasillos, calles, etc., actúan como canales que acepto sin gran resistencia, de modo que una parte del acto de decidir cómo percibir la situación implica simplemente la aceptación de lo que es impuesto. Sin embargo, a veces los perros situados frente a la cerca tienen gran dificultad para proceder así, especialmente si el hueso está muy próximo a ellos, totalmente a la vista y exhibiendo un aspecto altamente apetitoso. Y, cuando el espacio del problema es sólo ligeramente diferente del espacio físico, es común que las personas no atinen a acertar con lo que cabe hacer, tal cual como los perros que se ponen a ladrar.

En algún sentido, todos los problemas son versiones abstractas del problema perro-hueso. Muchos problemas no residen en el espacio físico sino en determinado género de espacio conceptual. Cuando se comprende que el desplazamiento directo hacia el objetivo llevará a toparse con alguna suerte de "cerca" abstracta, es posible optar por una de dos cosas: (1) comenzar a alejarse del objetivo, a través de movimientos más bien casuales, a la espera de hallar una "puerta" oculta que pueda ser atravesada, lo que dejaría expedito el camino hacia el hueso; o (2) tratar de descubrir un nuevo "espacio" *dentro* del cual poder representar el problema, y donde no exista ninguna cerca abstracta que aísle el objetivo; luego, se podrá avanzar directamente hacia éste, en ese nuevo espacio. El primer método puede impresionar como una forma holgazana de proceder, y el segundo como una forma difícil y complicada. No obstante, las soluciones que involucran la restructuración del espacio del problema aparecen frecuentemente bajo la forma de súbitos relámpagos de penetración, antes que como productos de lentos y deliberados procesos de pensamiento. Es probable que estos relámpagos intuitivos provengan del corazón mismo de la inteligencia y, obvio es decirlo, su fuente es un secreto rigurosamente protegido de nuestro receloso cerebro.

En cualquier caso, la cuestión no reside en que la reducción del problema, *per se*, conduzca a resultados negativos; es una técnica cabalmente eficaz. El dilema es más profundo: ¿cómo establecer una adecuada representación interna de un problema? ¿Qué clase de "espacio" es el que se ha de considerar? ¿Qué tipos de acción reducen la "distancia" que nos separa del objetivo, en el espacio por el cual hemos optado? Esto puede ser expresado en lenguaje matemático como la búsqueda de una adecuada *métrica* (función de distancia) entre estados. Se necesita descubrir una métrica en la cual la distancia entre nosotros y nuestro objetivo sea muy corta.

Ahora bien, puesto que este asunto de determinar una representación interna es, en sí mismo, un tipo de problema, ¡deberíamos tratar de aplicarle la técnica de reducción del problema! Para conseguirlo, deberíamos contar con la posibilidad de representar una inmensa variedad de espacios abstractos, lo cual significa un proyecto extraordinariamente complejo. No estoy enterado de que nadie haya intentado algo semejante; quizá se trate tan sólo de una atractiva y curiosa propuesta teórica pero totalmente irreal, en los hechos. De todas maneras, en IA hay una angustiosa carencia de programas que puedan "retornar sobre sus pasos" y echar un vistazo sobre lo que están haciendo, de donde surgiría una perspectiva que los reorientaría con respecto a la tarea entre manos. Una cosa es formular un programa que vaya más allá de una tarea única que, si es cumplida por un ser humano, parece requerir inteligencia, ¡y otra cosa absolutamente distinta formular un programa inteligente! Es la diferencia entre la avispa Sphex (véase Capítulo XI), cuya rutina rígida ofrece la

apariencia engañosa de una gran inteligencia, y un ser humano que esté observando la avispa Sphex.

La vía I y la vía M, otra vez

Un programa inteligente debería ser, presumiblemente, aquel lo suficientemente versátil como para resolver problemas de muy diferente índole. Aprendería a conseguirlo de un modo distinto en cada caso y ello le significaría la acumulación de experiencia. Sería capaz de funcionar dentro de un juego de reglas pero también, en los momentos indicados, volvería sobre lo actuado y elaboraría una estimación acerca de si tal juego de reglas tiene la aptitud necesaria, con relación al conjunto global de objetivos que se persiguen. Sería capaz de detener el funcionamiento dentro de una sistemática determinada y, si es necesario, crear un nuevo sistema de reglas para que enmarquen, durante un lapso, el trabajo.

Muchas de estas reflexiones pueden hacer pensar en rasgos del acertijo MU. Por ejemplo, alejarse del objetivo de un problema recuerda el movimiento que aleja de MU mediante la construcción de cadenas más y más largas, de las que se espera puedan conducir, indirectamente, a la obtención de MU. Si uno es un "perro" ingenuo, sentirá que se está alejando de su "hueso MU" toda vez que su cadena se agrande en más de dos caracteres; si, en cambio, se es un perro más sutil, se verá en el empleo de las reglas de ampliación un fundamento indirecto, algo así como la orientación hacia la puerta que lleva al hueso MU.

Hay otras conexiones con el acertijo MU, tales como las dos modalidades de operación que permiten internarse en la naturaleza del acertijo: la vía Mecánica y la vía Inteligente. En la primera, uno se encaja en el interior de determinado enmarcamiento fijo; en la segunda, siempre es posible alejarse unos pasos y observar panorámicamente las cosas. Esto último equivale a elegir una representación dentro de la cual actuar; y actuar dentro de las reglas del sistema es equivalente a ensayar la técnica de la reducción del problema en el interior de tal enmarcamiento seleccionado. Los comentarios de Hardy a propósito del estilo de Ramanuyan —en particular, su disposición a modificar sus propias hipótesis— ilustran esta interacción, en el pensamiento creativo, entre la vía M y la vía I.

La avispa Sphex opera magníficamente en la vía M, pero carece de toda habilidad para elegir su enmarcamiento o, inclusive, para modificar en lo más mínimo su vía M. Tampoco es capaz de advertir que está ocurriendo una y otra vez la misma cosa en su sistema, pues advertirlo constituiría un brinco fuera del sistema, por muy pequeña que fuere la medida en que ello ocurra. Lisa y llanamente, la avispa no se percata de la similitud de las repeticiones. Este fenómeno (el de no caer en la cuenta de la identidad que caracteriza a ciertos hechos repetitivos) se vuelve inte-

resante cuando nos lo aplicamos a nosotros mismos. ¿Existen situaciones repetidas, que se producen muchas veces en nuestras vidas y a las que manejamos en cada ocasión de la misma tonta manera, porque carecemos de la amplitud de panorama necesaria para percibir su similitud? Esto nos lleva de nuevo a aquel tema recurrente, "¿Qué es la similitud?" Pronto lo veremos reaparecer bajo la forma de problema de IA, y entonces hablaremos de los patrones de reconocimiento.

Aplicación de IA a la matemática

Desde diversos puntos de vista, la matemática es un dominio sumamente interesante para ser estudiado a partir del enfoque de IA. Todos los matemáticos tienen la sospecha de que hay alguna clase de métrica entre las ideas matemáticas, es decir, que toda la matemática es una red de conclusiones entre las cuales existe una enorme cantidad de vínculos. En esa red, algunas ideas están relacionadas muy estrechamente, en tanto que otras son asociadas gracias a recorridos más elaborados. En ocasiones, dos teoremas matemáticos se encuentran muy próximos porque uno de ellos puede ser demostrado con facilidad, dado el otro. Otras veces, son dos ideas las que se aproximan, porque son análogas, o inclusive isomórficas. Se trata de dos sentidos diferentes de la palabra "próximo" en el dominio de la matemática; es probable que haya muchos otros. Es difícil decidir si nuestro sentido de la proximidad matemática está dotado de objetividad, o universalidad, o bien si es, en su mayor medida, un accidente del desarrollo histórico. Ciertos teoremas pertenecientes a ramas distintas de la matemática nos impresionan como de muy ardua vinculación, y podríamos concluir que no están relacionados: pero más tarde aparece algo que nos obliga a modificar ese concepto. Si pudiéramos implantar nuestro altamente desarrollado sentido de la proximidad matemática —una "métrica mental de matemático", por así decir— en un programa, tal vez pudiéramos producir un "matemático artificial". Pero ello depende de que se esté en condiciones de infundir también un sentido de simplicidad, o "naturalidad", lo cual constituye otro gran obstáculo.

Estos temas han sido afrontados en muchos proyectos de IA. Hay una serie de programas desarrollados en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, bajo el nombre de "MACSYMA", cuyo propósito es auxiliar a la matemática en la manipulación simbólica de expresiones matemáticas complejas. Este programa cuenta con un sentido de "adónde dirigirse", una suerte de "gradiente de complejidad" que lo guía desde las expresiones complejas por lo general así consideradas hasta las más simples. Forma parte del repertorio de MACSYMA un programa denominado "SIN", que efectúa integración simbólica de funciones, del cual se reconoce, casi sin excepciones, que supera a los seres humanos en determina-

das categorías. Se apoya en un conjunto de aptitudes diferentes, tal como debe estarlo la inteligencia, en general: un vasto cuerpo de conocimientos, la técnica de reducción de problemas, una gran cantidad de recursos heurísticos, y también algunos recursos especiales.

Otro programa, formulado por Douglas Lenat, en Stanford, tiene como propósito inventar conceptos y descubrir hechos en el campo de la matemática muy elemental. Comenzando con la noción de conjuntos, y una colección de nociones sobre lo que resulta de "interés" retener de aquélla, "inventó" la idea de contar, luego la de sumar, luego la multiplicación, luego —entre otras cosas— la noción de número primo, ¡y llegó nada menos que a redescubrir la conjetura Goldbach! Claro que todos estos "descubrimientos" tienen una antigüedad de centenares —de miles, inclusive— de años. Quizá esto pueda ser explicado, en parte, diciendo que el sentido de lo "interesante" fue transmitido por Lenat a una gran cantidad de reglas, las cuales pueden haber recogido el nivel formativo de aquél, propio del siglo veinte; como sea, se trata de algo impresionante. El programa pareció perder su impulso luego de su muy respetable hazaña. Una cosa interesante, con relación a ello, es que fue incapaz de desarrollar o de perfeccionar su propio sentido de lo que es interesante. Esto sugiere un nivel más alto de dificultad, o varios niveles más, posiblemente.

Lo esencial en IA: la representación del conocimiento

Muchos de los ejemplos anteriores han sido citados a fin de subrayar que la forma en que es representado un dominio se sustenta grandemente en el modo en que ese dominio es "comprendido". Un programa que se limite a dar salida impresa, en un orden prestablecido, a teoremas de TNT, carecería de toda comprensión de la teoría de los números; un programa como el de Lenat, con sus estratos adicionales de conocimiento, puede merecer que se lo considere poseedor de un sentido rudimentario de teoría de los números; y un programa que incorpore el conocimiento matemático a un contexto amplio de experiencia del mundo real probablemente sea el más capacitado para "comprender", en el sentido en que nosotros creemos que lo hacemos. Esta *representación del conocimiento* es la cuestión esencial en IA.

En las primeras épocas se supuso que el conocimiento se presentaba en oraciones semejantes a "paquetes", y que por lo tanto el mejor medio para implantar conocimiento en un programa consistía en desarrollar una forma simple de traducir hechos a pequeños paquetes pasivos de datos. Después, cada hecho sería simplemente una pieza de datos, disponibles para su utilización por los programas. Esto es ejemplificado por los programas de ajedrez, donde las posiciones de tablero son codificadas en matrices o listas de cierto tipo, y almacenadas eficientemente en la me-

moria, de donde pueden ser recuperadas y accionadas mediante el empleo de subrutinas.

El hecho de que el ser humano almacene hechos de una manera más complicada era algo conocido desde hace mucho por los psicólogos, y descubierto sólo en épocas recientes por la investigación en IA, la cual se encuentra ahora estudiando los problemas del conocimiento articulado "en bloques", y la diferencia entre tipos procedimentales y declarativos de conocimiento, la cual se relaciona, como vimos en el Capítulo XI, con la diferencia entre el conocimiento accesible a la introspección, y el inaccesible a esta última.

La concepción ingenua de que todo conocimiento debía ser codificado en piezas pasivas de datos es contradicha, en verdad, por el hecho más fundamental en materia de diseño de computadoras, a saber: cómo efectuar sumas, restas, multiplicaciones, etc., no es algo codificado en piezas de datos y almacenado en la memoria; no está representado en ninguna parte de la memoria, sino en los patrones interconectados del hardware. Una calculadora de bolsillo no almacena en su memoria el conocimiento de cómo sumar; este conocimiento está codificado en sus "vísceras". No existe ningún punto en la memoria que pueda ser señalado si alguien pregunta: "¿Puede mostrarme dónde está localizado el conocimiento de cómo efectuar sumas, en esta máquina?"

Sin embargo, son muchos los esfuerzos que se han aplicado en IA a sistemas en los cuales la masa de conocimiento ha sido almacenada en lugares específicos, es decir, declarativamente. No hace falta decir que *algún* conocimiento tiene que ser incorporado a los programas, pues de otra manera no serían programas en absoluto, sino meras enciclopedias. El asunto es cómo repartir el conocimiento entre programa y datos; no es que sea fácil, en todos los casos, distinguir entre programa y datos, de ninguna manera: espero que ello haya quedado suficientemente claro en el Capítulo XVI. Así y todo, en el desarrollo de un sistema, si el programador concibe intuitivamente algún ítem específico como dato (o como programa), eso puede tener repercusiones significativas en la estructura del sistema, porque cuando uno programa tiende a distinguir entre objetos semejantes a datos y objetos semejantes a programas.

Es importante puntualizar que, en principio, cualquier manera de codificación de la información en estructuras de datos o en procedimientos es tan buena como otra, en el sentido de que si no se está excesivamente preocupado por la eficacia se puede utilizar un esquema u otro. No obstante, se pueden aportar razones que indican que uno de los métodos es definitivamente superior al otro. Consideremos, por ejemplo, el alegato siguiente en favor del empleo exclusivo de representaciones procedimentales: "En cuanto se intenta codificar aspectos de determinada complejidad como datos, se está obligado a desarrollar el equivalente de un nuevo lenguaje, o formalismo. Así, en los hechos, la estructura de datos se transforma en algo semejante a un programa, con alguna pieza del programa

en función de intérprete; es perfectamente posible representar en forma directa la misma información, desde el comienzo, en forma procedimental, y obviar ese nivel adicional de interpretación."

El ADN y las proteínas contribuyen a hallar ciertas perspectivas

La argumentación anterior suena muy convincente, pero si es interpretada con alguna extensión, puede ser tomada como un razonamiento en contra del ADN y del ARN. ¿Por qué codificar la información genética en el ADN, si representándola directamente en las proteínas eleminaríamos no uno, sino *dos* niveles de interpretación? La respuesta es: ocurre que resulta sumamente provechoso contar con la misma información en varias formas diferentes, con vistas a diferentes fines. Una ventaja del almacenamiento de información genética en la forma modular, y semejante a la de los datos, del ADN, es que dos genes individuales pueden ser recombinados fácilmente a efectos de formar un nuevo genotipo. Esto sería muy dificultoso si la información se encontrara en las proteínas. Una segunda razón para el almacenamiento de la información en el ADN es que su transcripción y traducción a proteínas es sencilla. Cuando ello no es necesario, no ocupa mucho lugar y, cuando es necesario, sirve como molde. No existe ningún mecanismo que copie una proteína a partir de otra; los dobleces de su estructura ternaria harían del copiado una tarea muy pesada. Complementariamente, es casi forzoso que sea posible el vuelco de información genética a estructuras tridimensionales tales como las enzimas, porque el reconocimiento y manipulación de moléculas es, por naturaleza, una operación tridimensional. En consecuencia, el alegato en favor de la exclusividad de las representaciones procedimentales pierde todo fundamento en el contexto celular. Surge de aquí la insinuación de que es provechoso estar en condiciones de variar entre representaciones procedimentales y declarativas. Probablemente, esto también sea correcto para IA.

Este problema fue puesto de relieve por Francis Crick, en una exposición sobre comunicación con inteligencias extraterrestres:

> En la tierra, vemos que hay dos moléculas, una de las cuales es apta para la replicación [ADN] y la otra para la acción [proteínas]. ¿Es posible idear un sistema donde una molécula realice ambas tareas, o hay quizá poderosos argumentos, provistos por el análisis de sistemas, según los cuales (si es que existen) la división de la tarea en dos otorga una gran ventaja? No conozco la respuesta a esta interrogación.[14]

[14] Carl Sagan, *Communication with Extraterrestrial Intelligence*, p. 52.

Modularidad del conocimiento

Otra de las cuestiones que aparecen en la representación del conocimiento es la modularidad. ¿Hasta qué punto es fácil insertar nuevos conocimientos? ¿Hasta qué punto es fácil revisar los conocimientos anteriores? ¿Hasta qué punto son modulares los libros? Todo depende. Si se extrae un solo capítulo de un libro trabadamente estructurado, pleno de referencias entrecruzadas, el resto del libro puede llegar a ser virtualmente incomprensible. Es como querer sacar un solo hilo de una telaraña: quien lo pretenda, arruinará el conjunto. Por otro lado, existen libros enteramente modulares, cuyos capítulos son independientes.

Examinemos un nada complicado programa de generación de teoremas, que utiliza axiomas y reglas de inferencia de TNT. El "conocimiento" de tal programa tiene dos aspectos: reside implícitamente en los axiomas y en las reglas, y explícitamente en el cuerpo de teoremas producidos hasta el momento de que se trate. Según el modo en que sea observado, el conocimiento será visto como modular, o como enteramente diseminado y, fuera de duda, no modular. Supongamos, por ejemplo, que hemos formulado un programa semejante pero nos hemos olvidado de incluir el Axioma 1 de TNT en la lista de axiomas. Después que el programa ya ha hecho varios miles de derivaciones, advertimos la omisión e insertamos el axioma faltante. El hecho de que podamos proceder de este modo, en un simple instante, muestra que el conocimiento implícito del sistema es modular; sin embargo, la contribución del nuevo axioma al conocimiento explícito del sistema sólo se verá reflejada luego de un largo lapso: después de que sus efectos se "difundan" de modo manifiesto, lo mismo que el aroma de un perfume se va difundiendo en una habitación luego de romperse el frasco que lo contenía. En este sentido, el nuevo conocimiento requiere de cierto plazo para ser incorporado. Asimismo, si se desea volver atrás y sustituir al Axioma 1 por su negación, no es posible limitarse a efectuar solamente este cambio, sino que es necesario, también, suprimir todos los teoremas en cuya derivación estuvo involucrado el Axioma 1. Está claro que el conocimiento explícito del sistema no está tan cercano a la modularidad como el conocimiento implícito.

Sería útil que aprendiéramos a transplantar modularmente el conocimiento. Enseñar francés a alguien, así, requeriría nada más que abrir su cabeza y operar de manera fija sobre sus estructuras neurales, y ya sabría hablar francés; por supuesto, esto no es más que una suposición jocosa.

Otro aspecto de la representación del conocimiento se asocia con la forma en que se desea utilizarlo. ¿Se entiende que las inferencias son extraídas cuando llegan las piezas de información? ¿Se deben efectuar analogías y comparaciones, permanentemente, entre la información nueva y la información anterior? En un programa de ajedrez, pongamos por caso, cuando se desea crear árboles de anticipación es preferible una representación que codifique las posiciones de tablero con un mínimo de

redundancia, en lugar de una representación que repita la información en diversas formas. Pero si se quiere que el programa "comprenda" una posición de tablero mediante la búsqueda de patrones y su comparación con los patrones conocidos, será más indicada la representación de la misma información, reiterada a través de formas diferentes.

La representación del conocimiento en un formalismo lógico

Existen varias escuelas de pensamiento interesadas en la forma más adecuada de representar el conocimiento, y manipularlo. Una que ha conseguido gran influencia aboga por representaciones que utilicen notaciones formales similares a las de TNT, y conectivos y cuantificadores proposicionales. Las operaciones básicas en tales representaciones son, y no es sorprendente, formalizaciones de razonamientos deductivos. Las deducciones lógicas pueden ser viabilizadas mediante el empleo de reglas de inferencia análogas a alguna de las de TNT. Interrogar al sistema con respecto a alguna noción en particular establece un objetivo, bajo la forma de una cadena que ha de ser derivada; por ejemplo: "¿MUMON es un teorema?" Entonces, los mecanismos automáticos de razonamiento se hacen cargo de la operación, en una forma orientada hacia un objetivo y usando para ello diversos métodos de reducción de problemas.

Pongamos como ejemplo el supuesto de que la proposición "Todas las aritméticas formales son incompletas" es conocida, y que al programa se le pregunta: "¿Los *Principia Mathematica* son incompletos?" Examinando la lista de hechos conocidos —llamada frecuentemente *base de datos*—, el sistema puede advertir que *si* puede establecer que los *Principia Mathematica* son una aritmética formal, ello daría respuesta a la pregunta. Por lo tanto, la proposición "Los *Principia Mathematica* son una aritmética formal" sería implantada como subobjetivo, y pasaría a aplicarse la reducción del problema. Si así son halladas otras cosas que ayuden a establecer (o a refutar) el objetivo o el subobjetivo, se trabajaría en ellas, y así siguiendo, recursivamente. Este proceso ha recibido el nombre de *encadenamiento hacia atrás*, puesto que se inicia planteando su objetivo y hace su camino hacia atrás, presumiblemente en dirección a cosas que pueden ser ya conocidas. Si se hiciera una representación gráfica del objetivo principal, de los objetivos subsidiarios, de los subsubobjetivos, etc., aparecería una estructura con aspecto de árbol, ya que el objetivo principal puede comprender diferentes subobjetivos, cada uno de los cuales, a su vez, abarcan diversos subsubobjetivos, etc.

Tómese nota de que este método no cuenta con la garantía de resolver la pregunta, pues es posible que no haya forma de establecer, dentro del sistema, que los *Principia Mathematica* son una aritmética formal. Esto

no implica, sin embargo, que el objetivo o el subobjetivo sean enunciados falsos, sino que, simplemente, no pueden ser derivados a través del conocimiento ordinariamente disponible por parte del sistema. Este puede dar salida impresa, en tal circunstancia, a la expresión "No lo sé" u otra similar. El hecho de que ciertas preguntas queden abiertas es análogo, naturalmente, al de la incompletitud que aqueja a determinados sistemas formales muy bien conocidos.

Conocimiento deductivo *vs.* analógico

Este método proporciona un *conocimiento deductivo* del dominio representado, en virtud de que, a partir de hechos conocidos pueden ser extraídas conclusiones lógicas correctas. No obstante, carece de algo como la aptitud humana para distinguir similitudes y comparar situaciones: carece de lo que podría llamarse *conocimiento analógico*, un elemento central de la inteligencia humana. Esto no quiere decir que los procesos de pensamiento analógico no puedan ser aprisionados dentro de un molde semejante, sino que no se prestan naturalmente a ser constreñidos por esa clase de formalismo. En nuestro días, los sistemas de orientación lógica no son tan frecuentes como los de otros géneros, los cuales permiten la realización bastante natural de formas complejas de comparación.

Cuando se comprende que la representación del conocimiento es algo enteramente distinto a un simple almacenamiento de números, la idea de que "una computadora tiene una memoria de elefante" pasa a ser un mito muy fácil de derrumbar. Lo que está *almacenado en la memoria* no es, necesariamente, sinónimo de lo que un programa *sabe* porque, aun cuando una determinada pieza de conocimiento haya sido codificada en algún sitio en el interior de un sistema complejo, puede que no haya ningún procedimiento, regla u otro género de operador de datos que estén en condiciones de llegar a ella: puede ser inaccesible. En tal caso, es factible decir que esa pieza de conocimiento ha sido "olvidada", ya que el acceso a la misma está temporaria o permanentemente perdido. Así, un programa de computadora puede "olvidar" algo en un nivel alto, y "recordarlo" en un nivel bajo. Esta es otra distinción de niveles siempre recurrente, de la cual tal vez podamos aprender mucho a propósito de nosotros mismos. Cuando un ser humano incurre en un olvido, lo más probable es que ello signifique que se ha perdido un señalador de alto nivel, y no que la información haya sido suprimida o destruida. Esto esclarece la enorme importancia de seguirle la pista a las formas en las cuales almacenamos las experiencias adquiridas, pues nunca se sabe con antelación cuáles serán las circunstancias, o el ángulo exigido, bajo los cuales necesitaremos recuperar alguna parte de lo que tenemos almacenado.

Del haiku de computadora a una gramática RTR

La complejidad de la representación del conocimiento en la mente humana golpeó por vez primera a mi puerta en oportunidad de encontrarme trabajando en un programa destinado a generar oraciones inglesas "desde la nada". Había elegido este proyecto por un motivo muy interesante; luego de escuchar por radio algunas muestras del llamado "haiku de computadora", hubo algo en ellas que me impresionó profundamente. Había un fuerte elemento humorístico, y simultáneamente de misterio, en conseguir que una computadora generase algo que corrientemente es considerado una creación artística. Disfruté muchísimo del aspecto jocoso, y me sentí altamente estimulado por el misterio —la contradicción, inclusive— albergado en la programación de actos creativos. De modo que emprendí la tarea de formular un programa aun más misteriosamente contradictorio y festivo que el programa haiku.

En un comienzo, me preocupé por flexibilizar y otorgar recursividad a la gramática, a fin de evitar la sensación de que el programa consistía sencillamente en un llenado de los espacios en blanco de una fórmula. Por ese tiempo tropecé con un artículo de Victor Yngve, aparecido en *Scientific American*, donde describía una gramática simple, pero flexible, capaz de producir una amplia variedad del tipo de oraciones que figuran en algunos libros infantiles. Modifiqué algunas de las ideas que había encontrado en el artículo y elaboré un conjunto de procedimientos que integraban una gramática de la forma Red de Transición Recursiva, tal como es descripta en el Capítulo V. En esta gramática, la selección de palabras de una oración era determinada por un proceso que comenzaba por elegir —al azar— la estructura global de la oración; gradualmente, el proceso de adopción de decisiones se infiltraba a través de los niveles de estructura más bajos hasta alcanzar el nivel de la palabra y el de la letra. Por debajo del nivel de la palabra, había un montón de trabajo por hacer, como dar inflexión a los verbos, por ejemplo, o pluralizar sustantivos; los verbos irregulares y las formas nominales recibieron primero forma regular y después, si coincidían con las entradas de una tabla, se los sustituía por la forma adecuada (irregular). Al alcanzar su forma final, cada palabra recibía impresión de salida. El programa se parecía al proverbial mono que aprieta las teclas de una máquina de escribir, pero, a diferencia de esta situación, aquí la operación se cumplía sobre diversos niveles de la estructura lingüística, simultáneamente, y no sólo sobre el nivel de las letras. En las primeras etapas de desarrollo del programa, utilicé un léxico totalmente limitado: su forma deliberada, pues mi propósito era humorístico. Ello produjo una cantidad de oraciones sin sentido, algunas de las cuales tenían estructuras muy complicadas, mientras que otras eran bastante breves. A continuación, pueden apreciarse algunos ejemplos*.

* Es decir, su equivalente español lo más aproximado posible. [T.]

Un lápiz varón que debe reír parlotearía. ¿No siempre el programa debe masticar al bicho en la memoria? La niña decimal que chisporrotea torpemente debería caer. El pastel que seguramente mete un hombre inesperado en la relación siempre podría dar cartas.

El programa debe pasar alegremente.

La digna máquina no siempre debe empastar al astrónomo.

Oh, el programa que realmente debe huir de la niña escribe música para teatro. La relación ordenada parlotea.

La muchacha afortunada la cual puede siempre parlotear nunca estará segura del parloteo.

El juego parlotea. El profesor picoteará. Un bicho cae. El hombre toma la caja que resbala.

El efecto es fuertemente surrealista y por momentos recuerda un poco al del haiku, como por ejemplo la pauta que siguen las cuatro oraciones consecutivas del final. Al principio, esto resultó muy divertido y tuvo su encanto, pero pronto se convirtió en algo trillado; luego de leer unas pocas páginas de salida podían percibirse los límites del espacio dentro del cual estaba operando el programa; después de eso, la observación de puntos elegidos al azar en el interior de tal espacio —aunque se tratase de cosas "nuevas"— no daba la impresión de estar viendo nada nuevo. Hay aquí, según creo, un principio general: uno se aburre de algo, no cuando agotó su repertorio de conducta, sino cuando tiene delineados los límites del espacio que contiene a la conducta. El espacio de comportamiento de una persona es, prácticamente, lo suficientemente complejo como para que pueda seguir sorprendiendo a los demás; pero no ocurrió así con mi programa. Comprendí que mi finalidad de obtener resultados verdaderamente cómicos requería la programación de una sutileza mucho mayor. Pero, en ese caso, ¿qué significaba "sutileza"? Estaba claro que la sola yuxtaposición absurda de palabras no era demasiado sutil; yo necesitaba un medio para asegurar que las palabras fuesen empleadas con arreglo a las realidades de este mundo. Fue entonces cuando ingresaron a la escena las reflexiones sobre la representación del conocimiento.

De RTR a RTA

El criterio que adopté consistió en clasificar cada palabra —sustantivo, verbo, preposición, etc.— en diversas "dimensiones semánticas" diferentes. Así, cada palabra pertenecía a alguna de entre varias clases; había

después, también, superclases: clases de clases (lo cual recuerda las observaciones de Ulam). En principio, tal agregación podría continuarse a través de cualquier cantidad de niveles, pero yo me detuve en el segundo. En todo momento, la elección de palabras, ahora, estaba semánticamente restringida, porque se requería que existiese *acuerdo* entre las diversas partes de la expresión que estaba siendo construida. Por ejemplo, la idea consistía en que ciertas clases de actos pudiesen ser realizados únicamente por objetos animados, o que sólo ciertos tipos de abstracción pudiesen ejercer influencia sobre los acontecimientos, etc. Las decisiones relativas a qué categorías eran las adecuadas, y a si era mejor considerar a cada categoría como clase o como superclase, eran sumamente complicadas. Todas las palabras estaban discriminadas en varias dimensiones diferentes. Las preposiciones comunes —"de", "en", etc.— tenían varias entradas distintas, correspondientes a sus distintos usos. La salida, ahora, comenzó a ser mucho más comprensible, y eso la hizo divertida en otro sentido.

Una pequeña verificación Turing

Más abajo, reproduzco nueve selecciones, cuidadosamente entresacadas de muchas páginas de salida correspondientes a las últimas versiones de mi programa. Junto con ellas, he incluido tres oraciones (seriamente pensadas) de proveniencia humana, ¿cuáles son?

(1) Los arranques interjectivos pueden ser considerados la sustitución recíproca de un producto semiótico dialógico, en una reflexión dinámica, por material semiótico (doblaje).
(2) Considerar más bien el trazado de una 'secuencia' de gedankenexperimentaciones ingenuas, cuyas líneas hereditarias son, *prima facie*, un caso de transitividad paradiacrónica.
(3) Consideremos a ésta como una cadena confiada a la posibilidad de que, finalmente, se manifieste como producto (¿condiciones epistémicas?) y que el producto no esté en un frankfurtiano paquete-ya-preparado.
(4) Pese a los esfuerzos, la réplica, si se quiere, había sido apoyada por Oriente; de aquí que una falacia, conforme a eso, será interrumpida por la posición que sea sostenida por el embajador.
(5) Por supuesto, antes de los trastornos, el embajador estaba consintiendo en forma indiferentemente gradual a la plebe.
(6) Supuestamente, la libertad refinada provocó las actitudes que en cuanto a la paz que es destilada por las consecuencias que finalmente no serán provocadas por la orden irrevocable en cuanto a la paz de lo que a veces es provocador de la intransigencia infinitesimalmente sorprendente.

(7) Según los sofistas, las campañas en las ciudades estados, en otras palabras, habían sido aceptadas por el Oriente hábilmente. Por supuesto, el Oriente ha sido dividido por los estados muy violentamente.
El Oriente apoya los esfuerzos que han sido apoyados por la humanidad.
(8) Reconocidamente, el origen jerárquico de la falacia, sin embargo, será predicho por los adversarios de ello. Por la misma razón, los individualistas habrán de testificar que la intransigencia no hará interrumpir las campañas.
(9) Obvio es decirlo, durante el trastorno que hará garantizar el secreto, las réplicas no dividen al Oriente. Por supuesto, los países, *ipso facto*, siempre están ensayando la libertad.
(10) Aunque sea ganado un Premio Nobel por los humanistas, también lo será ganado por el siervo.
(11) A menudo, será sostenida una posición por los siervos de una nación en hostilidad abierta.
(12) Por otra parte, los Premios Nobel serán ganados. Por la misma razón, a pesar de los resultados, los Premios Nobel que serán ganados serán ganados en ocasiones por una mujer.

Las oraciones formuladas por seres humanos son las tres primeras; fueron extraídas de un número reciente de la revista *Art-Language*[15] y son —hasta donde yo puedo afirmarlo— intentos totalmente serios, elaborados por personas letradas y sensatas, de comunicarse entre sí determinadas cosas. El hecho de que aparezcan aquí fuera de su contexto no contribuye demasiado a dificultar la interpretación, pues dicho contexto suena exactamente igual que las oraciones citadas.

El resto fue producido por mi programa. Las números 10 a 12 fueron elegidas para mostrar que hubo, ocasionalmente, arranques de absoluta lucidez; las números 7 a 9 son más representativas de la salida: flotan en ese extraño y provocativo inframundo ubicado entre la significación y la no significación; y luego, las números 4 a 6 están casi más allá de la significación. Generosamente, se podría decir que conciernen a sí mismas en tanto que "objetos de lenguaje" puros, algo semejante a segmentos de escultura abstracta hechos, no de piedra, sino de palabras; como alternativa, se podría decir que son pura cháchara seudointelectual.

A pesar de ello, mi elección del vocabulario estuvo dirigida a producir efectos humorísticos. El tono de la salida es difícil de caracterizar. Si bien una gran proporción de la misma "tiene sentido", al menos en el nivel de la oración individual, se extrae la impresión terminante de que la salida está brotando de una fuente que carece de toda comprensión de lo que está diciendo, y de todo motivo para decirlo. En particular, se siente una

[15] *Art-Language*, Vol. 3, No. 2, mayo, 1975.

absoluta falta de imaginación visual por detrás de las palabras. Al ver aparecer estas oraciones en la línea impresora, experimenté emociones complejas. Yo estaba muy divertido con lo disparatado de la salida, y también sumamente orgulloso de mi logro, y trataba de describirlo a mis amigos como similar a la fijación de reglas para la elaboración de parábolas, en árabe, mediante pinceladas individuales: una exageración, pero me complacía verlo de tal modo. Por último, estaba profundamente conmovido por el conocimiento que esta máquina enormemente complicada estaba haciendo fluir a lo largo de extensas hileras de símbolos ubicados en su interior, con sujeción a determinadas reglas, y que estas extensas hileras de símbolos eran algo parecido a los pensamientos de mi propia cabeza . . . algo parecido.

Imágenes de lo que es el pensamiento

Por supuesto, no me dejé llevar por la fantasía de que hubiera un ser consciente detrás de las oraciones; lejos de ello, yo era la persona que mejor sabía en el mundo las razones por las cuales este programa se encontraba terriblemente alejado del pensamiento real. El Teorema de Tesler viene muy a propósito en este instante: tan pronto como ese nivel de capacidad de manipulación idiomática hubo sido mecanizado, quedó en claro que no constituía inteligencia. Pero esta intensa experiencia me proveyó una imagen: la vislumbrada sensación de que el pensamiento *real* está compuesto por hileras de símbolos, en el cerebro, mucho más extensas y mucho más complicadas . . . muchas hileras como trenes desplazándose simultáneamente sobre rieles paralelos y entrecruzados, con sus vagones empujados y arrastrados, enganchados y desenganchados, desplazados de una vía a otra por una miríada de mecanismos guardagujas neurales . . .

Se trataba de una imagen intangible que no puedo transmitir en palabras, y no era más que una imagen. Pero imágenes e intuiciones y motivaciones reposan entremezcladas en la mente, y mi estado de concentrada fascinación frente a esta imagen era un acicate constante para reflexionar más profundamente sobre qué puede ser realmente el pensamiento. En otras partes de este libro he tratado de comunicar algunas imágenes, hijas de esta imagen original, particularmente en el *Preludio y fuga* . . .

Lo que permanece ahora en mi mente, cuando examino este programa doce años más tarde, es la inexistencia de todo sentido imaginativo por detrás de lo que se estaba diciendo. El programa *no tenía idea* de lo que es un siervo, de lo que es una persona, ni de lo que es cosa alguna en absoluto. Las palabras eran símbolos formales vacíos, tan vacíos como —o quizá más todavía— la p y la q del sistema pq. Mi programa se benefició con el hecho de que, cuando la gente lee un texto, tiende en forma enteramente natural a incorporar a cada palabra todas sus resonancias, como si estuviesen forzosamente adscriptas al grupo de letras que forman la pa-

فيه الحياء ولاخير في اعطائه مثل العقير وذلك المملوك
مثل السلبة بن حيث يحتاج اليه حوف السطوح فليله النبرزيد
يقول اذا راي ضان والضان منه اكل الشي واديمه رغبة واكلا
ومن لا يشرك كبرود الا بل هو مشترح الراي ولعلك موقنها
عن الراي قالوا احمق من راعي ضان ثمانين لانه يتعاباها وتغلبه
فيغير عنها والغنم موضوعة بشره لاكل وذو امه ومن اكل
من الكمثري والرمان اكل من البرذون وقيل لا علم له في الدواب
اكل فلا يبرذونه رغوت فاذا كانت البرذونه اكيل الدواب بعلى
حساب ذلك بن برا كلها اذا ارضعته وبعلل انه لو جمع اكل المراه
من غروه الى الليل لكان اكثر من عمل الرجل وعشاءه هكذا
يحكون في اكثر النساء ومن ترضع من غروه الى الليل وكذلك
الحجر والفرس

ومن العجز ان معاذ بن جبل قالوا وكان معاذ امه وكان يشبه
ابراهيم خليل الرحمن ولم يكن في السلف احسن جرده ولا انعم بدنا
من معاذ وسهل بن حنيف وقال النبي صلى الله عليه وسلم امرو كل
نبي من معاذ حتى خاتمه وكان يعرض من الايماد السنه وقد شهد
المشاهد وولى للنبي الولايات وفيه القرآن ويعلم الناس الاحكام
ويدرسهم القرآن ومات ابن اقل من عشرين سنه وكان عند
رسول الله وجيها وفي عيون المسلمين عظيما وقال الهيثم
انبانا ابو الهذيل سعيد بن مسيب الكاتب اشتكى له قال بعض

labra. Mi programa puede ser visto como un sistema formal, cuyos "teoremas" —las oraciones de salida— tuviesen interpretaciones ya listas (al menos, para los hablantes de inglés). A diferencia del sistema pq, empero, estos "teoremas" no resultaban por entero enunciados verdaderos al ser interpretados de tal forma. Muchos eran falsos, muchos eran sinsentidos.

En su humilde medida, el sistema pq refleja un diminuto rincón del mundo. Pero el procesamiento de mi programa no arroja reflejo alguno de cómo funciona el mundo, a excepción de las pequeñas constricciones semánticas a las cuales debe sujetarse. Para crear tal reflejo de comprensión, yo debería haber envuelto cada concepto en capas y más capas de conocimiento del mundo. Proceder así hubiera constituido una clase de esfuerzo diferente al que me propuse. No es que no haya pensado, frecuentemente, en intentarlo, sino que nunca anuncié la decisión de hacerlo.

Gramáticas de nivel más elevado . . .

En realidad, he evaluado a menudo la posibilidad de formular una gramática RTA (o alguna otra índole de programa productor de oraciones) destinada a producir únicamente oraciones *verdaderas* acerca del mundo. Tal gramática incorporaría palabras con significaciones auténticas, tal como sucede en el sistema pq y en TNT. Esta idea de un lenguaje donde los enunciados falsos sean no gramaticales es antigua: fue imaginada por Johann Amos Comenius, en 1633. Es muy atractiva porque la gramática pasa a contar con una bola de cristal en su seno: uno se limita a formular el enunciado que le interesa, y verifica si es gramatical . . . Realmente, Comenius fue aun más allá, pues en su lenguaje los enunciados falsos no sólo eran no gramaticales, ¡sino también inexpresables!

Orientando este pensamiento en otra dirección, es posible imaginar una gramática de alto nivel que produzca koans fortuitos. Y, si se tuviera un programa así, ¿se lo podría disponer para que produzca exclusivamente koans auténticos? Mi amiga Marsha Meredith se entusiasmó con este proyecto de "Ismo Artificial", y tomó la iniciativa de elaborar un programa de enunciación de koans. Uno de sus primeros esfuerzos dio lugar a este curioso cuasi koan:

UN PEQUEÑO MAESTRO JOVEN DESEABA UN PEQUEÑO CUENCO BLANCO DE MADERA. "¿COMO PODEMOS APRENDER Y COMPRENDER SIN ESTUDIAR?" PREGUNTO EL JOVEN MAESTRO A UN CONFUNDIDO MAESTRO GRANDE. EL CONFUNDIDO MAESTRO CAMINO DESDE UNA ABRUPTA MONTAÑA PARDA HAS-

Figura 116. Una parábola en árabe. [Tomado de: A Khatibi y M. Sijelmassi, The Splendour of Islamic Calligraphy *(New York: Rizzoli, 1976).]*

TA UNA APACIBLE MONTAÑA BLANCA CON UN PEQUEÑO CUENCO ROJO DE PIEDRA. EL CONFUNDIDO MAESTRO VIO UNA APACIBLE CABAÑA ROJA. EL CONFUNDIDO MAESTRO DESEABA LA CABAÑA. "¿POR QUE FUE BODHIDHARMA A CHINA?" PREGUNTO EL CONFUNDIDO MAESTRO A UN DISCIPULO ILUMINADO GRANDE. "LOS DURAZNOS SON GRANDES", RESPONDIO EL DISCIPULO AL CONFUNDIDO MAESTRO. "¿COMO PODEMOS APRENDER Y COMPRENDER SIN ESTUDIAR?" PREGUNTO EL CONFUNDIDO MAESTRO A UN ANCIANO MAESTRO GRANDE. EL ANCIANO MAESTRO CAMINO DESDE UNA BLANCA G0025 DE PIEDRA. EL ANCIANO MAESTRO SE PERDIO.

Es probable que el procedimiento personal de decisión del lector logre un veredicto acerca de la autenticidad de este koan, sin necesidad de apelar al Código Geométrico del Arte de los Cordones Zen. Si la ausencia de pronombres a la simplificada sintaxis no le sugiere ninguna sospecha, seguramente sí lo hará ese extraño "G0025" cercano al final. ¿Qué es eso? Una rara casualidad; la manifestación de un error, el cual dio lugar a que el programa imprimiera, en lugar de una palabra idiomática referida a un objeto, el número *interno* asignado en el programa al "nódulo" (un átomo LISP, en realidad) donde estaba almacenada toda la información concerniente a ese objeto específico. De modo que tenemos aquí una "ventana" abierta sobre un nivel inferior de los fundamentos de la mente zen, un nivel que debería haber permanecido invisible. Lamentablemente, no contamos con semejantes ventanas que transparenten los niveles inferiores de las mentes zen humanas.

La secuencia de acciones, aunque un tanto caprichosa, se deriva de un procedimiento recursivo LISP, denominado "CASCADA", el cual genera cadenas de acciones asociadas entre sí en forma vagamente causal. Pese a que el grado de comprensión del mundo mostrado por este productor de koans no es, sin duda, estupendo, continúan los esfuerzos a fin de conseguir salidas de aspecto algo más auténtico.

¿Gramáticas de la música?

Tenemos luego la música. Se trata de un dominio del cual se puede suponer, en una primera consideración, que se prestaría admirablemente a ser codificado en una gramática RTA, o en otro programa. Al tiempo que (para avanzar en esta línea ingenua de pensamiento) el lenguaje depende de conexiones con el mundo exterior para asumir significación, la música es puramente formal. No hay referencia a cosas de "allí fuera" en los sonidos musicales; éstos no son sino solamente una sintaxis, las notas

siguen a las notas, los acordes a los acordes, los compases a los compases, las frases a las frases. . .

Pero, un momento. Hay algo que no está bien en este análisis. ¿Por qué hay música que es mucho más profunda y más bella que otra? Porque la forma, en música, es expresiva, expresiva de algunas extrañas regiones subconscientes de nuestras mentes. Los sonidos musicales no se refieren a siervos o a ciudades estados, pero desencadenan enjambres de emociones en nuestra más profunda interioridad; en este sentido, la significación musical *es* dependiente de intangibles lazos entre los símbolos y las cosas de este mundo: "cosas" que, en este caso, son secretas estructuras software de la mente. No, la gran música no surgirá de un formalismo tan sencillo como una gramática RTA. Sí puede surgir seudomúsica, lo mismo que seudocuentos de hadas —y se tratará de una exploración valiosa por parte de quienes la efectúen—, pero los secretos de la significación musical reposan en un sitio muchísimo más profundo que la pura sintaxis.

Aquí, debo aclarar una cuestión: en principio, las gramáticas RTA tienen la misma potencialidad que cualquier formalismo de programación, de modo que si la significación es, de alguna manera (yo así lo creo), capturable, puede ser capturada por una gramática RTA. Verdaderamente. A pesar de eso, sostengo que, en tal caso, la gramática habrá de definir no solamente estructuras musicales, sino las estructuras íntegras de la mente del espectador. La "gramática" será una gramática total del pensamiento y no, exclusivamente, una gramática de la música.

El programa SHRDLU de Winograd

¿Qué clase de programa conseguiría que los seres humanos, aun con reticencia, admitiesen que está dotado de "comprensión"? ¿Qué es lo que nos llevaría primero a aceptar que no sentimos intuitivamente que allí "no hay nada"?

Entre los años 1968 y 1970, Terry Winograd (alias Dr. Tony Earrwig) estudiaba el doctorado en el Instituto Tecnológico de Massachusetts, donde trabajó conjuntamente en problemas de lenguaje y de comprensión. Allí, por ese entonces, gran parte de la investigación en IA estaba abocada a los llamados *mundos de bloques*, un dominio relativamente simple, donde los problemas relativos al manejo simultáneo del lenguaje y de la visión por las computadoras podían coordinarse con facilidad. Un mundo de bloques consiste en diversas clases de bloques parecidos a los de juguete, ubicados sobre una mesa; los bloques son de distintos colores, y su forma es cuadrada, oblonga, triangular, etc. (Un "mundo de bloques" de otro género lo encontramos en la figura 117, que reproduce la obra de Magritte, *Aritmética mental.* Creo que este título es singularmente adecuado con respecto al presente contexto.) Los problemas visuales en los bloques del ITM son sumamente complicados: ¿cómo puede descubrir

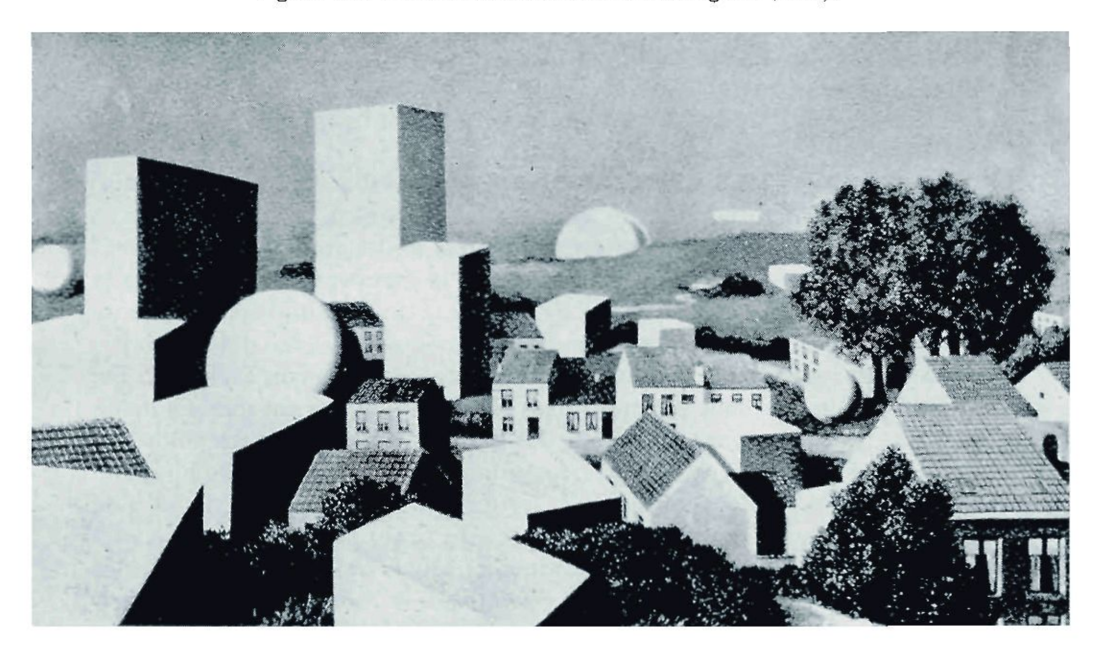
una computadora, mediante un vistazo a una escena de televisión que muestra muchos bloques, exactamente qué clases de éstos hay, y cómo se relacionan entre sí? Algunos bloques pueden estar montados sobre otros, o en cambio estar enfrentados, es posible que haya sombras, etc.

La actividad de Winograd estuvo apartada de los problemas de visión. Partiendo de la suposición de que los bloques se encontraban bien representados dentro de la memoria de la computadora, hizo frente al multifacético problema de cómo obtener que la computadora:

(1) comprendiera preguntas en inglés, relativas a la situación;
(2) diera respuestas en inglés, relativas a la situación;
(3) comprendiera indicaciones, formuladas en inglés, relativas a la manipulación de los bloques;
(4) dividiera cada indicación en secuencias de operaciones que pudiese efectuar;
(5) comprendiera qué había hecho, y por cuáles razones;
(6) describiera sus acciones y sus razones en inglés.

Parecería razonable fragmentar el programa global en subprogramas modulares, con un módulo para cada parte diferente del problema; y después, una vez desarrollados los módulos por separado, integrarlos con toda tranquilidad. Winograd halló que tal estrategia de desarrollo inde-

Figura 117. Aritmética mental, *de René Magritte (1931).*



pendiente de los módulos planteaba dificultades fundamentales. Lo que formuló fue un enfoque radical, que desafiaba la teoría de que la inteligencia puede ser compartimentada en piezas independientes o semindependientes. Su programa SHRDLU —que recibió su nombre del antiguo código "ETAOIN SHRDLU", usado por los linotipistas para indicar los tipos de las columnas de periódicos— no separa los problemas en nítidas partes conceptuales. Las operaciones de análisis de oraciones, de producción de representaciones internas, de razonamientos acerca del mundo representado en su interior, de evacuación de preguntas, etc.; se encuentran profunda e intrincadamente entrelazadas en una representación procedimental del conocimiento. Algunos críticos han señalado que este programa está tan entremezclado que no representa para nada una "teoría" sobre el lenguaje, ni contribuye de ninguna manera a profundizar nuestro conocimiento de los procesos del pensamiento. Nada más erróneo que estas impugnaciones, en mi opinión. Un *tour de force* tal como SHRDLU quizá no sea isomórfico de los procesos humanos —por cierto, no se puede pensar, en absoluto, que en SHRDLU haya sido alcanzado el "nivel simbólico"— pero el hecho de crearlo y de pensar en sus alcances permite una penetración enorme en las formas en que actúa la inteligencia.

La estructura de SHRDLU

En realidad, SHRDLU consiste en procedimientos separados, cada uno de los cuales contiene cierto conocimiento acerca del mundo; sin embargo, los procedimientos tienen una interdependencia tan poderosa que no pueden ser mantenidos en forma prolijamente separada. El programa es como un nudo fuertemente amarrado que se resiste a ser desatado, pero el hecho de no poder desanudarlo no quiere decir que no se pueda comprenderlo. Puede haber una rigurosa descripción geométrica del nudo entero aun cuando éste sea físicamente desordenado; tal vez convenga recordar una metáfora de la *Ofrenda Mu*, la de la observación de un huerto desde un ángulo "natural", y compararla con esta situación.

Winograd ha escrito lúcidamente a propósito de SHRDLU. La cita que sigue corresponde a su artículo en el libro de Schank y Colby:

> Uno de los puntos de vista básicos que subyacen al modelo es que todo uso del lenguaje puede ser considerado como una forma de activación de procedimientos en el interior del oyente. Podemos considerar cualquier enunciación como un programa: un programa que genera, indirectamente, un conjunto de operaciones que deben ser cumplidas dentro del sistema cognoscitivo del oyente. Esta "formulación de programa" es indirecta, en el sentido de que estamos tratando con un intérprete inteligente, quien puede emprender un conjunto de acciones que son totalmente diferentes de las concebidas por el hablante. La forma exacta es determinada por su conocimiento del mundo, sus expectativas en relación con la persona que le habla, etc. En este programa, tenemos una versión simple de ese proceso de interpretación,

tal como tiene lugar en el robot. Cada oración interpretada por el robot es convertida en un conjunto de instrucciones en PLANNER. El programa que resulta es entonces ejecutado, a fin de obtener los efectos buscados.[16]

PLANNER facilita la reducción del problema

El lenguaje PLANNER, recién mencionado, es un lenguaje IA cuyo rasgo principal es que algunas de las operaciones necesarias para la reducción del problema están incorporadas en él, operaciones como por ejemplo el proceso recursivo de generación de un árbol de subobjetivos, subsubobjetivos, etc. Esto significa que tales procesos, en lugar de tener que ser estudiados una y otra vez por el programador, están implicados automáticamente en los llamados *enunciados OBJETIVO*. Cualquiera que lea un programa PLANNER no verá ninguna referencia explícita a tales operaciones; en jerga técnica, se las denomina *transparentes al usuario*. Si un recorrido del árbol no consigue obtener el fin buscado, el programa PLANNER "retornará" e intentará otra ruta. En todo lo concerniente a PLANNER, la palabra mágica es "retorno".

El programa de Winograd hizo excelente empleo de estos aspectos de PLANNER o, más exactamente, de MICROPLANNER, una instrumentación parcial de los diseños de PLANNER. En los últimos años, sin embargo, personas interesadas en el desarrollo de IA han llegado a la conclusión de que el retorno automático, como el de PLANNER, es definitivamente desventajoso, y que probablemente no sea útil para avanzar en ese desarrollo; en consecuencia, han desistido de aquel recurso y optado por ensayar otros caminos.

Oigamos otros comentarios de Winograd sobre SHRDLU:

> La definición de cada palabra es un programa al cual se apela en un punto adecuado del análisis, y que puede efectuar computaciones discrecionales que abarquen la oración y la situación física presente.[17]

Este es uno de los ejemplos citados por Winograd:

> Las diferentes posibilidades de significación de "the" [*él, la, los, las*] son procedimientos que verifican diversos hechos referentes al contexto, y luego prescriben acciones tales como "Buscar un objeto único en la base de datos que se ajuste a esta descripción", o "Afirmar que el objeto bajo descripción es único en lo que toca al hablante." El programa tiene incorporada una variedad de recursos heurísticos para decidir qué parte del contexto es pertinente.[18]

[16] Terry Winograd, "A Procedural Model of Language Understanding", en R. Schank y K. Colby, eds., *Computer Models of Thought and Language*, p. 170.
[17] *Ibid.*, p. 175.
[18] *Ibid.*, p. 175.

Es asombrosa la profundidad de este problema vinculado a la palabra "the". Tal vez no haga falta decir que la formulación de un programa que pueda manejar en plenitud las cinco palabras cumbre del idioma inglés —"the", "of", "and", "a", y "to"— equivaldría a la resolución de todo el problema de IA, e implicaría, entonces, conocer qué son la inteligencia y la conciencia. Una pequeña digresión: los cinco *sustantivos* más comunes, en inglés, son "time", "people", "way", "water" y "words" (en ese orden), según el *Word Frequency Book*, compilado por John B. Carroll *et al.* Lo llamativo es que la mayor parte de la gente no tiene idea de que pensamos en términos tan abstractos. Si preguntamos a nuestros amigos, diez contra uno supondrán que las palabras más usadas son "man", "house", "car", "dog" y "money". Y —ya que estamos en el tema de las frecuencias— las doce letras de empleo cumbre en inglés son, de acuerdo a Mergenthaler: "ETAOIN SHRDLU".

Un aspecto gracioso de SHRDLU es que se opone totalmente al estereotipo de las computadoras como "masticadoras de números" ya que, en palabras de Winograd: "Nuestro sistema no acepta los números bajo forma numérica, y se le ha enseñado a contar solamente hasta diez."[19] ¡Con toda la matemática que lo apuntala, SHRDLU apenas sabe contar! Exactamente igual que tía Hilaria, SHRDLU no sabe nada con respecto a los niveles más bajos que lo constituyen; su conocimiento es, en su mayor medida, *procedimental* (véase, particularmente, la observación que hace el "Dr. Tony Earrwig" en el paso 11 del diálogo precedente).

Es interesante comparar la incorporación procedimental de conocimiento en SHRDLU con el conocimiento de mi programa generador de oraciones. Todo el conocimiento sintáctico de mi programa fue incorporado procedimentalmente en Redes de Transición Aumentada, formuladas en lenguaje Algol; sin embargo, el conocimiento semántico —la información sobre los miembros de las clases semánticas— era estático: estaba contenido en una breve lista de números subsiguiente a cada palabra. Había unas pocas palabras, como los verbos auxiliares "to be", "to have" y otros, representadas totalmente mediante procedimientos de Algol, pero se trató de excepciones. Por el contrario, en SHRDLU, *todas* las palabras se representaron como programas. Este ejemplo demuestra que a pesar de la equivalencia teórica de datos y programa, la elección de unos en lugar de otros tiene, en la práctica, consecuencias principales.

Sintaxis y semántica

Ahora, algunas otras palabras de Winograd:

Nuestro programa no opera analizando, en primer lugar, una oración, haciendo

[19] Terry Winograd, *Understanding Natural Language*, p. 69.

luego análisis semántico, para terminar utilizando la deducción a fin de producir una respuesta. Estas tres actividades se presentan concurrentemente a todo lo largo de la comprensión de una oración. Ni bien comienza a tomar forma una pieza de estructura sintáctica, se apela a un programa semántico para que vea si tiene sentido, y la respuesta resultante puede dirigir el análisis. Para decidir si existe sentido, la rutina semántica puede apelar a procesos deductivos y formular preguntas acerca del mundo real. Por ejemplo, frente a la oración 34 del diálogo ("ponga la pirámide azul sobre el bloque en la caja"), el analizador toma "la pirámide azul sobre el bloque" como posible grupo nominal. En este punto, es efectuado el análisis semántico, y luego de ser definida "la" [*the*], tiene lugar una verificación en la base de datos con respecto al objeto aludido. Si tal objeto no es encontrado, el análisis es redirigido para que encuentre el grupo nominal "la pirámide azul". Después, continuará con la ubicación de "sobre el bloque en la caja" como una expresión individual que indica localización. . . De este modo, hay una interrelación continua entre los diferentes géneros de análisis, con el resultado de que cada uno afecta a los restantes.[20]

Es interesante el hecho de que, en los lenguajes naturales, la sintaxis y la semántica estén así profundamente imbricadas. En el capítulo anterior, cuando abordamos el elusivo concepto de "forma", lo separamos en dos categorías: forma sintáctica, detectable mediante un procedimiento de decisión de finalización predictible, y forma semántica, la cual no es detectable de esa manera. Pero aquí, Winograd nos está diciendo que —al menos cuando se habla de "sintaxis" y "semántica" en el sentido usual— ambas se presentan directamente fusionadas en el lenguaje natural. La forma externa de una oración —esto es, su composición en términos de signos elementales— no permite una separación neta entre aspectos sintácticos y semánticos. Esta es una cuestión muy significativa para la lingüística.

Algunos comentarios finales sobre SHRDLU, por parte de Winograd:

Observemos lo que haría el sistema con una descripción simple como "un cubo rojo que sustenta a una pirámide". La descripción utilizará conceptos como BLOQUE, ROJO, PIRAMIDE y EQUIDIMENSIONAL, partes, todos ellos, de la categorización subyacente del mundo por parte del sistema. El resultado puede ser representado en un organigrama como el de la figura 118. Adviértase que éste es un programa destinado a encontrar un objeto que se ajuste a la descripción. Luego, sería incorporada una orden para que se haga algo con ese objeto, una pregunta acerca del mismo o, si aparece en un enunciado, se convertiría en parte del programa que ha sido generado para representar la significación, con vistas a su uso posterior. Adviértase que este fragmento de programa también puede utilizarse como verificación de si un objeto se ajusta a la descripción, en el caso de que la primera indicación ENCUENTRE se emitiese con anterioridad al examen exclusivo de ese objeto particular.

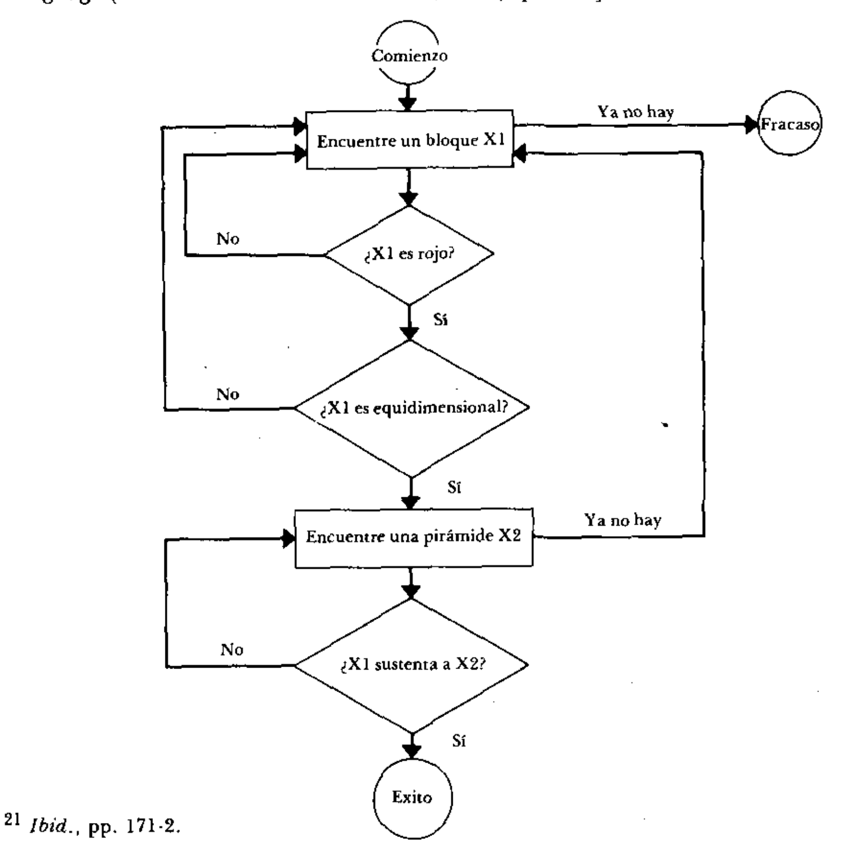
A primera vista, da la impresión de que este programa tiene demasiada estructura, en la medida en que no queramos pensar que la significación de una simple expresión contiene, en forma explícita, bucles, verificaciones condicionales y otros detalles de programación. La solución reside en proporcionar un lenguaje interno que contenga los bucles y verificaciones propios de sus originales, y donde la representación del proceso sea tan simple como la descripción. El programa que se describe en la figura 118, formulado en PLANNER, tendría esta apariencia:

[20] Winograd, "A Procedural Model", pp. 182-3.

(OBJETIVO (ES ?X1 BLOQUE))
(OBJETIVO (COLOR DE ?X1 ROJO))
(OBJETIVO (EQUIDIMENCIONAL ? X1))
(OBJETIVO (ES ?X2 PIRAMIDE))
(OBJETIVO (SUSTENTA A ?X1 ?X2))

Los bucles del organigrama están implícitos en la estructura de control de retorno de PLANNER. La descripción es evaluada mediante el seguimiento de la lista hasta que fracasa algún objetivo, instante en el cual el sistema retorna automáticamente al último punto donde fue adoptada una decisión, e intenta otra posibilidad. Se puede adoptar una decisión dondequiera que aparezca un nuevo nombre de objeto o VARIABLE (señalada por el prefijo "?"), como "?X1" o "?X2". Las variables son utilizadas por el comparador de patrones. Si ya han sido asignadas a un ítem particular, este último verifica si el OBJETIVO es verdadero para ese ítem. Si no es así, verifica la existencia de todos los ítems que puedan satisfacer el OBJETIVO, mediante la elección de uno de ellos, y luego de otros sucesivamente, en todo punto hasta el cual se produzca el retorno. Así, la distinción entre elección y verificación, inclusive, es implícita.[21]

Figura 118. Representación procedimental de "un cubo rojo que sustenta a una pirámide". [Adaptado de: Roger Schank y Kenneth Colby, Computer Models of Thought and Language *(San Francisco: W. H. Freeman, 1973), p. 172.]*



[21] *Ibid.*, pp. 171-2.

Una importante decisión estratégica, en el diseño de este programa, fue la de no hacer una traducción total del inglés a LISP, sino solamente parcial, y a PLANNER. De esta forma (puesto que el intérprete PLANNER es, por su parte, formulado en LISP), fue insertado un nuevo nivel intermedio —PLANNER— entre el lenguaje de nivel máximo (inglés) y el lenguaje de nivel mínimo (lenguaje de máquina). Una vez elaborado un programa PLANNER a partir de un fragmento de oración inglesa, puede ser remitido al intérprete PLANNER, y entonces los niveles superiores de SHRDLU quedan en libertad de ocuparse de otras tareas.

La clase de decisión que se plantea constantemente es: ¿cuántos niveles debe tener un sistema? ¿Cuánta, y de qué tipo, ha de ser la "inteligencia" colocada en cada nivel? Estos son algunos de los problemas arduos que enfrenta IA en la actualidad. A causa de que es muy poco lo que sabemos de la inteligencia natural, nos es difícil determinar qué nivel de un sistema artificialmente inteligente tiene que ejecutar cuál parte de una tarea.

Esto permite contar con una visión de lo que hay detrás de las escenas del diálogo precedente. En el próximo capítulo, entraremos en contacto con nuevas y especulativas ideas en materia de IA.

Contrafactus

El Cangrejo ha invitado a un pequeño grupo de amigos a presenciar un encuentro de futbol por televisión. Aquiles ya ha llegado, pero la Tortuga y su amigo el Perezoso aún no.

Aquiles: ¿Serán ésos nuestros amigos, viniendo en ese insólito vehículo de una sola rueda?

(*El Perezoso y la Tortuga desmontan y entran.*)

Cangrejo: Ah, mis amigos, encantado de verlos. Le presento a mi viejo y querido señor Perezoso, Aquiles. Creo que ya se conocen con la Tortuga.
Perezoso: Que yo recuerde, es la primera vez que soy presentado a un Bicíclope. Es un placer, Aquiles. He oído muchas cosas magníficas acerca de la especie biciclópea.
Aquiles: Mucho gusto. Me llama la atención su elegante vehículo.
Tortuga: ¿Se refiere a nuestro tándem uniciclo? No creo que sea muy elegante. Es tan sólo un medio para ir de A hasta B, a la misma velocidad.
Perezoso: La construye una empresa que también fabrica subibajas-subibajas.
Aquiles: Ya veo, ya veo. ¿Qué es esta perilla?
Perezoso: Es la palanca de cambios.
Aquiles: ¡Ajá! ¿Y cuántas velocidades tiene?
Tortuga: Una, que incluye la reversa. Casi todos los modelos tienen algunas más, pero éste es un modelo especial.
Aquiles: Parece un tándem uniciclo muy fino. Oh, señor Cangrejo, yo quería decirle cuánto disfruté escuchando la actuación de su orquesta, anoche.
Cangrejo: Gracias, Aquiles. ¿Estaba usted allí, por casualidad, señor Perezoso?
Perezoso: No, imposible, es triste para mí decirlo. Estaba participando en los singles mixtos de un torneo de ping-ping. Fue muy emocionante porque mi equipo obtuvo un empate de uno solo por el primer puesto.
Aquiles: ¿Les correspondió algún trofeo?
Perezoso: Ciertamente que sí: una cinta de Möbius de dos lados, hecha de cobre; uno de los lados está enchapado en plata y el otro en oro.
Cangrejo: Felicitaciones, señor Perezoso.
Perezoso: Gracias. Bueno, hábleme del concierto.
Cangrejo: Fue una actuación deliciosa. Tocamos algunas composiciones de los mellizos Bach . . .

Perezoso: ¿El célebre Joh and Sebastian?*

Cangrejo: Idéntico. Y hubo una obra que me hizo pensar en usted, señor Perezoso: un maravilloso concierto de piano para dos manos izquierdas; el penúltimo (y único) movimiento fue una fuga a una voz. Ya puede usted imaginarse sus complicaciones. Para finalizar, ejecutamos la Novena Zenafonía de Beethoven. Cuando terminamos, alguien del público se incorporó y aplaudió con una mano. Fue sobrecogedor.

Perezoso: Oh, lamento habérmelo perdido. Pero supongo que habrá sido grabado, ¿verdad? Tengo en casa un excelente aparato de alta fidelidad para escuchar la grabación: es el mejor sistema monoaural en dos canales que se puede conseguir.

Cangrejo: Estoy seguro de que le será fácil encontrar el disco. Bueno, amigos míos, está por comenzar el partido.

Aquiles: ¿Quién juega, señor Cangrejo?

Cangrejo: Creo que el Equipo Local contra los Visitantes. Oh, no, eso fue la semana pasada. Esta semana juegan los Foráneos.

Aquiles: Yo le voy al Equipo Local, siempre lo hago.

Perezoso: Oh, qué convencional. Yo nunca me aficiono al Equipo Local. Cuando más cerca de las Antípodas reside un equipo, con más entusiasmo lo aliento.

Aquiles: Oh, ¿así que usted vive en las Antípodas? He oído que es encantador vivir allí, pero no me decidiría a visitarlo, queda demasiado lejos.

Perezoso: Lo extraño de ellas es que, por más que uno viaje, nunca se les acerca.

Tortuga: Ese lugar me gusta.

Cangrejo: Ya es la hora. Creo que hay que encender la TV.

(Se aproxima a un enorme gabinete provisto de una pantalla, debajo del cual hay un panel de instrumentos no menos complicado que el de un jet. Acciona un botón, y en la pantalla aparece, en vívidos colores, el estadio de futbol.)

Relator: ¡A todos los amantes del futbol, muy buenas tardes! Bueno, parece que ha vuelto la oportunidad de ver enfrentados en el campo de juego al Equipo Local y al Foráneo, protagonizando su clásica rivalidad futbolera. Ha estado lloviznando estos días, y sigue haciéndolo en este momento, por lo que el terreno se encuentra un tanto mojado, pero a pesar del clima todo anuncia un partido extraordinario, especialmente con el aporte de ese GRAN par de jugadores del Equipo Local, Calceta y Palindromi. ¡Se inicia el encuentro! Mueve la pelota Bottini, para el Equipo Local, pero rápidamente intercepta Cachúchez, de los Foráneos, quien emprende veloz carrera en procura del área contraria;

* "And": y. La expresión logra dos efectos: sonar casi exactamente como "Johann Sebastian", y dar un mismo marco a unidad y dualidad. [T.]

sortea a un hombre, luego a otro y, cuando se dispone a enviar el centro es derribado por Menisconi, del Equipo Local. Falta que el juez señala de inmediato.

Cangrejo: ¡Soberbio avance! ¿Vieron que Calzónez CASI se la quita a Cachúchez? Faltó un pelo, se barrió limpiamente . . .

Perezoso: Oh, no sea tonto, Cangrejo. No hubo nada de eso. Calzónez NO se la quitó a Cachúchez. No hay necesidad de confundir al pobre Aquiles (ni a los demás) con esa cháchara de lo que "casi" ocurre. Los hechos son los hechos, sin "casi", "si", "y" ni "pero" que valga.

Relator: Aquí tenemos la repetición instantánea. Observemos cómo aparece Calzónez desde el flanco, sorprendiendo a Cachúchez con su barrida lateral y por poco no le roba limpiamente la pelota.

Perezoso: ¡"Por poco"! ¡Bah!

Aquiles: ¡Qué buena jugada! ¿Qué haríamos sin repeticiones instantáneas?

Relator: Tiro libre en favor de Foráneos. Buena posibilidad. Lo ejecuta Cabecita, quien le pega mal a la pelota; no obstante, la obtiene su compañero Casáquez, quien intenta habilitar a Cachúchez, pero este último está en evidente posición fuera de juego. Fracasa así este ataque de Foráneos.

Perezoso: ¡Precioso! ¡Qué buen partido!

Aquiles: Cómo, señor Perezoso, creía que era usted partidario de los Foráneos. Acaban de desperdiciar una buena oportunidad.

Perezoso: ¿Si? Oh, no importa, porque el partido es muy bueno. Sigamos viéndolo.

(. . . *han transcurrido ya bastantes minutos de juego. El Equipo Local está perdiendo 1 a 0, y en ese momento inicia un rápido contragolpe.*)

Relator: La pelota en poder de Calceta, quien busca compañero. Amaga extenderla hacia Calzónez, se abre la defensa y Calceta aprovecha para filtrar un excelente pase recto hacia Palindromi, quien aparece en posición de centrodelantero, domina la pelota, ingresa al área chica, ¡la portería a su disposición, y . . .! (*Se oye un fuerte rugido procedente de las gargantas de la multitud.*) . . . ¡oh, en el último momento la alarga demasiado y la pelota sale del campo, a un costado de la portería! ¡El Equipo Local ha dejado escapar una ocasión inmejorable! Si Palindromi no hubiera fallado en el último toque, las probabilidades de gol eran abrumadoras. Observemos la repetición instantánea subjuntiva:

(*La pantalla vuelve a la situación inicial de la jugada.*)

Relator: La pelota en poder de Calceta, quien busca compañero. Amaga extenderla hacia Calzónez, se abre la defensa y Calceta aprovecha para filtrar un excelente pase recto hacia Palindromi, quien aparece en po-

sición de centrodelantero, domina la pelota, ingresa al área chica, ¡la portería a su disposición, y . . .! (*Se oye un fuerte "aah" procedente de las gargantas de la multitud.*) . . . ¡oh, en el último momento la alarga demasiado y la pelota casi sale del campo, a un costado de la portería! ¡Pero no llegó a salir! ¡Palindromi la recupera, y se dispone a enviar un centro atrás que puede ser mortal para la todavía no recuperada línea defensiva de Foráneos! (*El estadio vibra en un grito gigantesco de aprobación.*) Bueno, señores, esto es lo que hubiera ocurrido si Palindromi no hubiera mandado la pelota fuera del campo.

Aquiles: Un momento . . . ¿La pelota SALIO, o NO salió?

Cangrejo: Oh, sí salió. Esto es sólo una repetición instantánea subjuntiva. Consiste simplemente en darle continuidad hipotética a una pequeña posibilidad, ¿se da cuenta?

Perezoso: ¡Jamás escuché una cosa tan disparatada! Lo siguiente será que inventen los resultados.

Tortuga: Las repeticiones instantáneas subjuntivas son un tanto insólitas, ¿verdad?

Cangrejo: No del todo, si usted tiene un Subjun-TV.

Aquiles: ¿Escuché mal, o dice usted que hace falta un Brujun-TV?

Cangrejo: ¡Subjun-TV! Es un tipo nuevo de TV, dentro del cual cabe el modo subjuntivo. Es particularmente indicado para partidos de futbol y cosas así. Es precisamente el tipo de mi aparato.

Aquiles: ¿Por qué tiene tantos botones y selectores extraños?

Cangrejo: Para poder seleccionar el canal adecuado. Hay muchos canales que transmiten en el modo subjuntivo, y es conveniente que resulte fácil sintonizarlos.

Aquiles: ¿Nos podría mostrar cómo es eso? Sospecho que no entiendo muy bien qué significa lo de "que transmiten en el modo subjuntivo".

Cangrejo: Oh, es realmente algo muy sencillo. Puede descubrirlo por sí mismo. Voy a la cocina a preparar un poco de frituras francesas, que bien sé son la debilidad del señor Perezoso.

Perezoso: ¡Mmmmm! ¡Vaya nomás, Cangrejo! Es mi manjar predilecto.

Cangrejo: ¿Y ustedes?

Tortuga: Yo comería algunas.

Aquiles: También yo. Pero espere un segundo, antes de irse a la cocina, ¿hay algún truco para utilizar su Subjun-TV?

Cangrejo: Nada especial. Siga viendo el partido, y en el momento en que algo esté por salir mal, o en que usted quiera que las cosas hubiesen sido de otro modo, basta con que juguetee con los selectores y vea lo que sucede. El aparato no va a sufrir ningún daño, pese a que aparecerán ciertos canales exóticos. (*Y abandona la habitación, rumbo a la cocina.*)

Aquiles: Me pregunto qué querrá decir con eso. Oh, bueno, volvamos al partido; me tiene interesadísimo.

Relator: Momentos de dominio del Equipo Local. Casáquez está siendo

rebasado por el hombre al que marca, Calceta; éste ingresa al área y . . . ¡en el instante de recibir la pelota e intentar la media vuelta es derribado! ¡Penalty! No hay protestas. El árbitro ubica la pelota, que el mismo Calceta se encargará de impulsar . . .

Aquiles: ¡Reviéntala, Calceta! ¡Perfora la red, hombre!

Relator: . . . Lo hace y . . . ¡Pelota afuera! Increíblemente, Calceta resbaló y no pudo pegarle peor al balón, el cual sale del campo, a muchos metros de la portería. La causa ha sido sin duda el húmedo estado del terreno. Pero, ¡atención! Pelota rápidamente puesta en juego por los Foráneos, y disputada en el medio campo, pero ganada briosamente por Fortunato, quien se interna a gran velocidad en campo contrario. ¡Mortífero contragolpe! Fortunato ya en el borde del área, en excelente posición. Un defensor intenta bloquearlo, Fortunato le pasa la pelota en sombrerito por encima de la cabeza, ¡precioso! Y ¡Manos! El defensor ha retenido la pelota con la mano, en su desesperación por neutralizar al formidable Fortunato. El árbitro otorga tiro libre directo, que hará efectivo Fortunato mismo, hombre conocido por la potencia y certeza de sus disparos. ¡Mala perspectiva para los Locales!

Aquiles: ¡Oh, no! Si no fuera por la lluvia . . . (*Se aprieta las manos con angustia.*)

Perezoso: ¡OTRA de esas confusas hipótesis! ¿Por qué siempre están ustedes huyendo hacia esos absurdos mundos de fantasía? En lugar suyo, yo me mantendría firmemente apegado a la realidad; mi lema es: "Nada de sinsentidos subjuntivos", y no me apartaré de él así me ofrezcan cien —mejor aun, ciento doce— frituras francesas.

Aquiles: Oiga, eso me dio una idea. A lo mejor, moviendo debidamente estos botones, consigo una repetición instantánea subjuntiva donde no haya habido lluvia, donde Calceta convierta el penalty, donde Fortunato no esté por patear un terrible tiro libre. A ver . . . (*Se para ante el Subjun-TV y lo observa fijamente.*) Pero no tengo idea de para qué son estos botones. (*Al azar, hace girar algunos.*)

Relator: Momentos de dominio del Equipo Local. Casáquez está siendo rebasado por el hombre al que marca, Calceta; éste ingresa al área y . . . ¡en el instante de recibir la pelota e intentar la media vuelta es derribado! ¡Penalty! No hay protestas. El árbitro ubica la pelota, que el mismo Calceta se encargará de impulsar . . .

Aquiles: ¡Reviéntala, Calceta! ¡Perfora la red, hombre!

Relator: . . . Lo hace y . . . ¡Goool! ¡Goool del Equipo Local! Saque de centro ahora y el formidable Fortunato no puede recibir con comodidad, anticipado por la decisión de una media local muy bien plantada, ¡que ya propicia el avance de sus arietes mediante un excelente pase hacia . . .! (*Enorme júbilo en las tribunas de los adictos al Equipo Local.*) Bueno, queridos aficionados, esto hubiera sido así, si la pelota no fuera redonda, sino elipsoidal. En realidad, el Equipo Local desperdició el penalty, y ahora puede verse más desfavorecido todavía en el marca-

dor, luego del cañonazo que prepara Fortunato.

Aquiles: ¿Qué opina de ESTO, señor Perezoso?

(*Y Aquiles se dirige con triste sonrisa al Perezoso, pero éste se encuentra ajeno a la desolación de aquél, pues todo su interés se centra en la llegada del Cangrejo, quien trae una amplia bandeja con ciento doce —mejor aun, cien— grandes y deliciosas frituras francesas, y servilletas para todos.*)

Cangrejo: ¿Qué me dicen, amigos, de mi Subjun-TV?

Perezoso: De lo más decepcionante, Cangrejo, para serle franco. Me parece una cosa chocantemente insólita; por lo menos la mitad de las veces incursiona sin propósito en el disparate. Si fuera mío, se lo regalaría de inmediato a alguien como usted, Cangrejo. Pero, por supuesto, no es mío.

Aquiles: Es un invento sumamente extraño. Intenté hacer pasar de nuevo una jugada para ver cómo hubiera sido bajo condiciones climáticas diferentes, ¡pero esta cosa parece tener designios propios! En lugar de cambiar el clima, cambió la forma de la pelota, ¡la hizo ELIPSOIDAL en vez de conservar su forma de PELOTA DE FUTBOL! Dígame, pues, ¿cómo es posible que un futbol no tenga forma de futbol? Es una contradicción en los términos. ¡Qué descabellado!

Cangrejo: ¡Qué poco excitante! Pensaba que, con toda seguridad, encontraría usted subjuntivos más interesantes. ¿Querría ver qué pasaba si, en vez de futbol, hubiese sido beisbol?

Tortuga: ¡Oh! ¡Magnífica idea!

(*El Cangrejo gira dos botones, y se sienta.*)

Relator: Ya dejamos cuatro atrás, y . . .

Aquiles: ¡¿CUATRO?!

Relator: Así es, amable público, cuatro. Cuando se pasa de futbol a beisbol, hay que entregar ALGO a cambio. Como estaba diciendo, ya dejamos cuatro atrás, y tenemos a los Foráneos en el field. Calceta al bat. Foráneos esperando el toque de bola. Cachúchez levanta su brazo para lanzar . . . y saca una bola larga y alta, que se dirige recta hacia Calceta.

Aquiles: ¡Reviéntala, Calceta! ¡Hazles comerse un jonrón!

Relator: . . . pero ahora parece una pelotita de papel, mientras describe una extraña curva. ¡Y ahora la bola es ganada briosamente por Fortunato! Parece que el bat de Calceta apenas la rozó, y la hizo elevarse. El umpire está señalando que el formidable Fortunato ha parado para los Foráneos, al final de la séptima entrada. Mala perspectiva para los Locales. Así es como se habría visto este juego, amantes del futbol, si se hubiese tratado de beisbol.

Perezoso: ¡Bah! También podría haber hecho jugar este partido en la Luna.

Cangrejo: ¡Dicho y hecho! Sólo muevo un botón aquí, otro allá . . .

(*Aparece en la pantalla un desolado campo de juego, lleno de cráteres; en él, dos equipos enfrentados, vestidos con atuendo espacial, inmóviles. Súbitamente, se rompe la quietud, y los jugadores surcan el aire mediante grandes brincos, que a veces los hacen pasar por sobre la cabeza de sus colegas. La pelota es puesta en juego, y vuela tan alto que prácticamente desaparece, hasta que comienza a descender lentamente y llega a los pies de uno de los futbolistas astronautas, casi a quinientos metros de distancia de donde fuera lanzada.*)

Relator: Aquí, amigos, han presenciado la repetición subjuntiva de cómo hubieran sucedido las cosas en la Luna. Tendremos el gran gusto de estar de nuevo con ustedes inmediatamente después de este importante mensaje comercial de la cerveza más futbolística . . .

Perezoso: ¡Si yo no fuera tan holgazán, me encargaba de retornarle este desastroso aparato de TV al vendedor! Pero, pobre de mí, es mi destino ser un flojo Perezoso . . . (*Se sirve una gran porción de frituras francesas.*)

Tortuga: Es una invención maravillosa, señor Cangrejo. ¿Puedo sugerir una escena hipotética?

Cangrejo: Por supuesto.

Tortuga: ¿Cómo habría sido la última jugada si el espacio hubiese sido tetradimensional?

Cangrejo: Oh, qué complicado, señora Tortuga, pero creo que puedo codificarlo en los selectores. Un instante, por favor.

(*Va hasta el aparato y, al principio, da la impresión de estar empleando a fondo la capacidad del panel de control de su Subjun-TV, ya que mueve dos o tres veces casi todos los botones, y verifica cuidadosamente diversos indicadores. Por último, se aparta con expresión satisfecha.*)

Creo que lo conseguiremos.

Relator: Observemos ahora la repetición instantánea subjuntiva.

(*Aparece en la pantalla un confuso conjunto de caños retorcidos, que se hace primero más grande, y luego más pequeño; durante un instante, parece describir algo semejante a una rotación. Luego, se torna en un curioso objeto en forma de hongo. El relator acompaña el desarrollo de esta extraña metamorfosis con el comentario que sigue.*)

Calceta maniobra para avanzar. Levanta la cabeza, ve a Palindromi en punta izquierda, desmarcado, y cambia hacia allí el frente de ataque. ¡Excelente pase largo! Palindromi emprende veloz carrera en posición de puntero, deja atrás al lateral contrario, y raudamente entra en diagonal al área de los Foráneos, ¡magnífica oportunidad de promiso-

ria pared con . . .! Y así pudieron ver ustedes, amantes tridimensionales del futbol, cómo sería éste jugado en cuatro dimensiones espaciales.

Aquiles: ¿Qué es lo que hace usted, señor Cangrejo, cuando gira esos selectores en el panel de control?

Cangrejo: Selecciono el canal adecuado. Usted sabe, hay todo género de canales subjuntivos que transmiten simultáneamente, y yo necesito sintonizar exactamente el que represente la clase de hipótesis que ha sido sugerida.

Aquiles: ¿Esto se puede hacer en cualquier TV?

Cangrejo: No, la mayoría de los aparatos de TV no pueden recibir canales subjuntivos. Hace falta un circuito especial que es muy difícil de obtener.

Perezoso: ¿Y cómo sabe usted qué están transmitiendo los canales? ¿Se entera por el periódico?

Cangrejo: No me hace falta saber cómo se identifican, con letras o números, los canales. En lugar de ello, los sintonizo mediante la codificación, en estos selectores, de la situación hipotética que quiero que sea representada. Técnicamente, esto se llama "ubicar un canal mediante sus parámetros contrafácticos". Siempre hay una cantidad grande de canales que transmiten mundos concebibles. Todos los canales que presentan mundos "próximos" entre sí tienen también identificaciones próximas entre sí.

Tortuga: Pero usted no había movido los botones la primera vez que vio una repetición instantánea subjuntiva.

Cangrejo: Oh, es que había sintonizado un canal muy próximo al Canal de la Realidad, pero ligeramente apartado de la misma. Así que, de vez en cuando, se desvía de lo real. Es casi imposible sintonizar EXACTAMENTE el Canal de la Realidad. Lo cual está muy bien, porque la realidad es tan insípida . . . ¡Todas sus repeticiones instantáneas son fieles! ¿Se da cuenta? ¡Qué cosa pesada!

Perezoso: Me parece que la noción íntegra su Subjun-TV es tremendamente pesada. Pero tal vez yo pudiese modificar mi criterio si este dispositivo mecánico suyo pudiese exhibirme una contrafactibilidad INTERESANTE. Por ejemplo, ¿cómo hubiera sido la última jugada si la suma no fuese conmutativa?

Cangrejo: ¡Ay, no lo puedo creer, pobre de mí! Esa modificación es demasiado radical, sospecho, para este modelo. Desgraciadamente, no poseo un Superjun-TV, el cual es lo máximo dentro de esta línea. Un Superjun-TV puede resolver cualquier cosa que usted le plantee.

Perezoso: ¡Bah!

Cangrejo: Sin embargo, fíjese, PRACTICAMENTE puedo hacerlo yo también. ¿Querría ver cómo hubiera sido la última jugada si 13 no fuera un número primo?

Perezoso: ¡No, gracias! ¡ESO no tiene ningún sentido! Al fin y al cabo, si yo fuera la última jugada, estaría cansado de tanto cambiar de disfraz para satisfacer sus volubles conceptos. ¡Dejemos en paz el juego!

Aquiles: ¿Dónde consiguió este Subjun-TV, señor Cangrejo?

Cangrejo: Créase o no, el señor Perezoso y yo fuimos a la feria al aire libre la otra noche, y me lo ofrecieron como primer premio de una rifa. Por lo común, hago caso omiso de tales frivolidades, pero quién sabe qué loco impulso se apoderó de mí, y compré un número.

Aquiles: ¿Y usted, señor Perezoso?

Perezoso: Lo confieso, compré un número, solamente para darle el gusto a mi estimado Cangrejo.

Cangrejo: ¡Y cuando anunciaron el número favorecido, descubrí, estupefacto, que había ganado la rifa!

Aquiles: ¡Fantástico! ¡Jamás conocí a nadie que haya ganado una rifa!

Cangrejo: Yo estaba de una pieza con mi buena suerte.

Perezoso: ¿No tiene nada más que decir de esa rifa, Cangrejo?

Cangrejo: Oh, muy poco más. Solamente que mi número era el 129, y cuando anunciaron el número ganador, dijeron que era el 128, uno menos, nada más.

Perezoso: Así que, como está a la vista, en realidad no ganó, de ninguna manera.

Aquiles: CASI ganó, sin embargo . . .

Cangrejo: Prefiero decir que gané yo, fíjese. Estuve tan terriblemente cerca . . . Si mi número hubiera sido sólo uno más pequeño, hubiera ganado.

Perezoso: Desgraciadamente, sin embargo, Cangrejo, un yerro así vale igual que un kilómetro de más.

Tortuga: O de menos. Y usted, señor Perezoso, ¿Qué número tenía?

Perezoso: El 256: la potencia de 2 que sigue a 128, en orden decreciente. ¡Y eso es un acierto, con toda seguridad, o no me explico si no! No puedo entender por qué esos equitativos funcionarios —esos INequitativos funcionarios— se mostraron tan necios. Se negaron a adjudicarme mi totalmente merecido premio. Hubo un bromista que reclamó el premio para SI, aduciendo que su número era el 128. Sigo pensando que mi número era mucho más adecuado que el SUYO, pero no podía declararle la guerra a las autoridades municipales de la feria.

Aquiles: Estoy confundido, señor Cangrejo. ¿Si, al fin y al cabo, usted no ganó el Subjun-TV, cómo es que nos hemos pasado aquí la tarde mirándolo? Pareciera que nosotros mismos hemos estado viviendo en cierta clase de mundo hipotético, un mundo que hubiese existido si las circunstancias hubieran sido ligeramente distintas . . .

Relator: Y así, queridos amigos, es como hubiese transcurrido la tarde en casa del señor Cangrejo, si éste hubiera ganado el Subjun-TV. No obstante, puesto que no fue así, los cuatro amigos se limitaron a pasar el rato viendo la derrota del Equipo Local por 128 a 0, ¿o fueron 256 a 0? Bueno, en realidad no importa mucho, tratándose de hockey plutoniano sobre vapor, en cinco dimensiones.

CAPITULO XIX

Inteligencia Artificial: mirada prospectiva

Subjuntividad y situaciones "casi"

LUEGO DE LEER el *Contrafactus*, me dijo un amigo: "¡Mi tío casi fue Presidente de los Estados Unidos!" "¿De veras?", dije. "Claro", me contestó, "fue capitán de la torpedera PT 108." (John F. Kennedy fue capitán de la PT 109.)

De esto se trata el *Contrafactus*. A través de la reflexión cotidiana, constantemente estamos elaborando variantes mentales de las situaciones que enfrentamos, de las ideas que se nos presentan o de los hechos que suceden; dejamos intocados algunos rasgos, pero a otros los "retocamos". ¿Con cuáles rasgos hacemos esto último? ¿A cuáles ni se nos ocurre modificar? ¿Cuáles son los hechos percibidos, en algún profundo nivel intuitivo, como estrechamente relacionados con los efectivamente sucedidos? ¿De cuáles creemos que "casi" sucedieron o que "podrían haber" sucedido, aun de modo ambiguo? ¿Qué versiones alternativas de los acontecimientos emergen en nuestra mente, fuera de todo pensamiento consciente, cuando escuchamos un relato? ¿Por qué ciertas contrafactibilidades nos impresionan como "menos contrafactibles" que otras? Después de todo, es obvio que cualquier cosa que no haya sucedido no sucedió. No hay grados de "no acaecimiento"; y lo mismo vale para las situaciones "casi". En ocasiones uno dice lamentándose, "Casi ocurrió", y en otras dice exactamente lo mismo, pero con alivio. Sin embargo, el "casi" reside en la mente, no en los acontecimientos externos.

Estamos paseando en automóvil por un camino campestre y nos topamos con un enjambre de abejas, súbitamente, sin darnos tiempo a nada; toda la situación pasa de inmediato a ser colocada en la perspectiva de un enjambre de "repeticiones" que inundan nuestra mente. Pensaremos, seguramente, "¡por suerte la ventanilla no está abierta!" o, por el contrario: "¡desgraciadamente la ventanilla no está cerrada!" O bien, "¡por fortuna no se me ocurrió venir en bicicleta!", o "¡Por qué no habré pasado por aquí cinco segundos antes!" Otras repeticiones, curiosas pero posibles: "¡Si en vez de abejas hubiesen sido ciervos, me podría haber matado al chocar con ellos!" "Seguro que estas abejas hubieran preferido tener una colisión con un rosal." Repeticiones más curiosas aun: "¡Lástima que estas abejas

no sean billetes de banco!" "¡Lástima que en vez de ser una sola, sea todo un enjambre!" "Suerte que yo soy yo en lugar de ser el enjambre." ¿Qué retocamos y qué no retocamos, y por qué?

No hace mucho, la revista *The New Yorker* reprodujo el siguiente pasaje, publicado por el *Philadelphia Welcomat*:[1]

> Si Leonardo da Vinci hubiese nacido mujer, el cielorraso de la Capilla Sixtina no hubiera sido pintado.

The New Yorker hizo este comentario:

> Y si Miguel Angel hubiera sido gemelos siameses, hubiese terminado su tarea en la mitad del tiempo.

Lo destacado por el comentario de *The New Yorker* no es que tales contrafactibilidades sean *falsas*; va más allá, sugiriendo que quienquiera acaricie ideas así —las de modificar el sexo o el número de un ser humano determinado— tiene que ser alguien un tanto trastornado. Paradójicamente, sin embargo, en el mismo ejemplar apareció, sin el menor sonrojo, la oración que sigue, como conclusión de una reseña bibliográfica:

> Creo que [el profesor Philipp Frank] hubiese disfrutado enormemente de estos dos libros.[2]

Pero el pobre profesor Frank ya había fallecido, y está claro que es un disparate suponer que alguien pueda leer libros luego de haber muerto. Entonces, ¿por qué no fue también ironizada esta seria afirmación? De alguna manera, en un sentido difícil de determinar, los parámetros retocados de esta oración no violan tanto nuestra noción de la "posibilidad" como los ejemplos anteriores. Hay algo que nos permite imaginar, con más facilidad en este caso que en los otros, que "todas las otras cosas permanecen igual". ¿Pero por qué? ¿De qué se tratan los medios que utilizamos para clasificar acontecimientos y personas, medios que nos brindan certidumbres sólidas acerca de cuándo es "razonable" y cuándo es "disparatado" efectuar retoques?

Consideremos con cuánta naturalidad nos desplazamos desde la enunciación, de valor neutro, "No sé ruso", a la expresión desiderativa más intensa, "Me gustaría saber ruso", luego a la exclamativa, con carga emotiva, "¡Ojalá supiera ruso!", y por último, a la ricamente contrafáctica "Si supiera ruso, hubiera leído a Chéjov y a Lermontov en su original". ¡Qué mediocre y muerta es una mente que en una negación sólo ve una barrera opaca! Una mente viva puede ver allí un mundo abierto de posibilidades.

[1] *The New Yorker*, Sept. 19, 1977, p. 107.

[2] *Ibid.*, p. 140.

Creo que las situaciones "casi" y las subjuntividades inconscientemente elaboradas son representativas de parte de las más pródigas fuentes potenciales de penetración en los modos a través de los cuales los seres humanos organizan, y ordenan en categorías, su percepción del mundo. Un coformulador elocuente de este punto de vista es el lingüista y traductor George Steiner, quien dice, en su libro *After Babel*:

> Es perfectamente posible que los centros generadores del lenguaje sean lo hipotético, lo "imaginario", lo condicional, la sintaxis de la contrafactibilidad y de la contingencia . . . [Estos] hacen algo más que ocasionar perplejidades filosóficas y gramaticales. Lo mismo que las formas verbales de futuro, con las cuales se percibe que aquéllos están emparentados para formar, en conjunto, el conjunto más extenso de las "suposiciones" o "alternativas", tales proposiciones "sí" son fundamentales para la la dinámica de la emotividad humana . . .
>
> Son nuestras la capacidad, la necesidad, de contradecir o "in-decir" el mundo, de imaginarlo y verbalizarlo de otra manera . . . Necesitamos una palabra para designar el poder y la compulsión que fuerzan al lenguaje a plantear la "otredad" . . . Quizá la palabra sea "alteridad", y permita definir "lo que no es el caso", las proposiciones contrafácticas: las imágenes y las formas de la voluntad y de la evasión que insuflamos a nuestro ser mental y gracias a las cuales elaboramos el ámbito, cambiante y en buena medida ficticio, de nuestra existencia somática y social . . .

Finalmente, Steiner eleva un himno contrafáctico a la contrafactibilidad:

> Es inverosímil que el hombre, tal como lo conocemos, hubiese podido sobrevivir sin los recursos ficticios, contrafácticos y antideterministas del lenguaje, sin la capacidad semántica, generada y almacenada en las áreas "superfluas" de la corteza, de concebir y articular posibilidades ubicadas más allá del circuito de la decadencia orgánica y de la muerte.[3]

La construcción de "mundos subjuntivos" se produce en forma tan casual, tan natural, que muy difícilmente advertimos que lo estamos haciendo. Seleccionamos, dentro de nuestra fantasía, un mundo que esté próximo, en cierto sentido mental interno, al mundo real. Comparamos lo que es real con lo que percibimos como *casi* real. Cuando procedemos así, ganamos un tipo intangible de perspectiva acerca de la realidad. El Perezoso es un ejemplo divertido de variación con respecto a la realidad: un ser pensante despojado de la capacidad de introducirse en la subjuntividad (al menos, un ser que *sostiene* estar despojado de tal capacidad, ¡aunque podemos registrar que todo lo dicho por él está plagado de contrafactibilidades!) ¡Pensemos cuán inconmensurablemente más pobre sería nuestra vida mental si no tuviéramos la capacidad creativa de abandonar el cerco de la realidad para desplazarnos hacia el grato "si"! Además, desde el punto de vista del estudio de los procesos humanos de pensamiento, este desplazamiento es sumamente interesante pues, por regla

[3] George Steiner, *After Babel*, pp. 215-227.

prácticamente general, sucede sin la menor dirección consciente, lo cual significa que la determinación del tipo de cosas que admiten desplazamiento, por oposición a las que no lo admiten, proporciona una excelente mira sobre el pensamiento inconsciente.

Una forma de avanzar en nuestra perspectiva de esta dimensión mental es la de "enfrentar fuego con fuego". Esto es cumplido en el Diálogo, donde se le requiere a nuestra "capacidad subjuntiva" que imagine un mundo donde la noción misma de capacidad subjuntiva es desplazada, por comparación con lo que esperábamos. La primera repetición instantánea subjuntiva del Diálogo —relativa a Palindromi y los límites del campo de juego— sólo exige un esfuerzo imaginativo enteramente habitual. En realidad, fue inspirada por una observación absolutamente corriente y casual que me hiciera una persona sentada junto a mí en un partido de futbol. Por algún motivo, me llamó la atención, y me hizo preguntarme por qué parecía tan natural retocar esa circunstancia particular y no, digamos, el marcador del partido en ese momento. A partir de estas reflexiones, pasé a considerar otros aspectos, probablemente menos desplazables, tales como el clima, la clase de deporte y, luego, variaciones sin duda más alocadas (todo ello en el ámbito del Diálogo). Observé, con todo, que ciertos desplazamientos resultaban grandemente disparatados en una situación y muy normales en otras. Por ejemplo, a veces uno puede preguntarse espontáneamente cómo serían las cosas si la pelota tuviera una forma diferente (si uno está jugando al basquetbol con una pelota inflada a medias, pongamos por caso); otras veces, en cambio, eso no cabría en absoluto en la mente (digamos, mientras se observa un partido de futbol por televisión).

Estratos de estabilidad

Me pareció entonces, y me sigue pareciendo, que la desplazabilidad de un aspecto de un acontecimiento (o circunstancia) determinado depende de un conjunto de contextos autoincluidos, dentro de los cuales se percibe que sucede el acontecimiento (o circunstancia). Pueden ser provechosos aquí los términos *constante, parámetro* y *variable*, tomados de la matemática. Es frecuente que tanto matemáticos como físicos y otros especialistas desarrollen un cálculo, diciendo "c es una constante, p es un parámetro y v es una variable". Ello significa que cualquiera de estos elementos puede variar (incluida la "constante"); sin embargo, hay una jerarquía de la variabilidad. En la situación representada por los símbolos, c establece una condición global; p establece una condición un tanto menos global, la cual puede variar en tanto c no se modifique; finalmente, v puede variar en tanto c y p se mantengan fijos. Tiene escaso sentido pensar en mantener fija a v en tanto c y p varían, pues c y p establecen el contexto dentro del cual v adquiere significado. Por ejemplo,

imaginemos a un dentista con su lista de pacientes y, para cada paciente, una lista de dientes. Tiene pleno sentido (y elevados honorarios) mantener fijo al paciente y variar sus dientes, pero no tiene ningún sentido mantener fijo un diente y variar el paciente. (Pese a que, en ocasiones, tendría mucho sentido variar de dentista . . .)

Nuestra representación mental de una situación es construida estrato por estrato. El más bajo establece el aspecto más profundo del contexto: a veces, se encuentra tan abajo que no puede variar en absoluto; por ejemplo, la tridimensionalidad de nuestro mundo está tan incorporada que a la mayoría de las personas jamás se le ocurriría desplazarla mentalmente. Es una *constante* constante. Luego, hay estratos que establecen transitoria, no permanentemente, rasgos fijos de situaciones, a los cuales se puede denominar *supuestos de base*: son las cosas que, en el fondo de nuestra mente, sabemos que pueden variar pero, así y todo, son aceptadas por regla general como rasgos inmutables. También se los puede llamar "constantes"; por ejemplo, con respecto a un encuentro de futbol, las reglas del juego son constantes de este tipo. Tenemos después los "parámetros": hay que considerarlos más variables, pero aceptarlos transitoriamente como constantes; en un partido de futbol, son parámetros el clima, el equipo contrario, etc.; puede haber —probablemente haya— diversos estratos de parámetros. Por último, llegamos a los aspectos más "tambaleantes" de nuestra representación mental de la situación: las variables. Se trata de las cosas tales como la jugada de Palindromi en los límites del campo, a las cuales se "desata" mentalmente, y no se tiene inconveniente en desplazar más allá de sus valores reales, durante un breve lapso.

Marcos y contextos autoincluidos

La palabra *marco** está de moda actualmente en IA, y puede ser definida como *instrumentación computacional de un contexto*, expresión acuñada, lo mismo que muchas ideas a propósito de marcos, por Marvin Minsky, pese a que el concepto genérico existe desde hace un buen número de años. En lenguaje marco, se puede decir que las representaciones mentales de situaciones involucran marcos incluidos unos dentro de otros. Cada uno de los diversos ingredientes de una situación tiene su propio marco.

Sería interesante que explicite una de mis imágenes mentales a propósito de marcos autoincluidos. Supongámonos frente a un gran número de muebles del tipo de las cómodas con cajones. Cuando elegimos una cómoda, contamos con un marco, y los huecos donde van los cajones son los sitios adecuados para incorporar "submarcos". Ahora bien, los submarcos son, a su vez, cómodas con cajones; entonces, ¿cómo introducir una cómoda con cajones completa en el hueco previsto para un solo cajón

* "Frame": en el ámbito hispanohablante de la ciencia de las computadoras se la suele traducir también como *encuadre* o *configuración*. [T.]

dentro de otra cómoda con cajones? Es sencillo: se encoge y distorsiona la segunda cómoda puesto que, al fin y al cabo, esto es enteramente mental, no material. Asimismo, en el marco exterior puede haber diversos huecos para cajones que deben ser llenados; luego, puede ser necesario ocupar los huecos de algunas de las cómodas interiores (o submarcos). Y así siguiendo, recursivamente.

La vívida imagen surrealista de comprimir y aplastar una cómoda de modo que pueda amoldarse a un receptáculo de forma arbitraria es, tal vez, muy importante, pues insinúa que nuestros conceptos son comprimidos y aplastados por los contextos en los cuales los obligamos a ingresar. Así, ¿en qué se convierte nuestro concepto de "persona" cuando las gentes que consideramos son jugadores de futbol? Seguramente se tratará de un concepto distorsionado, implantado forzadamente en nosotros por el contexto global. Hemos introducido el marco "persona" en un hueco del marco "partido de futbol". La tesis de representar el conocimiento a través de marcos reposa en la idea de que el mundo consiste en subsistemas cuasi contiguos, cada uno de los cuales puede servir de contexto a otros sin sufrir una excesiva desorganización, o sin generar una excesiva desorganización durante el proceso.

Una de las nociones principales en materia de marcos es que cada uno de éstos viene provisto de su propio juego de expectativas. La imagen gráfica correspondiente nos mostraría a cada cómoda con un cajón introducido, aunque flojamente ajustado, en cada agujero: ese cajón recibe el nombre de *sustituto*. Si se nos dice, "Dibuje la margen de un río", elaboraremos una imagen visual dotada de diversos rasgos, la mayoría de los cuales serían omitidos si se hubiesen agregado a la primera indicación otras adicionales, como por ejemplo "durante una sequía" o "en Brasil" o "sin remolinos". La existencia de valores sustitutos permite que el proceso recursivo de rellenar los huecos pueda finalizar. En efecto, decimos: "Vamos a completar por nosotros mismos los agujeros en una extensión de tres estratos; más allá, apelaremos a las opciones subsidiarias." Junto con las expectativas subsidiarias, un marco contiene el conocimiento de sus límites de aplicación y recursos heurísticos para deslizarse hacia otros marcos en el caso de que haya sido ensanchado por encima de sus límites de tolerancia.

La estructura autoincluida de un marco brinda un medio para amplificar y examinar pequeños detalles desde la menor distancia que se desee: basta con dirigir el "zoom" sobre el submarco adecuado, luego sobre uno de sus submarcos, etc., hasta que se obtiene el volumen deseado de detallamiento. Es como tener un atlas carretero nacional que incluye, primero, un mapa de todo el país, y en su interior mapas de cada estado, y luego mapas de las ciudades y hasta de los pueblos más grandes, si es que uno necesita esos detalles. Es posible imaginar un atlas provisto de un volumen discrecional de detalles, que llegue a abarcar bloques urbanos, casas, habitaciones, etc. Se trata de algo similar a la utilización de un telescopio

con lentes de diferente poder: cada lente tiene su propio uso. Es importante que se pueda emplear toda la variedad de escalas, pues a menudo el detalle es no pertinente y hasta diversionista.

A causa de que marcos diferentes pueden ser arbitrariamente introducidos en los receptáculos de otros marcos, existen grandes posibilidades de conflicto o "colisión". El esquema primorosamente nítido de un solo conjunto global de estratos de "constantes", "parámetros" y "variables" es una ultrasimplificación. En realidad, cada marco tendrá su propia jerarquía de variabilidad, y esto es lo que lo habilita para analizar de qué modo percibimos un acontecimiento tan complejo como un partido de futbol, con su gran cantidad de submarcos, subsubmarcos, etc.: una operación increíblemente complicada. ¿Cómo accionan entre sí todos estos marcos? ¿Cómo se resuelve el conflicto existente cuando un marco dice, "Este ítem es una constante", y otro marco dice, "No, es una variable"? Estos son problemas profundos y difíciles de teoría del marco, para los cuales no tengo respuesta. Ocurre también que no hay todavía un completo acuerdo a propósito de qué es realmente un marco, ni de cómo se los ha de instrumentar dentro de los programas IA. Voy a hacer un intento propio de examen de dichas cuestiones en la sección que sigue, donde comento algunos acertijos relativos a reconocimiento de patrones visuales, a los cuales llamo "problemas de Bongard".

Problemas de Bongard

Los *problemas de Bongard* (BP) son los que se ajustan al tipo general propuesto por el científico ruso M. Bongard, en su libro *Pattern Recognition*. Un BP típico —el número 51 dentro de su colección de un centenar— es mostrado en la figura 119.

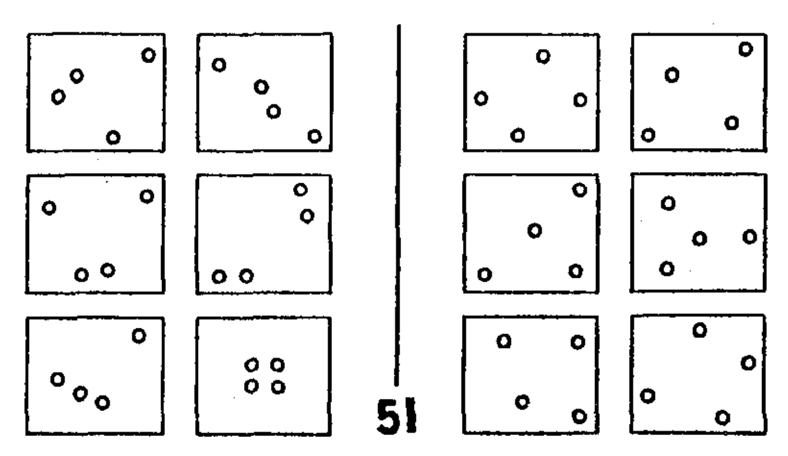


Figura 119. Problema de Bongard 51. [Tomado de: M. Bongard, Pattern Recognition *(Rochelle Park, N. J.: Hayden Book Co., Spartan Books, 1970).]*

Estos fascinantes problemas son planteados a los reconocedores de patrones, ya humanos, ya mecánicos. (También se los podría aplicar en IET: inteligencias extraterrestres.) Cada problema consiste en doce figuras con forma de cajas (llamadas *cajas*, de aquí en más): seis a la izquierda, integrando la *Clase I*, y seis a la derecha, integrando la *Clase II*. Las cajas pueden ser indicadas de la siguiente forma:

I-A	I-B	II-A	II-B
I-C	I-D	II-C	II-D
I-E	I-F	II-E	II-F

El problema es: "¿En qué difieren las cajas de la Clase I de las cajas de la Clase II?"

Un programa de resolución de problemas Bongard tendrá varios estadios, a través de los cuales los datos en bruto se van convirtiendo paulatinamente en descripciones. Las primeras etapas son relativamente inflexibles, en tanto que las más elevadas pasan a ser, poco a poco, más flexibles. Los estadios finales cuentan con una propiedad a la que denomino *tentatividad*, lo cual significa simplemente que el modo en que es representada una imagen es siempre tentativa. Si así parece convenir, puede ser restructurada toda una descripción de alto nivel mediante la utilización de los recursos aportados por las etapas más avanzadas.

Las ideas presentadas a continuación tienen también una cualidad tentativa. Trataré de transmitir, primero, criterios globales, y de comentar las dificultades significativas; luego, volveré atrás y procuraré explicar sutilezas, artificios, etc. De modo, pues, que la noción del lector acerca de cómo funciona todo esto puede también experimentar revisiones a medida que vaya leyendo. Pero ello forma parte del espíritu de esta exposición.

El preprocesamiento selecciona un minivocabulario

Supongamos, entonces, que enfrentamos un problema de Bongard que queremos resolver. El problema es presentado a una cámara de televisión y los datos en bruto quedan definidos. Luego, estos últimos son *preprocesados*, lo cual significa que son detectados determinados rasgos salientes. Los *nombres* de estos rasgos constituyen un "minivocabulario" del problema; son extraídos de un "vocabulario de rasgos salientes" más general. Algunos términos habituales de este último son los siguientes:

> segmento lineal, curva, horizontal, vertical, negro, blanco, grande, pequeño, puntiagudo, redondo . . .

En una segunda etapa del preprocesamiento, son utilizados algunos conocimientos sobre *formas* elementales; si se encuentra alguna de éstas, su

nombre también pasa a ser disponible. En consecuencia, pueden ser seleccionados términos tales como:

triángulo, círculo, cuadrado, depresión, protuberancia, ángulo recto, vértice, punta, flecha . . .

Este es aproximadamente el punto donde, en los seres humanos, se encuentran lo consciente y lo inconsciente. El interés principal de esta exposición es la descripción de lo que sucede de aquí en adelante.

Descripciones de alto nivel

Ahora que la imagen ha sido "comprendida", en alguna medida, en función de conceptos familiares, se pueden examinar las perspectivas. Las descripciones tentativas se refieren a una o algunas de las doce cajas. Normalmente, utilizarán descriptores simples, como por ejemplo:

arriba, abajo, a la derecha de, a la izquierda de, dentro, fuera de, junto a, lejos de, paralelo a, perpendicular a, en fila, diseminado, regularmente espaciado, irregularmente espaciado, etc.

Pueden emplearse también descriptores numéricos definidos e indefinidos:

. . 1, 2, 3, 4, 5, . . . muchos, pocos, etc.

Es posible elaborar descriptores más complicados, como por ejemplo:

más a la derecha de, menos próximo a, casi paralelo a, etc.

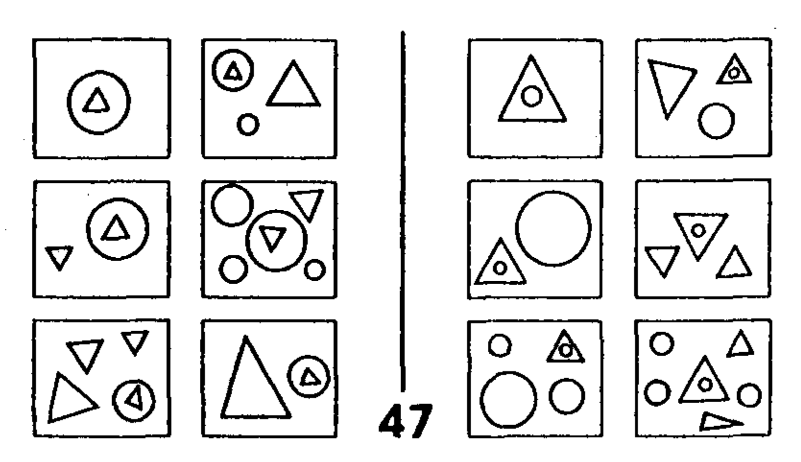


Figura 120. Problema de Bongard 47. [*Tomado de: M. Bongard,* Pattern Recognition.]

De tal manera, una caja ordinaria —digamos la I-F del BP 47 (figura 120)— puede ser descripta diversamente en función de que presenta:

tres formas
o
tres formas en blanco
o
un círculo a la derecha
o
dos triángulos y un círculo
o
dos triángulos que apuntan hacia arriba
o
una forma grande y dos formas pequeñas
o
una forma curvada y dos formas rectilíneas
o
un círculo con la misma clase de forma en su interior y en su exterior

Cada una de estas descripciones ve la caja a través de un "filtro". Fuera de contexto, cualquiera de aquéllas puede ser una descripción útil. Tal como aparecen, sin embargo, todas son "erróneas", en el contexto del problema Bongard específico del cual son parte. En otras palabras, si uno conoce la distinción entre Clases I y II del BP 47, y se le presenta una de las líneas precedentes como descripción de una figura fuera de la vista, esa información no posibilitará la determinación de cuál es la Clase a la que pertenece dicha figura. El rasgo esencial de esta caja, en contexto, es que incluye

un círculo que contiene un triángulo.

Cabe hacer notar que quien hubiese oído una descripción semejante no estaría en condiciones de *reconstruir* el dibujo original, pero sí de *reconocer* los dibujos que cuenten con esa propiedad. Es algo un tanto análogo al estilo musical: se puede ser un reconocedor infalible de Mozart y al mismo tiempo incapaz de componer nada que impresione como propio de Mozart.

Consideremos ahora la caja I-D de BP 91 (figura 121). Una descripción recargada, pero "correcta" en el contexto de BP 91, es la siguiente:

un círculo con tres muescas rectangulares.

Obsérvese cuán elaborada es esta descripción, en la cual la palabra "con" cumple una función denegatoria, al implicar que el "círculo" no es realmente un círculo: es *casi* un círculo, salvo que . . . Además, las muescas

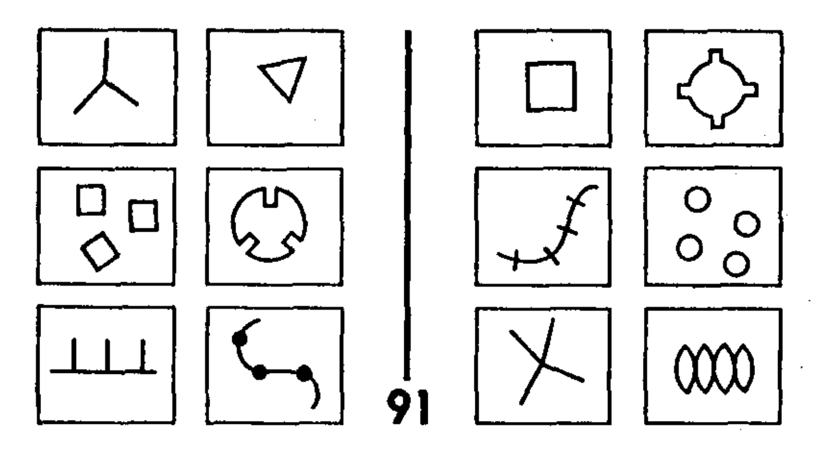


Figura 121. Problema de Bongard 91. [*Tomado de: M. Bongard,* Pattern Recognition.]

no son rectángulos completos. Hay una gran extensión de "juego" en la forma en que usamos el lenguaje para describir cosas. Evidentemente, ha sido descartado un montón de información y podría descartarse una porción mayor aun. Es muy difícil saber *a priori* qué corresponde desechar y qué corresponde retener; por lo tanto, es necesario codificar algún género de método, por vía heurística, que permita una conciliación inteligente de aquellas dos tendencias. Por supuesto, siempre existe la posibilidad de recurrir a los niveles de descripción más bajos (es decir, a las descripciones menos articuladas en bloques), si la información descartada debe ser recuperada: es similar al caso de las personas, que pueden examinar constantemente el acertijo para ayudarse a restructurar sus ideas acerca del mismo. El recurso, entonces, es idear reglas explícitas que indiquen cómo hacer para:

elaborar desripciones tentativas de cada caja;
compararlas con las descripciones tentativas de otras cajas correspondientes a ambas Clases;
restructurar las descripciones, mediante
 (i) el agregado de información,
 (ii) el descarte de información, o
 (iii) el análisis de la misma información desde otra perspectiva;
repetir este proceso hasta descubrir dónde está la diferencia entre las dos Clases.

Moldes y detectores de similitud

Una estrategia excelente consistiría en tratar de efectuar descripciones que sean *estructuralmente similares entre sí*, en la medida de lo posible. Cualquier estructura que las descripciones tengan en común hará mucho

más fácil su comparación. Dos elementos importantes de esta teoría se ocupan de tal estrategia; uno, es la idea de "esquemas de descripción", o *moldes*; la otra es la idea de *Desi*: un "detector de similitud".

Empecemos por este último. Desi es un agente especial, presente en todos los niveles del programa. (En realidad, puede haber diferentes clases de Desi en los diferentes niveles.) Desi se filtra constantemente dentro de las descripciones individuales y de las descripciones diferentes, a la búsqueda de descriptores u otras cosas que se repitan. Cuando es descubierta alguna similitud, son varias las operaciones de restructuración que pueden ser desencadenadas, ya en el nivel de la descripción individual, ya en el nivel de diversas descripciones simultáneas.

Veamos ahora los moldes. Lo primero que tiene lugar después del preprocesamiento es un esfuerzo por elaborar un molde, o esquema de descripción: un *formato uniforme* para aplicar a las descripciones de todas las cajas de un problema. Se toma como base que, por lo común, puede fragmentarse una descripción, de modo natural, en subdescripciones, y éstas a su vez en subsubdescripciones, si es necesario. Se llega al límite inferior cuando se entra en contacto con los conceptos iniciales, pertenecientes al nivel del preprocesador. Ahora bien, es importante optar por una forma de dividir la descripción en partes que reflejen lo que sea común a todas las cajas; de otro modo, estaremos introduciendo en el mundo un "seudo orden" superfluo y carente de sentido.

¿Qué información fundamenta la construcción de un molde? Lo mejor será analizar un ejemplo. Veamos el BP 49 (figura 122); el preprocesamiento produce la información de que cada caja consiste en varias oes pequeñas, y una gran curva cerrada. Esta es una observación valiosa, que merece ser incorporada al molde. Así un primer ensayo de molde sería:

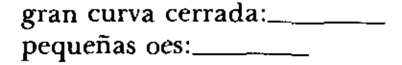
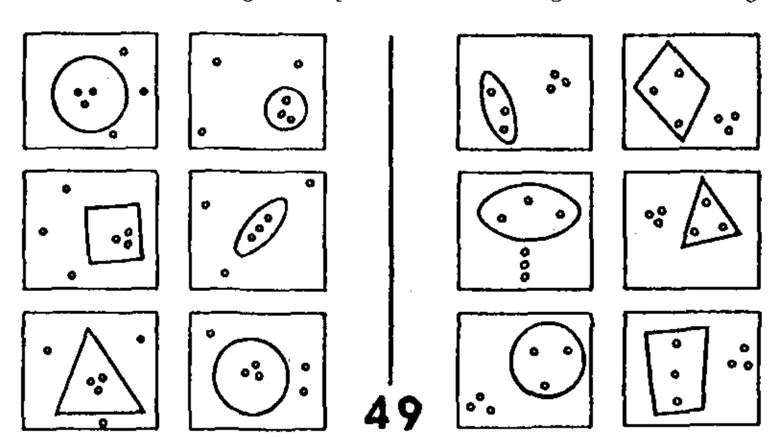

gran curva cerrada:________
pequeñas oes:________

Figura 122. Problema de Bongard 49. [Tomado de: M. Bongard, Pattern Recognition.]



Es muy simple: el molde-descripción tiene dos *huecos* dentro de los cuales han de ser introducidas las subdescripciones.

Un programa heterárquico

Señalemos que ocurre una cosa interesante, desencadenada por la expresión "curva cerrada". Uno de los módulos más importantes del programa es un tipo de red semántica —*la red conceptual*—, en la cual todos los sustantivos, adjetivos, etc. conocidos, están vinculados en formas que indican sus interrelaciones. Por ejemplo, "curva cerrada" está fuertemente vinculada con los términos "interior" y "exterior". La red conceptual prácticamente rebosa de información acerca de las relaciones entre términos, tales como cuáles son opuestos, cuáles son similares, cuáles suelen aparecer coincidentemente, etc. Una reducida porción de una red conceptual, explicada brevemente más adelante, puede verse en la figura 123. Pero ahora continuemos con lo que sigue, a propósito de la solución del problema 49. Los conceptos "interior" y "exterior" son activados por su proximidad, en la red, respecto a "curva cerrada". Esto sugiere al constructor del molde que podría ser una idea acertada la de prever huecos distintos para el interior y el exterior de la curva. Así, dentro del espíritu de la tentatividad, el molde es tentativamente restructurado de esta manera:

gran curva cerrada: ________
pequeñas oes interiores: ________
pequeñas oes exteriores: ________

Ahora bien, cuando sean procuradas las subdescripciones, los términos "interior" y "exterior" generarán procedimientos de inspección de aquellas regiones específicas de la caja. Lo hallado en BP 49, caja I-A, es lo siguiente:

gran curva cerrada: *círculo*
pequeñas oes interiores: *tres*
pequeñas oes exteriores: *tres*

Y una descripción de la caja II-A del mismo BP podría ser así:

gran curva cerrada: *cigarro*
pequeñas oes interiores: *tres*
pequeñas oes exteriores: *tres*

Desi, por su parte, en constante actividad en paralelo con otras operaciones, advierte la recurrencia del concepto "tres" en todos los huecos re-

lacionados con oes, lo cual importa una razón de peso para emprender una segunda operación restructuradora del molde. Tómese nota de que la primera fue sugerida por la red conceptual, la segunda por Desi. Nuestro molde del problema 49 pasa entonces a ser ahora el siguiente:

gran curva cerrada: ________
tres pequeñas oes interiores: ________
tres pequeñas oes exteriores: ________

Ahora que "tres" ha alcanzado un nivel de generalidad —es decir, con su incorporación al molde— adquiere importancia la exploración de sus aledaños en la red conceptual. Allí encontramos "triángulo", de lo cual se desprende que los triángulos de oes pueden ser significativos. Cuando así ocurre, ello conduce a un callejón sin salida, pero, ¿cómo saberlo por anticipado? Es un típico callejón sin salida, que un ser humano exploraría, ¡de modo que será adecuado si nuestro programa lo encuentra adecuado! Podría ser generada una descripción como la que sigue, para la caja II-E:

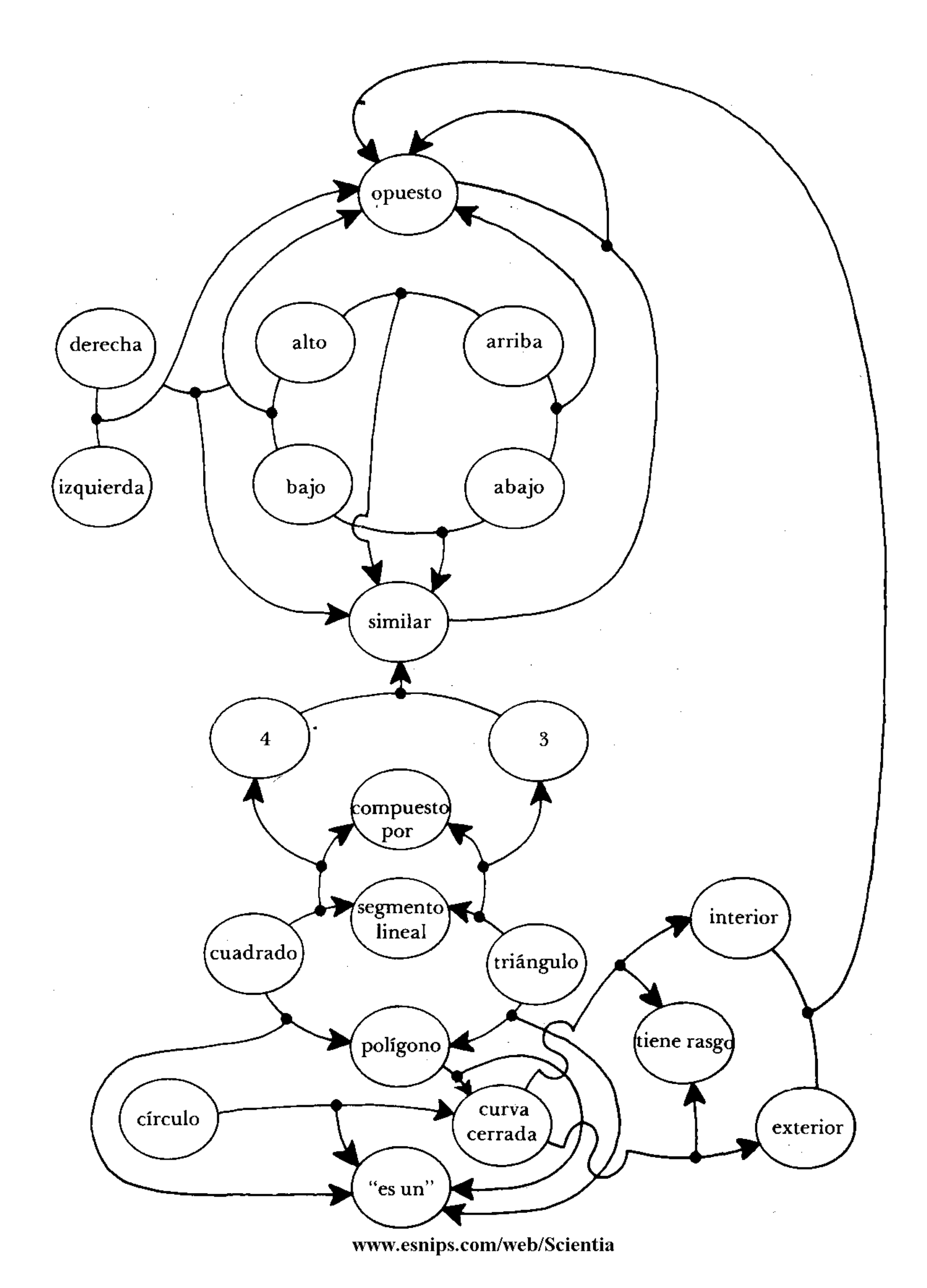
gran curva cerrada: *círculo*
tres pequeñas oes interiores: *triángulo equilátero*
tres pequeñas oes exteriores: *triángulo equilátero*

Por supuesto, ha sido descartada una enorme cantidad de información relativa a las dimensiones, posición y orientación de esos triángulos, además de muchas otras cosas. ¡Pero en esto reside toda la cuestión de optar por la elaboración de descripciones en lugar de la sola utilización de los datos en bruto! Se trata de la misma noción de embudamiento canalizador, de la que hablamos en el Capítulo XI.

La red conceptual

No nos es necesario presentar la solución completa del problema 49; basta con mostrar la permanente interacción, ejercida en todas direcciones, de las descripciones individuales, los moldes, el detector de similitud y la red conceptual. Deberíamos ahora examinar con mayor atención esta última y sus funciones. Una porción simplificada, de las que muestra la figura, codifica las siguientes ideas:

"Alto" y "bajo" son opuestos.
"Arriba" y "abajo" son opuestos.
"Alto" y "arriba" son similares.
"Bajo" y "abajo" son similares.
"Derecha" e "izquierda" son opuestos.
La distinción "derecha-izquierda" es similar a la distinción "alto-


opuesto
derecha
alto
arriba
izquierda
bajo
abajo
similar
4
3
compuesto
por
segmento
lineal
cuadrado
triángulo
interior
polígono
tiene rasgo
círculo
curva
cerrada
exterior
"es un"

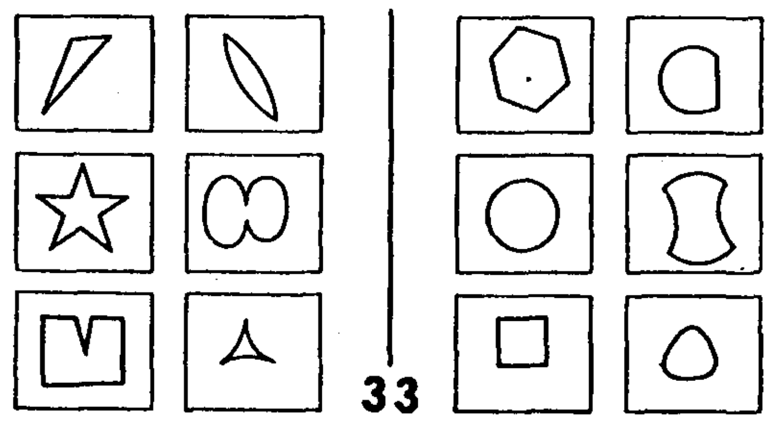


Figura 124. Problema de Bongard 33. [Tomado de: M. Bongard, Pattern Recognition.]

bajo".
"Opuesto" y "similar" son opuestos.

Adviértase que se puede hablar de todo lo que integra la red, sean nódulos o enlaces; en este sentido, ningún elemento de la red está ubicado en un nivel superior a ningún otro. La otra porción de la red, mostrada por la figura, codifica las siguientes ideas:

Un cuadrado es un polígono.
Un triángulo es un polígono.
Un polígono es una curva cerrada.
La diferencia entre un triángulo y un cuadrado es que uno tiene 3 lados y el otro tiene 4.
4 es similar a 3.
Un círculo es una curva cerrada.
Una curva cerrada tiene un interior y un exterior.
"Interior" y "exterior" son opuestos.

La red de conceptos es, por fuerza, muy vasta; aparentemente, se limita a almacenar conocimientos de modo estático, o declarativo, pero esto no es más que la mitad del cuento. En realidad, ese conocimiento se acerca también a la condición procedimental, por el hecho de que las proximidades dentro de la red actúan como guías, o "programas", que indican al programa principal cómo desenvolver su comprensión de los dibujos inscriptos en las cajas.

Figura 123. Una pequeña porción de una red conceptual de un programa destinado a resolver problemas de Bongard. Los "nódulos" son asociados mediante "enlaces", que a su vez pueden ser enlazados. Si se considera como verbo a un enlace, y a los nódulos que éste asocia como sujeto y objeto, es posible extraer ciertas oraciones de este diagrama.

Por ejemplo, un primer empeño puede resultar equivocado y, sin embargo, quizá contenga el germen de la respuesta correcta. En BP 33 (figura 124), es posible comenzar precipitándose a la conclusión de que las cajas de la Clase I contienen formas "puntiagudas", y las de la Clase II, formas "redondeadas". Bajo un examen más minucioso, tal cosa se revela errónea; sin embargo, hay en ello una penetración valiosa que puede ser profundizada mediante el deslizamiento, en la red, hacia los conceptos que parten de "puntiagudo". Un concepto contiguo es el de "agudo", que es precisamente el rasgo distintivo de la Clase I.

De tal modo, una de las principales funciones de la red conceptual es permitir que las conjeturas erróneas sean ligeramente modificadas gracias a su deslizamiento hacia variaciones que pueden ser correctas.

Deslizamiento y tentatividad

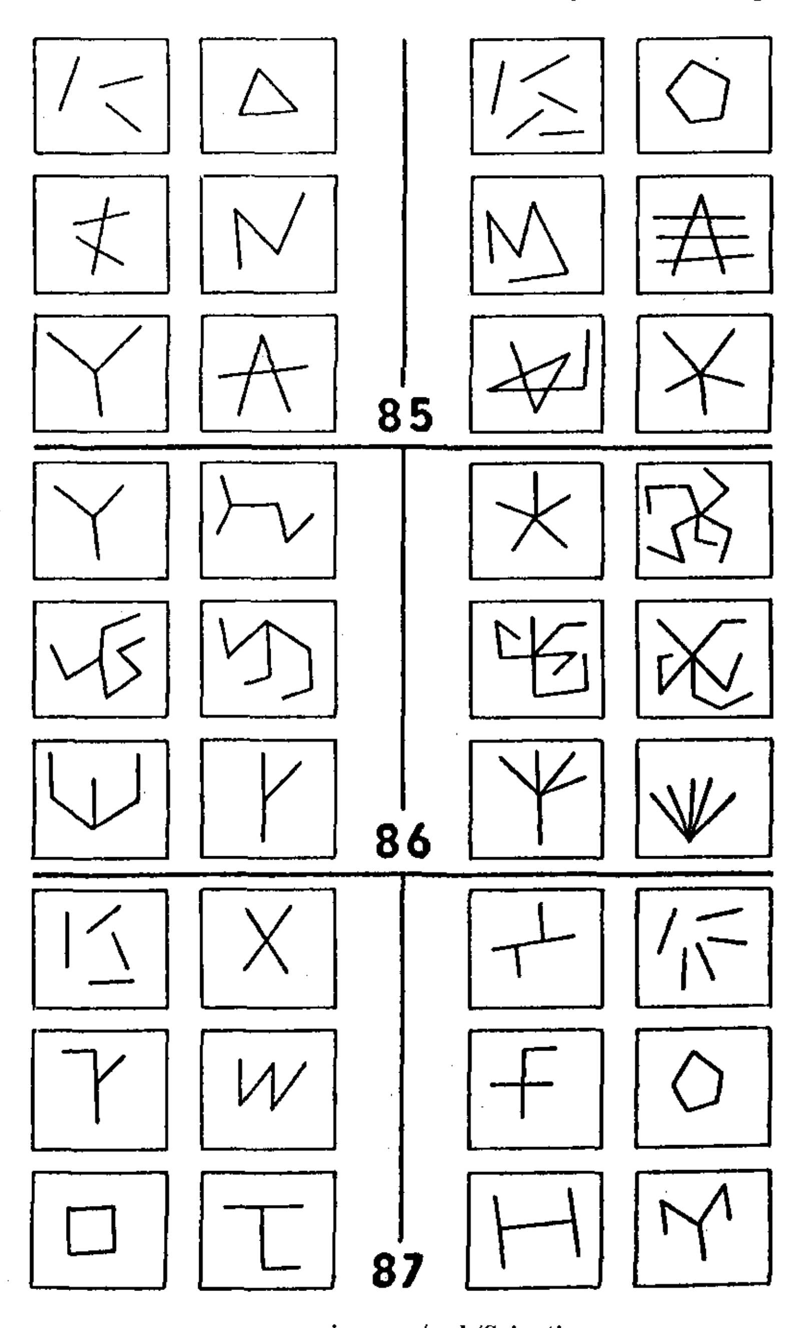
Esta noción de deslizamiento entre términos estrechamente relacionados se conecta con la que considera a un objeto determinado como variación de otro objeto. Un acertado ejemplo de esto ya ha sido mencionado: el del "círculo con tres muescas", aplicado a algo que no es en absoluto un círculo. Uno tiene que ser capaz de contraer los conceptos, cuando es adecuado hacerlo. Nada ha de ser absolutamente rígido. Por otro lado, sin embargo, las cosas no deben diluirse tanto que nada conserve el menor significado. La solución estriba en saber cuándo y cómo deslizarse de un concepto a otro.

Un juego de ejemplos sumamente interesante, donde el deslizamiento de una descripción a otra constituye lo esencial del asunto, es aportado por los problemas de Bongard 85 a 87 (figura 125). El BP 85 es bastante trivial; supongamos que nuestro programa identifica "segmento lineal" en su etapa de preprocesamiento; será entonces relativamente simple para él contar segmentos lineales y arribar a la diferencia existente entre la Clase I y la Clase II, en BP 85. Vamos ahora al BP 86; éste emplea una heurística general, consistente en *someter a prueba ideas que han funcionado recientemente*. La repetición exitosa de métodos recientes es muy común en el mundo real, y Bongard no trata de ser más listo que este tipo de heurística en su colección: en realidad, afortunadamente, la refuerza. De modo que nos sumergimos sin demora en el problema 86 con dos ideas ("contar" y "segmentos lineales"), fusionadas en una sola: "contar segmentos lineales". Pero sucede que el truco de BP 86 es contar *sucesiones* lineales, y no *segmentos* lineales, donde "sucesión lineal" significa una concatenación punta con punta de (uno o más) segmentos lineales. Una forma de que el programa pueda determinar esto es que tanto el concepto de "sucesión lineal" como el de "segmento lineal" sean conocidos, y que sean contiguos dentro de la red conceptual. Otra forma es que

invente el concepto de "sucesión lineal": una sugerencia capciosa, para decir lo menos.

Tenemos luego el BP 87, en el cual es llevada más allá la noción de "segmento lineal". ¿Cuándo un segmento lineal es tres segmentos lineales? El programa debe ser lo suficientemente flexible como para que pueda

Figura 125. Problemas de Bongard 85 a 87. [Tomado de: M. Borgard, Pattern Recognition.]



trasladarse de una parte a otra entre tales representaciones diferentes de una parte determinada de un dibujo. Es conveniente almacenar las representaciones anteriores, en lugar de olvidarlas y verse luego quizá en la necesidad de reconstruirlas, pues nada garantiza que una representación más reciente sea mejor que una anterior. Así, junto con cada representación anterior han de almacenarse algunas de las razones existentes para aprobarla o desaprobarla. (Esto comienza a parecer bastante complejo, ¿verdad?)

Metadescripciones

Llegamos ahora a otra parte vital del proceso de reconocimiento, relacionado con niveles de abstracción y con metadescripciones. Es de aplicación aquí el BP 91 (figura 121), ya considerado en parte. ¿Qué clase de molde puede ser construido en este caso? Hay tal volumen de variedad que es dificultoso saber por dónde empezar. ¡Pero ese hecho mismo constituye una pista! La pista dice, específicamente, que muy probablemente la distinción de clase repose en un nivel de abstracción más alto que el de la descripción geométrica. Esta observación le señala al programa que debe construir *descripciones de descripciones*; esto es, *metadescripciones*. En este segundo nivel, tal vez emerja algún rasgo común; y, si tuviéramos suerte, ¡descubriríamos la comunidad suficiente como para guiarnos hacia la formulación de un molde para aplicar a las metadescripciones! Por lo tanto, nos lanzamos adelante sin un molde y elaboramos descripciones de varias cajas; luego, una vez listas las descripciones, *las* describimos. ¿Qué clases de huecos tendrá nuestro molde de metadescripciones? Quizá éstos, entre otros:

conceptos empleados: ________
conceptos recurrentes: ________
nombres de los huecos: ________
filtros empleados: ________

Hay muchos tipos de huecos que pueden resultar necesarios en la metadescripción, pero esto es un ejemplo. Supongamos ahora que hemos descripto la caja I-E del BP 91. Esa descripción (sin molde) podría ser más o menos así:

segmento lineal horizontal
segmento lineal vertical apoyado en el segmento lineal horizontal
segmento lineal vertical apoyado en el segmento lineal horizontal
segmento lineal vertical apoyado en el segmento lineal horizontal

Por cierto, ha sido descartada gran cantidad de información: el hecho de que las tres líneas verticales tengan la misma extensión, de que estén espa-

ciadas en forma equidistante, etc. Pero es positivo que se haya obtenido esta descripción. Luego, la metadescripción podría tener esta apariencia:

conceptos empleados: *vertical-horizontal, segmento lineal, apoyado en*
repeticiones en la descripción: *3 ejemplares de "segmento lineal vertical apoyado en el segmento lineal horizontal"*
nombres de los huecos: ______
filtros empleados: ______

No es necesario que sean llenados todos los huecos de las metadescripciones; en este nivel, la información puede ser descartada tal como lo es en el nivel de la descripción directa.

Ahora bien, si tuviéramos que hacer la descripción de cualquiera de las otras cajas de la Clase I, y luego su metadescripción, terminaríamos llenando el hueco "repeticiones en la descripción", en cada oportunidad, con la expresión "3 ejemplares de . . ." Esto sería advertido por el detector de similitud, el cual seleccionaría la *trinidad* como rasgo saliente, ciertamente en un alto nivel de abstracción, de las cajas de la Clase I. De modo similar, la *cuaternidad* sería reconocida, por vía del método metadescriptivo, como la marca de la Clase II.

La flexibilidad es importante

Con todo, puede objetarse que, en este caso, la apelación al método de la metadescripción es como dispararle a una mosca con un rifle de cazar elefantes, pues la trinidad y la cuaternidad podrían haber sido mostradas con igual facilidad, en el nivel inferior, si hubiéramos construido nuestras descripciones de modo ligeramente distinto. Sí, es verdad, pero es importante contar con la posibilidad de resolver estos problemas a través de diferentes rutas. Tiene que haber un amplio margen de flexibilidad en el programa, y es necesario no reprimirlo en el caso de que, malafóricamente hablando, nos lleve a "tomar el rábano por las hojas" durante cierto lapso. (La graciosa expresión "malaphor" fue acuñada por el periodista Lawrence Harrison: surge del cruce entre un "malapropism" [despropósito, dislate] y una "metaphor" [metáfora]. Es un excelente ejemplo de "recombinación de ideas".) De todos modos, me interesaba ilustrar el principio general que dice: Cuando es difícil construir un molde porque el preprocesador encuentra un exceso de diversidad, ello servirá como indicio de que los conceptos están involucrados en un nivel de abstracción más alto que el conocido por el preprocesador.

Enfocamiento y filtrado

Nos ocuparemos ahora de otro problema: el de los modos a través de los cuales se descarta información. Esto toca dos nociones interrelacionadas,

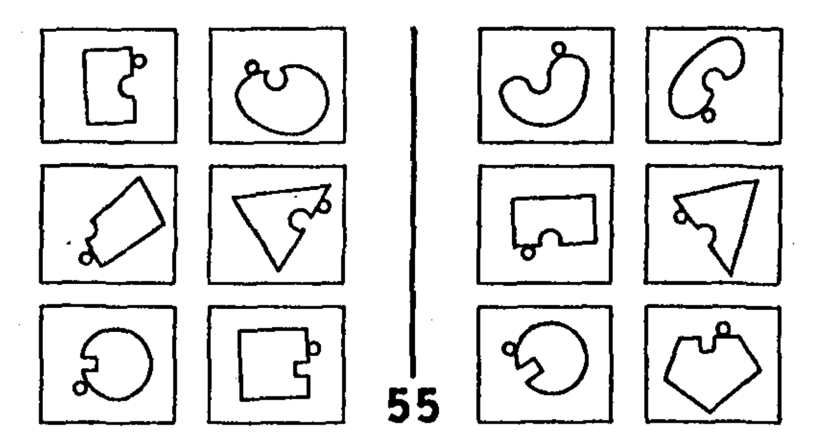


Figura 126. Problema de Bongard 55. [Tomado de: M. Bongard, Pattern Recognition.]

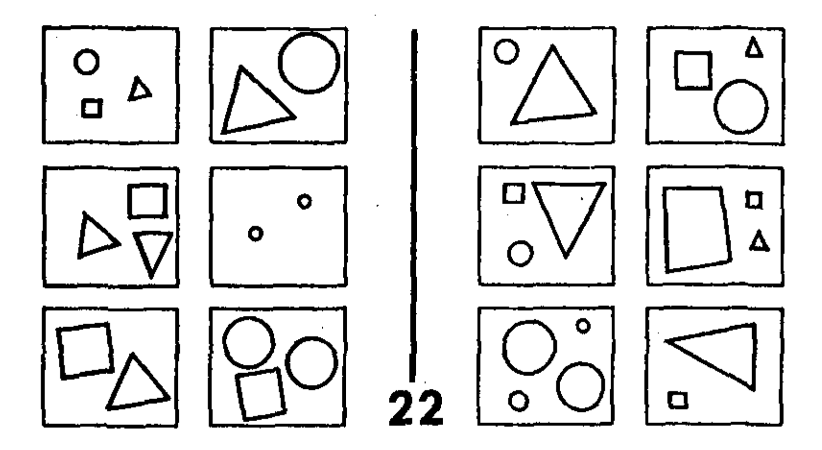


Figura 127. Problema de Bongard 22. [Tomado de: M. Bongard, Pattern Recognition.]

a las que denomino "enfocamiento" y "filtrado". La primera consiste en una descripción cuyo foco es cierta parte del dibujo inscripto en la caja, con exclusión de toda otra cosa. La segunda consiste en una descripción que se concentra en cierta forma específica de examinar el contenido de la caja, e ignora deliberadamente todo otro aspecto. Así, ambas nociones son complementarias: el enfocamiento se aplica a los objetos (a los sustantivos, poco más o menos), y el filtrado a los conceptos (a los adjetivos, poco más o menos). Para ejemplificar el enfocamiento, analicemos el BP 55 (figura 126): enfocamos aquí el amuescamiento y el pequeño círculo aledaño, con exclusión de toda otra cosa que hay en la caja. El BP 22 (figura 127) nos ofrece un ejemplo de filtrado: aquí, debemos filtrar todos los conceptos que no sean el de tamaño. Para resolver el BP 58 (figura 128), se requiere una combinación de enfocamiento y filtrado.

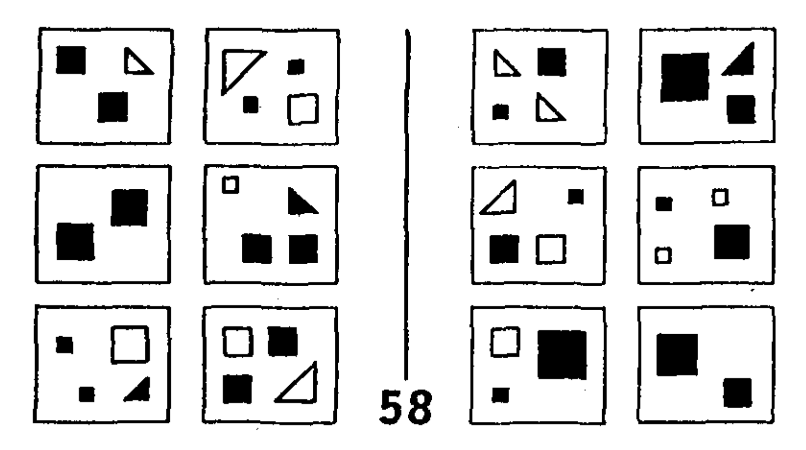


Figura 128. Problema de Bongard 58. [*Tomado de: M. Bongard,* Pattern Recognition.]

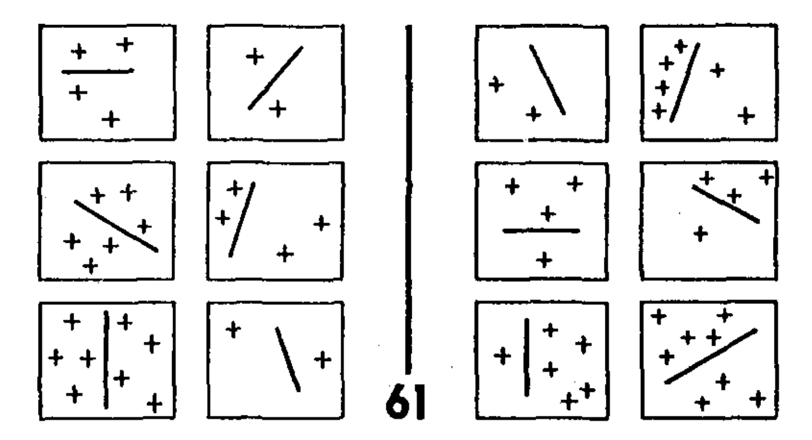


Figura 129. Problema de Bongard 61. [*Tomado de: M. Bongard,* Pattern Recognition.]

Uno de los recursos más importantes para obtener criterios que faciliten el enfocamiento y el filtrado es provisto por otro género de "enfocamiento": a saber, la inspección de una sola caja particularmente simple, digamos una que contenga la menor cantidad de objetos que sea posible; puede ser muy útil comparar las cajas más despobladas de las dos Clases, ¿pero cómo establecer cuáles son las cajas despobladas hasta que no se disponga de su descripción? Bueno, un medio es el de buscar una caja que tenga un minimum de los rasgos suministrados por el preprocesador. Esto puede ser realizado en los comienzos, pues no exige un molde prexistente; en realidad, es algo que puede constituirse en una manera provechosa de descubrir rasgos que permitan construir una molde. El BP 61 (figura 129) ejemplifica la posibilidad de que esa técnica conduzca rápidamente a una solución.

El mundo de los problemas de Bongard y la ciencia

El mundo de los problemas de Bongard puede ser considerado un diminuto lugar donde se practica la "ciencia": es decir, donde el propósito perseguido es el discernimiento de patrones en el mundo. Cuando se buscan patrones, despierta la actividad de hacer, deshacer y rehacer moldes; de deslizar huecos desde un nivel de generalidad a otro; de filtrar y de enfocar. Hay descubrimientos en todos los niveles posibles de complejidad. La teoría de Kuhnian en el sentido de que ciertos acontecimientos inusuales, llamados "mutaciones paradigmáticas", señalan la distinción entre ciencia "normal" y "revoluciones conceptuales", por lo visto no es acertada ya que podemos ver la aparición de mutaciones paradigmáticas en toda la extensión del sistema, y en todo momento. La fluidez de las descripciones asegura que las mutaciones paradigmáticas tengan lugar en todas las escalas.

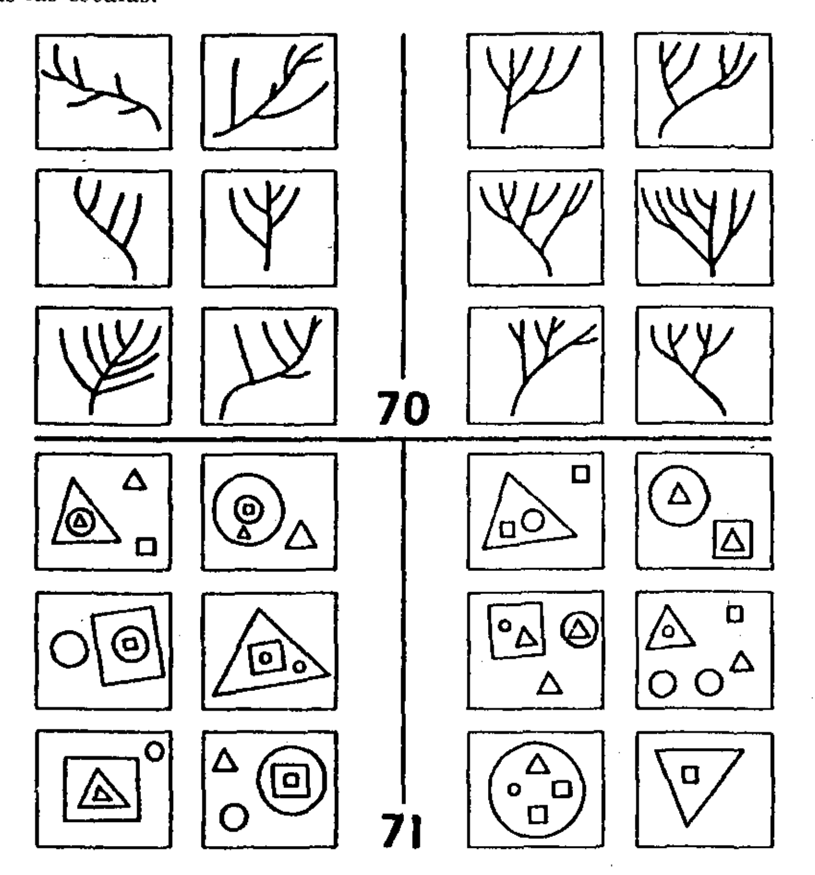


Figura 130. Problemas de Bongard 70-71. [*Tomado de: M. Bongard,* Pattern Recognition.]

Por supuesto, algunos descubrimientos son más "revolucionarios" que otros, porque tienen efectos más amplios. Por ejemplo, uno puede hacer el descubrimiento de que los problemas 70 y 71 (figura 130) son "el mismo problema", si los analiza en un nivel suficientemente abstracto. La observación clave es que ambos involucran una autoinclusión de profundidad 2 *versus* profundidad 1. Este es un nuevo nivel de descubrimiento con respecto a los problemas de Bongard. Hay un nivel aun más alto, vinculado a la colección entendida como un conjunto; si alguien no ha visto nunca la colección, constituiría un estupendo acertijo, precisamente, pedirle que resuelva cuál es ese nivel. Alcanzar tal resolución sería una penetración revolucionaria, pero es necesario señalar que los mecanismos del pensamiento aptos para lograr ese descubrimiento no son diferentes de los requeridos para desarrollar la solución de un problema individual de Bongard.

Por la misma razón, la ciencia real no divide entre períodos "normales" y "revoluciones conceptuales"; por el contrario, las mutaciones paradigmáticas se encuentran por doquier: las hay de mayor y menor dimensión, y en diferentes niveles. La organización recursiva de INT y del diseño G (figuras 32 y 34) suministra un modelo geométrico de esta idea: tienen la misma estructura, llena de saltos discontinuos en todos los niveles, no sólo en el superior, con la única salvedad de que cuanto más bajo es el nivel, más pequeños son los saltos.

Conexiones con otros tipos de pensamiento

Para ubicar en contexto, en lo posible, todo este programa, permítaseme intentar el señalamiento de dos modos a través de los cuales está relacionado con otros aspectos de la cognoscitividad: no solamente depende de esos otros aspectos, sino que éstos a su vez dependen de él. Me voy a referir primero a la manera en que depende de dichos aspectos. La intuición requerida para saber cuándo omitir distinciones, emprender redescripciones, volver sobre lo andado, cambiar de nivel, etc. es algo que quizá se obtiene sólo después de una larga experiencia de ejercitación del pensamiento en general. Sería muy difícil definir heurísticas para aplicar a estos aspectos sustanciales del programa. En ocasiones, la experiencia personal con relación a objetos reales del mundo tiene un efecto sutil sobre la forma en que se describan o redescriban las cajas. Por ejemplo, ¿quién puede determinar cuál es el grado de familiaridad con los árboles reales que puede ayudar a resolver el BP 70? No es nada probable que, en los seres humanos, la subred de conceptos que tienen pertinencia con respecto a estos problemas pueda ser separada con facilidad de la red total. En cambio, sí es sumamente verosímil que las intuiciones elaboradas a partir de la visión y la manipulación de objetos reales —peines, trenes, encadenamientos, bloques, letras, fajas elásticas, etc.— jueguen un papel

orientador invisible, pero importante, en la solución de estos acertijos.

A la inversa, es indudable que la comprensión de situaciones propias del mundo real depende en gran parte de la imaginación visual y de la intuición espacial; por lo tanto, contar con una forma poderosa y flexible de representar patrones del tipo de los de Bongard no puede sino contribuir a la eficacia general de los procesos del pensamiento.

Creo que los problemas de Bongard han sido preparados con mucho detenimiento y que están dotados de una cualidad universal, en el sentido de que a cada uno de ellos corresponde una respuesta correcta única. Es claro que esto puede discutirse, diciendo que la calificación de "correcto" depende profundamente de nuestro carácter de seres humanos, y que las criaturas de otros sistemas estelares pueden disentir totalmente al respecto. A falta de evidencias concretas acerca de esta posibilidad, me mantengo en la certidumbre de que los problemas de Bongard están basados en un sentido de la simplicidad que no se limita al ámbito terráqueo de los seres humanos. Mis observaciones iniciales sobre la eventual importancia de conocer objetos tan indiscutiblemente terráqueos como peines, trenes, fajas elásticas, etc., no choca con la idea de que nuestra noción de la simplicidad es universal, pues lo que interesa no es ninguno de esos objetos individuales, sino el hecho de que, reunidos, se extienden a lo largo de un amplio espacio. Y me parece verosímil que cualquier otra civilización tenga, lo mismo que nosotros, un vasto repertorio de artefactos y de objetos naturales y de experiencias a partir de los cuales efectuar deducciones. En consecuencia, creo que la capacidad de resolver problemas de Bongard se asienta en un sitio muy próximo al núcleo de la inteligencia "pura", si es que existe tal cosa. Tenemos aquí, entonces, un excelente punto de partida si lo que se quiere es investigar la facultad de descubrir el "significado intrínseco" de patrones o de mensajes. Lamentablemente, sólo hemos reproducido una selección reducida de este incitante conjunto. Confío en que muchos lectores tomarán conocimiento de la colección completa, publicada en la obra que incluimos en la bibliografía.

Los que siguen son algunos de los problemas de reconocimiento de patrones visuales que, aparentemente, los seres humanos hemos "aplanado" por completo en el interior de nuestro inconsciente; son muy llamativos; veamos:

reconocimiento de rostros (invariantes a través de los cambios de edad, de expresión, de iluminación, de distancia, de ángulo, etc.)

reconocimiento de senderos en bosques y montañas: esto siempre ha conseguido impresionarme como uno de nuestros más sutiles actos de reconocimiento de patrones, pese a que también es una facultad de los animales.

desciframiento certero de textos impresos en centenares, inclusive miles, de distintos tipos de letra.

Lenguajes de circulación de mensajes, marcos y símbolos

Uno de los medios propuestos para enfrentar las complejidades del reconocimiento de patrones y otros desafíos planteados a los programas IA es la formalización llamada "actor", obra de Carl Hewitt (similar al lenguaje "Smalltalk" [*charla insustancial*], desarrollado por Alan Kay y otros), consistente en un programa formulado como colección de *actores* en interacción, los cuales pueden hacer circular entre sí elaborados mensajes, en todas direcciones. En cierto modo, se asemeja a un grupo heterárquico de procedimientos que se convocan entre sí; la diferencia principal reside en que, mientras los procedimientos, por lo común, sólo hacen circular de una parte a otra un número bastante reducido de argumentaciones, los mensajes intercambiados por los actores pueden llegar a ser discrecionalmente extensos y complejos.

Los actores dotados de la capacidad de intercambiar mensajes se convierten en algo así como agentes autónomos: en realidad, inclusive en algo semejante a computadoras autónomas, donde sus mensajes tienen cierta analogía con los programas. Cada actor tiene su manera peculiar de interpretación de cada mensaje; luego, la significación de un mensaje estará subordinada a la circunstancia de qué actor sea el interceptor del mismo. Esto es así por que el actor contiene un sector de programa que interpreta mensajes; así, puede haber tantos intérpretes como actores. Por cierto, es posible que haya muchos actores con intérpretes idénticos, lo cual, en verdad, puede que signifique una gran ventaja, al modo en que, en la célula, es extraordinariamente importante disponer de una multitud de ribosomas idénticos flotando en todo el citoplasma, cada uno de los cuales habrá de interpretar un mensaje —en este caso, el ARN mensajero— de una y la misma manera.

Es interesante considerar la posibilidad de combinar la noción de marco con la noción de actor. Llamemos *símbolo* a un marco capacitado para generar e interpretar mensajes complejos:

marco + actor = símbolo

Hemos llegado al punto en que podemos ocuparnos de las formas de instrumentación de aquellos elusivos *símbolos activos* de los Capítulos XI y XII; de aquí en más, en este capítulo, "símbolo" tendrá ese significado. Entre paréntesis, recomiendo al lector que no se culpe si no percibe de inmediato la manera en que se tiene que efectuar esta síntesis. Es algo que no está claro aún, pese a que se trata, ciertamente, de una de las vertientes más fascinantes en IA. Además, no cabe la menor duda de que inclusive la mejor síntesis posible entre estas nociones resultará revestida de un poder mucho menor que el de los símbolos reales de la mente humana. En este sentido, llamar "símbolos" a estas síntesis marco-actor es prematuro, pero manifiesta una actitud optimista frente a las cosas.

Volvamos atrás y veamos algunos problemas relacionados con la circulación de mensajes. ¿Cada mensaje estará dirigido específicamente para que haga blanco en un símbolo determinado, o deberá ser lanzado al gran vacío, así como el ARNm es lanzado al citoplasma, para que busque allí su ribosoma? Si los mensajes tienen destinatario, todo símbolo deberá tener una dirección, y los mensajes que le sean remitidos deberán siempre ser enviados a esa dirección. Por otro lado, la alternativa a esto estaría dada por una central de recepción de mensajes, donde éstos se limitarían a permanecer hasta que los recogiera un símbolo que los necesite: sería el equivalente de una lista de correos o poste restante. Tal vez la mejor solución sea permitir que existan ambos tipos de mensajes, además de prever distintos tipos de urgencia: entrega inmediata, primera clase, segunda clase, etc. El sistema postal, en su conjunto, es una rica fuente de ideas para los lenguajes de circulación de mensajes, incluyendo curiosidades tales como sobres estampillados y con la dirección impresa (mensajes cuyos remitentes desean respuesta rápida), paquetes postales (mensajes extremadamente extensos que pueden ser enviados a través de una vía lenta), y así siguiendo. El sistema telefónico aportará nuevas inspiraciones cuando agotemos los paralelos postales.

Enzimas e IA

Otra pródiga fuente de analogías para llevar al campo de la circulación de mensajes —por cierto, para el campo del procesamiento de información en general— la constituye, naturalmente, la célula. Ciertos objetos de la célula son enteramente comparables a los actores: particularmente, las enzimas. Cada sitio activo de la enzima actúa como un filtro que reconoce exclusivamente ciertas clases de sustratos (mensajes). De tal modo, una enzima tiene, en efecto, una "dirección". La enzima está "programada" (en virtud de su estructura ternaria) para realizar ciertas operaciones con ese "mensaje, y luego devolverlo al mundo. Así, cuando un mensaje circula de una enzima a otra, a lo largo de un recorrido químico, la cantidad de tareas cumplidas puede ser muy grande. Ya hemos descripto las elaboradas clases de mecanismos de retroalimentación que pueden funcionar en las células (sea por inhibición o por represión). Estos mecanismos muestran que pueden surgir complicados controles de procesos, completamente generados por el tipo de circulación de mensajes que existe en la célula.

Una de las cosas más sorprendentes que presentan las enzimas es la forma en que permanecen ociosas, a la espera de ser desencadenadas por el arribo de un sustrato. Cuando esto se produce, la enzima entra súbitamente en acción, tal como una planta insectívora. Este género de programa de "disparo inmediato" ha sido utilizado en IA, bajo el nombre de *demonio*. Lo importante aquí es la idea de contar con muchas "especies" dife-

rentes de subrutinas desencadenables que permanecen a la espera de que se las dispare. En las células, todas las moléculas compuestas y los organelos son construidos mediante un paso simple tras otro. Algunas de estas nuevas estructuras son también, frecuentemente, enzimas, y participan en la construcción de nuevas enzimas, las cuales a su vez participan en la construcción de otros tipos de enzimas, etc. Tales cascadas recursivas de enzimas pueden tener efectos drásticos sobre lo que está haciendo una célula. Uno querría ver el mismo proceso de montaje paso simple tras paso simple actuando en IA, en la construcción de subprogramas provechosos. Por ejemplo, la repetición suelda de tal manera circuitos nuevos en nuestro hardware mental, que los tramos de comportamiento reiterados muchas veces pasan a quedar codificados por debajo del nivel consciente. Sería extraordinariamente útil que hubiese una forma análoga de sintetizar tramos eficaces de código, que efectuasen una secuencia de operaciones similar a la producida cuando se ha aprendido algo en un nivel más alto de "conciencia". Las cascadas de enzimas pueden servir como modelo de la manera en que se podría concretar una cosa así. (El programa llamado "HACKER", formulado por Gerald Sussman, sintetiza y depura pequeñas subrutinas, de una forma no muy diferente con respecto a las cascadas de enzimas.)

Los detectores de similitud (Desi) que vimos aplicados a la resolución de problemas Bongard podrían ser instrumentados como subprogramas semejantes a enzimas. Lo mismo que una de éstas, un Desi vagaría un tanto al azar, topándose con pequeñas estructuras de datos aquí y allá. Luego de rellenar sus dos "sitios activos" con estructuras de datos idénticas, Desi dirigiría un mensaje a otras partes (actores) del programa. En la medida en que se trate de un programa en serie, no tiene mucho sentido disponer de varias réplicas de un Desi, pero en una cabal computadora en paralelo, la regulación del número de réplicas de un subprograma sería una forma de regular el tiempo de espera previsto para que se cumpla una operación, igual que la regulación del número de réplicas de una enzima, en una célula, regula la velocidad con que es cumplida la función respectiva. Y, si pudiesen ser sintetizados nuevos Desi, ello equivaldría a la infiltración de detectores de patrones en los niveles más bajos de nuestra mente.

Fisión y fusión

Dos interesantes y complementarias ideas relativas a la interacción existente entre los símbolos son las de "fisión" y "fusión". La *fisión* es la divergencia gradual de un símbolo nuevo con respecto a su símbolo paterno (esto es, con respecto al símbolo que hizo de molde para que el nuevo símbolo fuese copiado). La *fusión* es lo que ocurre cuando dos (o más) símbolos ajenos entre sí participan en una "activación conjunta", transmi-

tiendo mensajes tan estrechamente próximos entre sí que aquéllos terminan por unirse, y la combinación, de ahí en más, puede ser considerada un símbolo individual. La fisión es un proceso relativamente inevitable, pues una vez "frotado" un nuevo símbolo a partir de otro anterior, se convierte en autónomo, y sus interacciones con el mundo exterior quedan reflejadas en su estructura interna particular; es decir, lo que al principio fue una réplica perfecta muy pronto pasa a ser imperfecta y luego, lentamente, se va pareciendo cada vez menos al símbolo del cual fue "frotado". La fusión es una cosa más sutil; ¿cuándo dos conceptos se convierten realmente en uno solo?, ¿la fusión tiene lugar en algún momento preciso?

Este fenómeno de la activación conjunta abre una caja de Pandora de preguntas. Por ejemplo, ¿en qué medida reparamos separadamente en "rasca" y en "cielos" cuando decimos "rascacielos"? Un alemán que recuerda sus guantes ("Handschuhe"), ¿piensa en "cobertura-para-manos", o no? ¿Y qué pasa con un chino, cuyas palabras "dong-xi" ("Este-Oeste") significan "cosa"? Se trata de un asunto de cierto interés político, además, pues mucha gente sostiene que palabras como "chairman"* están fuertemente cargadas de resonancias masculinas. El grado en que las partes se individualicen en el interior del conjunto varía, probablemente, de persona a persona y según las circunstancias.

El problema real que presenta esta noción de "fusión" de símbolos es que resulta muy difícil imaginar algoritmos generales que creen nuevos símbolos significativos a partir de símbolos que se topan. Es como dos cadenas de ADN que se reuniesen; ¿cómo tomar porciones de cada una y recombinarlas en una nueva cadena de ADN, significativa y viable, que codifique un individuo de la misma especie?, ¿o una nueva especie? Las posibilidades de que una combinación azarosa de secciones de ADN codifique alguna cosa que sobreviva son infinitesimales, lo mismo que las posibilidades de que una combinación azarosa de palabras tomadas de dos libros produzca otro libro. Las posibilidades de que la recombinación de ADN tenga sentido en cualquier nivel, fuera del inferior, son pequeñísimas, precisamente porque hay muchos niveles de significación en el ADN; y lo mismo vale para los "símbolos recombinados".

Epigénesis del *Canon Cangrejo*

Creo que mi diálogo *Canon Cangrejo* es un ejemplo prototípico donde dos ideas chocaron entre sí en mi mente, se conectaron de una nueva forma, y súbitamente adquirió vida en mi mente una nueva clase de estructura verbal. Por supuesto, puedo seguir pensando por separado en cánones cangrejo y en diálogos verbales; ambos siguen siendo activables en forma

* *Presidente*, también *decano* (de una facultad o departamento universitario); literalmente significa poco más o menos *el hombre que ocupa la silla principal*. [T.]

independiente. Con todo, el símbolo de los diálogos cangrejo-canónicos, obtenido por fusión, tiene por su parte sus propios modos característicos de activación. A fin de ilustrar esta noción de fusión o "recombinación simbólica" con cierto detalle, querría pues utilizar el desarrollo de mi *Canon Cangrejo* como un estudio de caso porque, por supuesto, me es muy familiar, y también porque es atractivo, inclusive ejemplificador de cuán lejos puede ser impulsada una idea individual. Mi comentario se dividirá en etapas que siguen las de la *meiosis*, que es el nombre de la división celular en la cual tiene lugar el "entrecruzamiento", o recombinación genética: la fuente de la diversidad, en la evolución.

PROFASE: Comencé con una idea bastante simple, la de que una composición musical, digamos un canon, puede ser imitada verbalmente. Esto se derivó de la observación de que una composición textual y una composición musical pueden ser vinculadas, gracias a que comparten una forma abstracta. El paso siguiente abarcó el intento de concretar parte del potencial de esta vaga aproximación; aquí me topé con la idea de que las "voces" de los cánones pueden ser puestas en correspondencia con los "personajes" de los diálogos: un descubrimiento un tanto obvio, todavía.

Luego, me concentré en tipos específicos de cánones, y recordé que en la *Ofrenda Musical* había un canon cangrejo. Por esa época, yo había comenzado a escribir diálogos, y tenía solamente dos personajes: Aquiles y la Tortuga. Como el canon cangrejo de Bach tiene dos voces, la correspondencia era perfecta: Aquiles sería una voz, la Tortuga la otra, y uno de ambos haría hacia adelante lo que el otro haría hacia atrás. Pero aquí se me planteaba un problema: ¿en qué nivel debía tener lugar la inversión?, ¿el de la letra?, ¿el de la palabra?, ¿el de la oración? Después de pensarlo, llegué a la conclusión de que el nivel del "discurso dramático" sería el más adecuado.

Ahora que el "esqueleto" del canon cangrejo de Bach ya había sido trasplantado a una forma verbal, cuando menos en proyecto, restaba solamente un problema: cuando las dos voces se cruzaran en el centro, habría un breve período de insistente repetición: un defecto gigantesco. ¿Qué hacer? En este punto, sucedió una cosa curiosa, un cruce de niveles, típico de los actos creativos: la palabra "cangrejo" de la expresión "canon cangrejo" fulguró en mi mente, sin duda a causa de alguna cualidad abstracta compartida por la noción de "tortuga", e inmediatamente com-

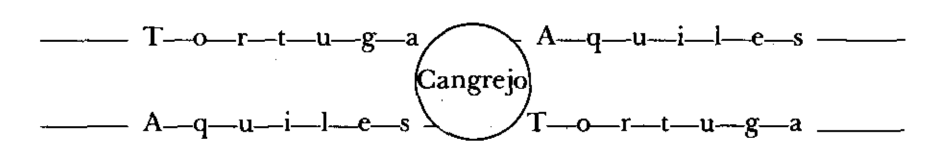


Figura 131. Un diagrama esquemático del Diálogo Canon Cangrejo.

prendí que, en el centro exacto, yo podía impedir el efecto repetitivo mediante la inclusión de un parlamento especial, a cargo de un nuevo personaje: ¡un Cangrejo! De este modo fue concebido el Cangrejo en la "profase" del *Canon Cangrejo*: en el punto de cruce entre Aquiles y la Tortuga (véase figura 131).

METAFASE: Tal era el esqueleto de mi *Canon Cangrejo*. Ingresé entonces en la segunda etapa —la "metafase"— en la cual tenía que convertir a aquél en un cuerpo: una ardua tarea, por cierto. Hice un sinnúmero de ensayos, practicando maneras de obtener que los pares de parlamentos sucesivos tuvieran sentido cuando fuesen leídos en la otra dirección, y experimentando en la búsqueda de significados duales que me permitiesen formularlas de ese modo (por ejemplo, "No, de ninguna manera"). Hubo dos versiones iniciales, ambas interesantes, pero débiles. Dejé de trabajar en el libro durante más de un año, y cuando retomé el *Canon Cangrejo* tenía algunas ideas nuevas. Una de ellas consistía en mencionar un canon de Bach dentro del Diálogo; pensé primero en citar el "Canon per aumentationem, contrario motu", de la *Ofrenda Musical* (*Canon Perezoso*, como yo lo llamo), pero esto comenzó a parecerme un poco tonto, así que, a regañadientes, decidí que, dentro de mi *Canon Cangrejo*, yo podía aludir al *Canon Cangrejo* del propio Bach. En realidad, éste fue un punto de giro sustancial, pero yo lo ignoraba entonces.

Ahora bien, si uno de los personajes iba a mencionar una composición de Bach, ¿no sería un recurso torpe la aparición de la misma cosa en boca del otro personaje, en el lugar correspondiente? Bueno, Escher estaba desempeñando un papel similar al de Bach en mis pensamientos y en mi libro, de modo pues que, ¿no habría una forma de modificar ligeramente la línea a fin de que se refiriese a aquél? Al fin y al cabo, en el arte estricto de los cánones, a veces se renuncia a una imitación perfecta de las notas en beneficio de la elegancia o de la belleza. Ni bien tuve esta idea, se me apareció la pintura *Día y Noche* (figura 49) en la mente. "¡Por supuesto!", pensé, "es una suerte de canon cangrejo pictórico que tiene, esencialmente, dos voces complementarias que desarrollan el mismo tema hacia izquierda y derecha, y que armonizan entre sí". Surgía aquí de nuevo la situación de un mismo "esqueleto conceptual" concretado en dos ámbitos diferentes, la música y la plástica, en este caso. Hice hablar a la Tortuga sobre Bach, entonces, y a Aquiles sobre Escher, en lenguaje paralelo; ciertamente, este leve apartamiento con respecto a la imitación estricta retenía el espíritu de los cánones cangrejo.

En este punto, empecé a advertir que estaba sucediendo algo maravilloso: a saber, ¡que el Diálogo se estaba haciendo autorreferencial, sin que yo me lo hubiese propuesto! Más todavía, se trataba de una autorreferencia indirecta, donde los personajes no hablaban directamente del Diálogo que los contenía, sino, en cambio, de estructuras isomórficas (en cierto plano de abstracción) a aquél. Para volcarlo en los términos que he venido empleando, mi Diálogo compartía ahora un "esqueleto concep-

tual" con G de Gödel, y en consecuencia podía hacerse corresponder con G en la forma, en alguna medida, en que se lo hizo con el Dogma Central, a fin de crear, en este caso, una "Correspongrejo Central". Esto me llenó de entusiasmo ya que, desde la nada, había llegado a una unidad estéticamente agradable entre Gödel, Escher y Bach.

ANAFASE: El siguiente paso fue absolutamente sobrecogedor. Hacía años que yo conocía la monografía de Caroline MacGillavry a propósito de los mosaicos de Escher, pero un día, hojeándola, mis ojos fueron atraídos por la Lámina 23 (figura 42), pues la vi de una manera enteramente nueva: ¡había allí un auténtico canon cangrejo: la figura del cangrejo estaba manifestada tanto por la forma como por el contenido! Escher, por su parte, no atribuyó ningún título a esta imagen, y es probable que esa coincidencia entre forma y contenido fuese algo que sólo yo advertí, ya que aquél había pintado mosaicos similares, utilizando muchas otras formas animales. No obstante, por casualidad o no, esta lámina sin título era una versión en miniatura de una de las ideas principales de mi libro: la unificación de forma y contenido. Por consiguiente, lleno de deleite bauticé *Canon Cangrejo* a la imagen, la ubiqué en lugar de *Día y Noche*, e hice las modificaciones necesarias en los parlamentos de Aquiles y la Tortuga.

Y esto no fue todo. Me había apasionado con la biología molecular: un día en que estaba examinando el libro de Watson en la librería, vi en el índice la palabra "palindroma". Al averiguar de qué se trataba, descubrí algo mágico: las estructuras cangrejo canónicas del ADN; rápidamente, pues, modifiqué con arreglo a ello las palabras del Cangrejo, para que incluyeran un breve comentario acerca de la influencia, debida a sus genes, sobre su inclinación a confundir el desplazamiento hacia adelante con el desplazamiento hacia atrás.

TELOFASE: El último paso tuvo lugar meses más tarde; estaba yo hablando de la ilustración que muestra el segmento cangrejo canónico de ADN (figura 43), cuando reparé en que la 'A', la 'T' y la 'C' de adenina, timina y citosina coincidían —*mirabile dictu*— con la 'A', la 'T' y la 'C' de Aquiles, Tortuga y Cangrejo; además, tal como se aparean la adenina y la timina en el ADN, así lo hacen Aquiles y la Tortuga en el Diálogo. Reflexioné un momento y, en otro de esos entrecruzamientos de niveles, vi que 'G', la letra apareada con la 'C', en el ADN, podía representar a "Gene". Una vez más, retrocedí de un salto en el interior del Diálogo y practiqué una pequeña cirugía en el parlamento del Cangrejo con el objeto de reflejar este nuevo descubrimiento: ahora, yo tenía una correspondencia entre la estructura del ADN y la estructura del Diálogo. En este sentido, se puede decir que el ADN es un genotipo que codifica un fenotipo: la estructura del Diálogo. Este toque final realza dramáticamente la autorreferencia, y otorga al Diálogo una densidad de significación que yo no había previsto.

Esqueletos conceptuales y correspondencia conceptual

Lo anterior sintetiza en forma aproximada la epigénesis del *Canon Cangrejo*. El proceso en su conjunto puede ser visto como una sucesión de correspondencias entre ideas, en niveles variables de abstracción. Esto es lo que llamo *correspondencia conceptual*, y los *esqueletos conceptuales* son las estructuras abstractas que conectan dos ideas diferentes. Así, un esqueleto conceptual es el de la noción abstracta de canon cangrejo:

> una estructura que tiene dos partes, las cuales hacen la misma cosa, sólo que avanzando en direcciones opuestas.

Esta es una imagen geométrica concreta que puede ser manipulada por la mente casi como si fuese un patrón Bongard. En realidad, cuando examino, ahora, el *Canon Cangrejo*, lo visualizo como dos cadenas que se cruzan en el centro, sitio en el que son unidas mediante un "nudo" (el parlamento de Cangrejo). Esta imagen es tan vívidamente gráfica que se corresponde, en mi mente, con la representación de dos cromosomas homólogos reunidos en su centro por un centrómero, representación extraída directamente de la meiosis, tal como se ve en la figura 132.

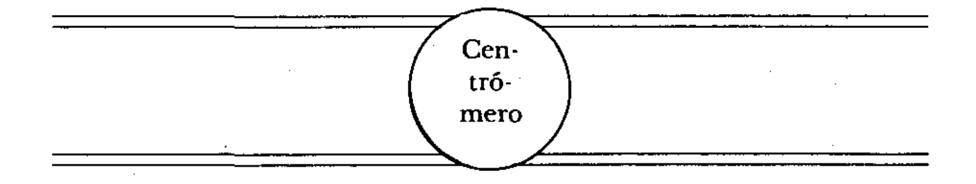


Figura 132.

En verdad, esta misma imagen fue lo que me inspiró para moldear la descripción de la evolución del *Canon Cangrejo* siguiendo las etapas de la meiosis, la cual es ciertamente, por su parte, otro ejemplo de correspondencia conceptual.

Recombinación de ideas

Hay una diversidad de técnicas para la fusión de dos símbolos. Una de ellas consiste en el alineamiento de una idea junto a la otra (¡como si las ideas fuesen lineales!), seguido por la sensata elección de distintas porciones de ambas, y por último la recombinación de dichas porciones en un nuevo símbolo. Esto nos hace recordar de inmediato la recombinación

genética. Bien, ¿qué intercambian los cromosomas, y cómo lo hacen? Intercambian genes. ¿Qué elemento es comparable a un gene, en un símbolo? Si los símbolos tienen huecos semejantes a marcos, quizá la respuesta sea: los huecos; pero, ¿cuáles huecos habrá que intercambiar, y por qué? Es aquí donde la fusión cangrejo canónica puede aportar algunas sugerencias. Hacer entrar en correspondencia la noción de "canon cangrejo musical" con la de "diálogo" implicó varias correspondencias auxiliares; en realidad, la primera correspondencia *indujo* las segundas. Es decir, una vez resuelto que aquellas dos nociones iban a ser fusionadas, el asunto pasó a consistir en observarlas en un nivel donde las partes análogas se manifestaran a la vista, en ir luego más adelante y *poner en correspondencia esas partes*, y así siguiendo, recursivamente, en todos los niveles donde se encontrase conveniente hacerlo. Por ejemplo, "voz" y "personaje" se manifestaron como huecos en correspondencia cuando "canon cangrejo" y "diálogo" fueron considerados en forma abstracta. ¿De dónde surge, empero, esta perspectiva abstracta? Aquí tocamos la esencia del problema de la correspondencia: ¿de dónde provienen las perspectivas abstractas?, ¿cómo se hace para elaborar una visión abstracta de una noción específica?

Abstracciones, esqueletos, analogías

Lo que yo denomino *esqueleto conceptual* es una perspectiva abstraída de un concepto, siguiendo determinada dimensión. En efecto, me he ocupado extensamente de esqueletos conceptuales, en todo el libro, aunque por lo común sin mencionar esa denominación. Por ejemplo, muchas de las ideas relativas a los problemas de Bongard pueden ser reformuladas empleando esta terminología. Siempre es de interés, y también, tal vez, de importancia, el hecho de descubrir que dos o más ideas comparten un mismo esqueleto conceptual. Una muestra la tenemos en el fantástico conjunto de conceptos mencionados al comienzo del *Contrafactus*: un Bicíclope, un tándem uniciclo, un subibaja-subibaja, el partido de ping-ping, un empate de uno solo, una cinta de Möbius de dos lados, los "mellizos Bach", un concierto de piano para dos manos izquierdas, una fuga a una voz, el acto de aplaudir con una mano, un fonógrafo monoaural en dos canales. Todas estas ideas son "isomórficas" porque comparten este esqueleto conceptual:

una cosa plural convertida en singular y repluralizada erróneamente.

Otras dos ideas de este libro que comparten ese esqueleto conceptual son, (1) la solución de la Tortuga al acertijo planteado por Aquiles, consistente en hallar una palabra que comenzara y terminara con "CA" (la respuesta de la Tortuga según la cual la interjección "CA", que yuxtapone

dos apariciones en una, cumple esas condiciones),* y (2) la demostración Pappus-Gelernter del Teorema Pons Asinorum, donde un triángulo es percibido en segunda instancia como dos. Dicho al margen, estas graciosas mixturas deberían ser apodadas "medios pares".

Un esqueleto conceptual es como un conjunto de rasgos constantes (por oposición a parámetros y variables), los cuales no habrán de experimentar desplazamientos al tener lugar una repetición subjuntiva o una operación de proyección de correspondencias. La carencia de parámetros o variables propias que permitan diversificaciones puede constituir el núcleo invariante de varias ideas diferentes. Cada *caso* distinto, tal como "tándem uniciclo", tiene capas de variabilidad y entonces puede ser "desplazado" de diversas maneras.

Pese a que la denominación "esqueleto conceptual" resuena como absoluta y rígida, la amplitud de su juego es grande. Hay esqueletos conceptuales en diferentes niveles de abstracción. Por ejemplo, el "isomorfismo" entre los problemas Bongard 70 y 71, ya señalado, involucra un esqueleto conceptual de nivel más elevado que el requerido en la resolución de cualquiera de ambos problemas por separado.

Representaciones múltiples

Dijimos que los esqueletos conceptuales se presentan en diferentes niveles de abstracción; no sólo eso, sino que, además, su presencia debe extenderse a lo largo de diferentes *dimensiones* conceptuales. Tomemos como ejemplo la siguiente oración:

"El Vicepresidente es la llanta de refacción del automóvil del gobierno."

¿Cómo entendemos lo que quiere decir? (Dejando a un lado el aspecto humorístico, que por supuesto comporta una faceta vital.) Si se hubiera dicho: "Vea a nuestro gobierno como un automóvil", sin ninguna explicación previa, uno puede hallar una gran cantidad de correspondencias: volante = presidente, etc., ¿cuáles son los frenos y los amortiguadores?, ¿quién llena el papel de cinturón de seguridad? Como las dos cosas puestas en correspondencia son tan diferentes, es casi inevitable que la correspondencia abarque aspectos *funcionales*. En consecuencia, uno extraerá, del interior de su almacén de esqueletos conceptuales representativos de partes de automóviles, únicamente aquéllos vinculados a funciones, y no

* Esto, en la presente adaptación española. El original plantea qué palabra empieza y termina con "HE". La respuesta que Aquiles tiene in mente es "HEADACHE", *dolor de cabeza*. La respuesta alternativa de la Tortuga, donde una sola emisión de "HE" yuxtapone dos ocurrencias, es el pronombre "HE", *él*. [T.]

a, digamos, formas. Además, es conveniente ubicarse en un nivel bastante alto de abstracción, donde la "función" no esté relacionada con contextos demasiado próximos. Supongamos las dos definiciones que siguen de la función de una llanta de refacción: (1) "sustituir una llanta desinflada", y (2) "sustituir cierta parte inutilizada de un automóvil"; sin duda, es preferible la segunda. Esto responde simplemente al hecho de que un automóvil y un gobierno son tan diferentes que tienen que ser puestos en correspondencia en un alto nivel de abstracción.

Ahora bien, cuando es examinada la oración del ejemplo, hay un ángulo desde el cual la correspondencia parece forzada: de ningún modo, empero, se trata por ello de un procedimiento torpe. En realidad, uno ya tiene un esqueleto conceptual, junto a muchos otros, de la función vicepresidencial, el cual reza: "sustituir cierta parte inutilizada de un gobierno". En consecuencia, la correspondencia forzada funciona sin dificultad. Supongamos, sin embargo, por el gusto de establecer contrastes, que uno ha extraído otro esqueleto conceptual de "llanta de refacción", que describe, pongamos por caso, los aspectos físicos de la misma. Entre otras cosas, este esqueleto puede decir que una llanta de refacción es "redonda e inflada". Está claro que éste no es el modo correcto de proceder. (¿O sí? Como observaba un amigo mío, algunos vicepresidentes tienen bastantes redondeces, ¡y casi todos ellos han sido notablemente inflados!)

Puertas de acceso

Una de las principales características de cada estilo peculiar de pensamiento es la manera en que son clasificadas, y acumuladas en la memoria, las nuevas experiencias, pues ello define cuáles serán las "agarraderas" utilizadas más adelante para recuperarlas. Existe una amplia variedad de "agarraderas" para los acontecimientos, los objetos, las ideas, etc.: para todo lo que puede ser pensado. Esto me vuelve a llamar la atención cada vez que extiendo la mano para encender el radio de mi automóvil y descubro, para mi consternación, ¡que ya estaba encendido! Lo sucedido es que han sido utilizadas dos representaciones independientes del radio. Una es la de "productor de música", la otra, de "mitigador de aburrimiento". Yo estoy enterado de que suena música, pero de cualquier manera estoy aburrido; antes de que ambas manifestaciones tengan oportunidad de interactuar, ya ha sido disparado mi reflejo de extender la mano. Reflejo que también se produjo un día, mientras manejaba mi automóvil y deseaba escuchar música, luego de haber dejado el radio en un taller de reparaciones: extraña cosa.

Existen muchas otras representaciones del mismo objeto, tales como:

.poseedor de lustrosas perillas plateadas
.poseedor de problemas de recalentamiento

.cosa para instalar, con mi espalda apoyada
en la corcova del piso del coche
.productor de zumbidos
.objeto con selectores móviles
.ejemplo de representación multidimensional

Todas pueden actuar como puertas de acceso. Pese a que todas están incorporadas a mi símbolo particular del radio de mi automóvil, el acceso a este símbolo a través de una de estas representaciones no da ingreso al resto de las mismas. Así, es improbable que, cuando extiendo la mano y lo enciendo, ello me inspire para recordarme a mí mismo echado de espaldas para colocar el radio; a la inversa, cuando estoy echado de espaldas haciendo girar tornillos, no es probable que piense en la oportunidad en que escuché el *Arte de la Fuga* mediante el radio que estoy colocando. Hay "divisiones" entre estos aspectos de mi símbolo, las cuales evitan que mis pensamientos se extiendan ilimitadamente, a la manera de las asociaciones libres. Mis divisiones mentales son importantes porque contienen y canalizan el flujo de mis pensamientos.

Un caso donde estas divisiones son completamente rígidas es el del tabicamiento de palabras de distintos idiomas que se refieren a la misma cosa. Si las divisiones no fuesen tan vigorosas, una persona bilingüe oscilaría constantemente entre el uso de uno y otro idioma, lo cual no le resultaría nada cómodo. Por cierto, los adultos que aprenden dos lenguas nuevas a la vez suelen recaer en tales confusiones, pues las divisiones entre ambas son endebles, y pueden derrumbarse. Es particularmente interesante el caso de los intérpretes, quienes pueden expresarse en cualquiera de las lenguas que dominan, como si las divisiones entre éstas fuesen inexpugnables y, sin embargo, a voluntad, pueden derribarlas para permitir el acceso a una lengua desde otra, lo cual hace posible la traducción. Steiner, cuya educación fue trilingüe, dedica algunas páginas de *After Babel* al entremezclamiento de francés, inglés y alemán en los estratos de su mente, y al modo en que el dominio de diferentes idiomas proporciona diferentes puertas de ingreso a los conceptos.

Equiparamiento forzado

Cuando se ve que dos ideas, en cierto nivel de abstracción, comparten esqueletos conceptuales, pueden suceder diversas cosas. Generalmente, la primera consiste en un acercamiento tipo zoom a ambas ideas y, empleando como guía la equiparación de nivel más alto, se trata de identificar las subideas en correspondencia. En ocasiones, la equiparación puede ser llevada varios niveles hacia abajo, lo que manifestaría un isomorfismo profundo. Otras veces, este movimiento se detiene antes, y lo que revela

es una analogía o similitud. Hay veces, además, en que la similitud de alto nivel es tan compulsiva que, aun cuando aparentemente no haya continuación de la correspondencia en el nivel inferior, se sigue adelante y se la elabora: esto es una *equiparación forzada*.

Tenemos muestras de equiparación forzada cotidianamente, en las caricaturas de tema político que aparecen en los periódicos: una figura política es retratada como un avión, un buque, un pez, o como la Mona Lisa; un gobierno es un ser humano, un pájaro, un barril de petróleo; un tratado es una cartera de documentos, una espada o un tarro con lombrices; y así siguiendo indefinidamente. Lo fascinante es la facilidad con que entendemos la correspondencia sugerida y en la exacta medida de la profundidad prevista: no llevamos la correspondencia a una profundidad mayor ni tampoco la detenemos demasiado cerca de la superficie.

Otro ejemplo de forzamiento de una cosa a ajustarse al molde de otra lo tenemos en mi decisión de describir el desarrollo de mi *Canon Cangrejo* mediante la utilización de los términos de la meiosis. A tal decisión llegué por etapas; primero, advertí la existencia de un esqueleto conceptual común entre el *Canon Cangrejo* y la imagen de los cromosomas reunidos por un centrómero; esto me suministró la inspiración del equiparamiento forzado. Luego, vi que una semejanza de alto nivel abarcaba "crecimiento", "estadios" y "recombinación"; entonces, sencillamente impulsé la analogía con la mayor energía que me fue posible; la tentatividad —igual que en la resolución de los problemas de Bongard— llenó aquí una función muy importante: hice distintos recorridos antes de descubrir una equiparación que me dejara satisfecho.

Un tercer ejemplo de correspondencia conceptual es provisto por el Correspondogma Central. Inicialmente, advertí una similitud de alto nivel entre los descubrimientos de los lógicos matemáticos y los de los biólogos moleculares; luego, la extendí a los niveles inferiores hasta que encontré una fuerte analogía. Para reforzarla aun más, elegí una numeración Gödel que imitase el Código Genético. Este fue el único elemento de equiparación forzada en el Correspondogma Central.

Equiparaciones forzadas, analogías y metáforas no pueden ser fácilmente deslindadas entre sí. Los relatores deportivos usan a menudo vívidas imágenes que son muy difíciles de encasillar. Por ejemplo, en una metáfora como "El Politécnico [refiriéndose al equipo de futbol] está haciendo girar sus ruedas", es arduo establecer con exactitud qué representación despierta: ¿adjudicamos las ruedas al equipo en su conjunto?, ¿o a cada uno de los jugadores? Probablemente, ni una ni otra cosa, sino que, durante un breve instante, nos asaltará la imagen de ruedas que giran sobre el fango o sobre la nieve y luego, de cierta misteriosa manera, serán seleccionadas sólo las partes pertinentes, y transferidas a la actuación del equipo. ¿Cuán profundamente son proyectados entre sí el equipo de futbol y el automóvil, durante aquel breve segundo inicial?

Recapitulación

Trataré de reunir los cabos sueltos: he presentado un buen número de ideas vinculadas con la creación, manipulación y comparación de símbolos. La mayoría de aquéllas están ligadas, de alguna manera, al deslizamiento, bajo el supuesto de que los conceptos están formados por algunos elementos fuertemente arraigados, y también por elementos carentes de una adhesión tan firme, elementos que provienen de diferentes niveles de los contextos autoincluidos (marcos). Los elementos de la segunda clase pueden ser desalojados y sustituidos bastante fácilmente, lo cual, según las circunstancias, puede originar una "repetición instantánea subjuntiva", una equiparación forzada o una analogía. Un proceso donde, dados dos símbolos, algunas partes de cada uno de éstos son desalojadas, mientras que otras son conservadas, puede dar lugar a una fusión de los dos símbolos citados.

Creatividad y arbitrariedad

Resulta obvio que estamos hablando de la mecanización de la creatividad. ¿Y esto no configura una contradicción en los términos? Pareciera, pero realmente no es así. La creatividad es la esencia de todo aquello que no es mecánico. Sin embargo, todo acto creativo *es* mecánico: tiene su explicación, lo mismo que la tiene un caso de hipo, ni más ni menos. El sustrato mecánico de la creatividad puede ocultarse a la vista, pero existe. A la inversa, hay algo no mecánico en los programas flexibles, inclusive en la actualidad. Puede que ello no sea equivalente a la creatividad, pero cuando los programas dejan de ser transparentes para sus creadores, es que ha comenzado la marcha de acercamiento a la creatividad.

Es una noción generalizada la de que la arbitrariedad es un ingrediente indispensable de los actos creativos. Esto puede ser cierto, pero no tiene ninguna relación con la mecanizabilidad —o, mejor, ¡la programabilidad!— de la creatividad. El mundo es una acumulación gigantesca de arbitrariedades; cuando reflejamos dentro nuestro una parte del mundo, absorbemos algo de esa arbitrariedad. Los patrones desencadenantes de símbolos, en consecuencia, pueden conducirnos por recorridos de la más extrema apariencia arbitraria, simplemente porque son producto de nuestras interacciones con un mundo loco y arbitrario. Y esto también puede darse en un programa de computadora. La arbitrariedad es un rasgo intrínseco del pensamiento, no algo que tiene que ser "inseminado artificialmente" a través de tiradas de dados, o bien de núcleos en desintegración, o de tablas numéricas caprichosas, o lo que a uno se le ocurra. Es un insulto a la creatividad humana suponer que descansa en recursos azarosos de tal tipo.

Lo que vemos como arbitrariedad es, comúnmente, nada más que una

consecuencia de la observación de algo simétrico a través de un filtro "oblicuo". Un elegante ejemplo es el aportado por las dos maneras de Salviati de analizar el número $\pi/4$. Pese a que la expansión decimal de $\pi/4$ no es literalmente arbitraria, sí lo es en la medida en que ello es necesario para el cumplimiento de muchos objetivos: es "seudoarbitraria". La matemática está llena de seudoarbitrariedades: las suficientes como para proveer a todos los creadores posibles de toda época.

Así como en la ciencia las "revoluciones conceptuales" invaden todos sus niveles en todos los momentos, el pensamiento de los individuos es atravesado una y otra vez por los actos creativos. Estos no tienen lugar solamente en el plano más elevado: se producen en cualquier sitio; la mayor parte de los mismos tiene dimensiones pequeñas y ha sido ejecutada un millón de ocasiones con anterioridad, pero estos actos son parientes muy cercanos de los actos más nuevos y altamente creativos. Los programas de computadora de la actualidad, empero, no parecen producir muchas creaciones pequeñas; la mayor parte de su tarea sigue siendo "mecánica". Esto sólo prueba que no están listos para simular el modo en que pensamos, sino que se están aproximando a ello.

Quizá la diferencia entre las ideas altamente creativas y las comunes radique en alguna motivación que combine belleza, simplicidad y armonía. En realidad, tengo predilección al respecto por una "meta-analogía" que se me ocurrió, basada en la comparación entre analogías y acordes. El esquema es simple: las ideas superficialmente vinculadas, por lo común, no lo están a una mayor profundidad; a la vez, las ideas profundamente vinculadas por lo común muestran disparidad en los planos de superficie. La analogía con los acordes surge con naturalidad: las notas físicamente contiguas son armónicamente distantes (por ejemplo, E-F-G [Mi, Fa, Sol]); y las notas armónicamente contiguas son físicamente distantes (por ejemplo, G-E-B [Sol, Mi, Si]). Las ideas que comparten un esqueleto conceptual guardan una cierta analogía con la armonía; estas armónicas "ideas-acordes" están a menudo muy separadas, como si estuviesen dispuestas en un imaginario "teclado de conceptos". Por cierto, no basta con cubrir la distancia separatoria ejecutando alguna pulsación conocida: ¡puede salir un acorde de séptima o de novena! Tal vez la presente analogía sea como un acorde de novena . . . amplio pero disonante.

Localización de patrones en todos los niveles

Los problemas de Bongard fueron elegidos como eje de este capítulo porque, cuando se los estudia, se entiende que el elusivo sentido de los patrones que los seres humanos heredamos de nuestros genes abarca todos los mecanismos de representación del conocimiento, lo cual incluye los contextos autoincluidos, los esqueletos y correspondencias conceptuales, la deslizabilidad, las descripciones y metadescripciones y sus interacciones, la fi-

sión y fusión de símbolos, las representaciones múltiples (ajustadas a diferentes dimensiones y a diferentes niveles de abstracción), expectativas subsidiarias, y todo lo demás.

En la actualidad, se puede tener la total certidumbre de que, si un programa consigue localizar patrones en una área, en otra área los pasará por alto, en tanto que para nosotros serán evidentes en ambas por igual. El lector puede recordar que ya aludí a esto en el Capítulo I, cuando dije que las máquinas no son influidas por la repetición, en tanto que las personas sí. Por ejemplo, veamos el caso de SHRDLU. Si Eta Oin teclea la oración "Tome un bloque rojo grande y depositelo", y repite esta misma orden una y otra vez, SHRDLU la acatará alegremente una y otra vez, tal cual como una máquina de sumar imprime "4" una y otra vez, si un ser humano tiene la paciencia de teclear "2 + 2" una y otra vez. Los seres humanos no proceden así: si un patrón aparece una y otra vez, lo identifican. SHRDLU no fue construido con el potencial necesario para formar nuevos conceptos o para reconocer patrones; no tiene el sentido de la observación panorámica, así se la ponga a prueba al respecto una y otra vez.

La flexibilidad del lenguaje

La capacidad de manejo de SHRDLU es inmensamente flexible, dentro de ciertos límites. SHRDLU puede comprender oraciones de gran complejidad sintáctica, o que contengan ambigüedades semánticas, en la medida en que puedan ser resueltas mediante el examen de la base de datos, pero no puede manejar un lenguaje "confuso". Por ejemplo, consideremos la oración: "¿Cuántos bloques van uno arriba del otro para formar una torre?" Nosotros la comprendemos de inmediato, pero carece de sentido si es interpretada literalmente, pese a que no se ha utilizado ninguna expresión idiomática. "Van uno arriba del otro" es una expresión imprecisa que, no obstante, logra que un ser humano capte perfectamente la imagen prevista. Son muy pocas las personas que puedan ser inducidas, en este caso, a visualizar una paradójica disposición con dos bloques, cada uno de los cuales está encima del otro, o a imaginar bloques que estén "yendo" a alguna parte.

Lo sorprendente del lenguaje es la imprecisión con que lo manejamos y cómo, pese a ello, nos es posible servirnos satisfactoriamente de él. SHRDLU utiliza las palabras de una manera "metálica"; en cambio, las personas lo hacen de una manera "maleable", "elástica", e inclusive de "rosca ajustable": si las palabras fuesen tuercas y bulones, lo que hace la gente es conseguir que cualquier tuerca se ajuste a cualquier bulón, mediante el simple recurso de comprimir y estrujar uno dentro del otro, tal como en algunas pinturas surrealistas donde todas las cosas presentan una consistencia blanda. El lenguaje, en manos humanas, se transforma prácticamente en un elemento fluido, pese al grano grueso de sus componentes.

Recientemente, la investigación en IA relativa a la comprensión de lenguajes naturales se ha apartado un tanto de la comprensión de oraciones individuales, tomadas separadamente, y se ha acercado a áreas tales como la comprensión de narraciones infantiles simples. Lo que sigue es una conocida muestra festiva de ese género, que ilustra el carácter inconcluso de las situaciones de la vida real:

Un hombre viajaba en un avión.
  Infortunadamente, resbaló y se cayó.
Afortunadamente, tenía un paracaídas.
  Infortunadamente, no se abrió.
Afortunadamente, debajo de él había una montaña de heno.
  Infortunadamente, sobresalía allí una horquilla.
Afortunadamente, el hombre pasó a un lado de la horquilla.
  Infortunadamente, pasó al lado de la montaña de heno.

Esto puede ser extendido indefinidamente. La representación de esta sencilla narración dentro de un sistema basado en marcos sería sumamente compleja, y comprendería la activación conjunta de marcos para los conceptos de hombre, avión, resbalar, paracaídas, caída, etc., etc.

Inteligencia y emociones

Veamos ahora este breve y conmovedor relato:

> Margarita sujetaba con fuerza el hilo de su hermoso globo recién comprado. De pronto, una racha de viento se lo arrebató y lo empujó hacia un árbol. El globo chocó con una rama y reventó. Margarita lloraba y lloraba.[4]

Para comprender esta narración, es necesario leer muchas cosas entre líneas. Por ejemplo: Margarita es una niña. El globo es de juguete, con un hilo destinado a que un niño lo sujete. Puede que no sea bello para un adulto, pero sí lo es a los ojos de un niño. Margarita está a la intemperie. El "lo" que el viento le arrebató es el globo. El viento no se llevó a la niña junto con el globo; ella lo soltó. Los globos pueden romperse en contacto con una punta aguda. Una vez que se han roto, no se los puede componer. Los niños pequeños gustan mucho de los globos y llegan a sentirse amargamente decepcionados cuando éstos se rompen. Margarita vio que su globo estaba roto. Los niños lloran cuando están apesadumbrados.

[4] David E. Rumelhart, "Notes on a Schema for Stories", en D. Bobrow y A. Collins, eds., *Representation and Understanding*, p. 211.

"Llorar y llorar" es llorar con fuerza y durante mucho rato. Margarita lloró y lloró a causa de su pesadumbre ante la destrucción de su globo.

Lo anterior probablemente signifique tan sólo una pequeña fracción de lo que está ausente en el nivel de superficie. Un programa debe contar con todo este conocimiento para saber de qué se trata el grupo de enunciados. Se podría objetar que, aun cuando el programa "entienda" lo que se ha dicho, en un sentido intelectivo, jamás lo comprenderá *realmente*, hasta que no haya llorado y llorado. ¿Y cuándo conseguirá semejante cosa una computadora? Esta es la clase de planteamiento humanístico al que se aboca Joseph Weizenbaum en su libro *Computer Power and Human Reason*; pienso, por mi parte, que es un tema importante: en realidad, un tema verdaderamente muy profundo. Por desdicha, muchos investigadores de IA se muestran poco dispuestos, en la actualidad, a considerar seriamente este problema. En alguna medida, con todo, los asiste la razón, pues es un poco prematuro dedicarse ahora al llanto de las computadoras: primero, es necesario ocuparse de las reglas que permitan a las computadoras habérselas con el lenguaje y con otras cosas; en su oportunidad, nos enfrentaremos con cuestiones de mayor profundidad.

IA tiene un largo camino por delante

Pareciera a veces que hay una ausencia tan completa de reglas que gobiernen el comportamiento, ¡que simplemente los seres humanos *no son* gobernados por reglas! Pero esto es una ilusión, comparable a la de creer que los cristales y los metales son consecuencia de rígidas leyes subyacentes, pero que no ocurre así con los fluidos o con las flores. Volveremos sobre este punto en el siguiente capítulo.

> El proceso mismo de la lógica actuando internamente en la mente puede que tenga mayor analogía con una serie de operaciones a propósito de pinturas simbólicas, una suerte de abstracta analogía del alfabeto chino o de ciertas descripciones mayas de acontecimientos, salvo que los elementos no son meramente palabras sino más bien oraciones o relatos completos, dotados de enlaces entre sí que los constituyen en una suerte de meta o supralógica, con sus reglas propias.[5]

Es difícil para muchos especialistas expresar vívidamente —inclusive, posiblemente, recordar— qué los impulsó originalmente a apasionarse con su disciplina. A la inversa, alguien ajeno puede comprender una de esas pasiones y ser capaz de articularla con precisión. Creo que ésta es la razón por la cual la anterior cita de Ulam me ha atraído, ya que transmite poéticamente la rareza de la empresa que persigue IA y al mismo tiempo muestra fe en la misma. Y uno debe mantenerse con fe en este aspecto, ¡pues hay tanto por andar todavía!

[5] Stanislaw Ulam, *Adventures of a Mathematician*, p. 182.

Diez preguntas y especulaciones

Para concluir este capítulo, quiero presentar diez "Preguntas y Especulaciones" acerca de IA. No seré tan audaz como para hablar de "Respuestas", pues lo que incluyo son mis opiniones personales, las cuales pueden modificarse en la medida en que yo aprenda más al respecto o en que IA avance en su desarrollo. (En lo que sigue, la expresión "programa IA" significa un programa muy adelantado con respecto a los programas contemporáneos: un programa *verdaderamente inteligente*.* Asimismo, es probable que las palabras "programa" y "computadora" conlleven un exceso de connotaciones mecanicistas, pero nos resignaremos a ellas, de todos modos.)

Pregunta: ¿Un programa de computadora compondrá alguna vez música bella?

Especulación: Sí, pero no próximamente. La música es un lenguaje emocional, y antes de que los programas experimenten emociones como las nuestras no habrá manera de conseguir que un programa componga nada dotado de belleza. Puede haber "adulteraciones", es decir, imitaciones superficiales de la sintaxis de música ya existente, pero, a pesar de lo que se pueda creer a primera vista, en la expresión musical hay mucho más de lo que puede ser capturado por las reglas sintácticas. Falta mucho tiempo para que los programas de computadora compositores de música produzcan nuevos géneros de belleza. Llevaré esta reflexión un poco más allá: pensar —esta sugerencia ha llegado a mis oídos— que pronto podremos ordenar a un modelo de mesa de "caja musical" preprogramada, fabricada en serie y obtenible por veinte dólares mediante envío postal, que haga surgir de sus estériles circuitos composiciones que pudieron haber sido creadas por Chopin o por Bach si hubiesen vivido más tiempo, implica una grotesca y lamentable subestimación de la profundidad del espíritu humano. Para que un programa produzca la música que esos autores produjeron tendría que enfrentar al mundo por sí mismo, afanándose en atravesar el laberinto de la vida y sintiendo cada momento de esa experiencia. Tendría que comprender el gozo y la soledad de una fría noche ventosa, la necesidad de una caricia, la inaccesibilidad de una población distante, el desgarramiento y el consuelo tras la muerte de un ser humano. Tendría que conocer la resignación y el hastío de la vida, el dolor y la desesperación, la determinación y la victoria, la devoción y el temor reverencial. Tendría que haber experimentado la mezcla de elementos opuestos como la esperanza y el miedo, la angustia y el regocijo, la

* "Actually Intelligent", cuya sigla coincide con la de "Artificial Intelligence", *Inteligencia Artificial*, en inglés. [T.]

serenidad y la ansiedad. E integrado todo ello como la carne al hueso tendría que tener sentido de la gracia, del humor, del ritmo, y un sentido de lo imprevisto, además, por supuesto, de una exquisita conciencia de la magia de la creación pura. Aquí, y solamente aquí, se encuentran las fuentes de la significación musical.

Pregunta: ¿Las emociones serán explícitamente programadas en una máquina?

Especulación: No. Es una pretensión ridícula. Toda simulación directa de las emociones —PARRY, pongamos por caso— no puede acercarse a la complejidad de la emotividad humana, la cual tiene su origen indirecto en la organización de la mente. Los programas y las máquinas adquirirán emociones de la misma forma: en calidad de subproductos de su estructura, según el modo en que estén organizados, y no gracias a una programación directa. Así, por ejemplo, nadie formulará una subrutina de "enamorarse", así como nadie formularía una subrutina de "comisión de errores". "Enamorarse" es una descripción que insertamos en un proceso complejo de un sistema complejo; ¡no tiene aplicación allí un módulo individual, interior al sistema, con la función de ser el único responsable de aquélla!

Pregunta: ¿Una computadora que piense será capaz de sumar con rapidez?

Especulación: Tal vez no. Los seres humanos mismos estamos compuestos de un hardware que realiza refinados cálculos, lo cual no significa que nuestro nivel simbólico, allí donde somos "nosotros", sepa cómo efectuamos dichos cálculos. Voy a formularlo de esta manera: no hay medios que nos permitan alimentar nuestras neuronas con números, para que nos sumen la cuenta de la tienda de abarrotes. Por suerte, nuestro nivel simbólico (es decir, *nosotros*) no puede tener acceso a las neuronas que están elaborando nuestro pensamiento: de no ser así, el cerebro se vería esterilizado. Si parafraseamos nuevamente a Descartes, diríamos:

"Pienso; luego, carezco de acceso
a los niveles donde sumo."

¿Por qué esto no puede ser igual en un programa inteligente? No se debe admitir que tenga acceso a los circuitos que están elaborando su pensamiento: de no ser así, la UCP se vería esterilizada. Hablando seriamente ahora, una máquina que apruebe la verificación Turing puede también, perfectamente, sumar con la misma lentitud que el lector o que yo, y por razones similares. Esa máquina no se limitará a representar el número 2 mediante los dos bits "10", sino a través de un acabado *concepto*, tal como nosotros, el cual rebosará de asociaciones tales como la de homonimia, con las secuencias *d-o-s*

de, por ejemplo, *cansados* o *dosis*; o con las palabras "pareja" y "ambos"; con una multitud, en fin, de imágenes mentales como los puntos del dominó, la forma del numeral '2', las nociones de alternancia, de paridad, de imparidad, etc., etc. . . . Con todo este "exceso de equipaje" a sus espaldas, un programa inteligente se hará muy perezoso para sumar. Por supuesto, podríamos darle una "minicalculadora", por decir así (o incorporarle una); sus respuestas serían muy rápidas, pero su desempeño sería semejante al de una persona provista de una calculadora similar. En la máquina, habría dos partes separadas: una, confiable pero ininteligente; otra, inteligente pero falible. Uno no podría dar por seguro que el sistema combinado fuese confiable en una medida mayor que una combinación entre ser humano y máquina. De manera, pues, que si estamos en pos de respuestas correctas, dejemos actuar a la minicalculadora: ¡no pongamos en juego la inteligencia!

Pregunta: ¿Habrá programas de ajedrez que derroten a cualquier oponente?

Especulación: No. Puede haber programas que puedan derrotar a quien sea al ajedrez, pero no exclusivamente a los jugadores de ajedrez. Se tratará de programas dotados de inteligencia *general*, y serán tan temperamentales como las personas. "¿Jugamos al ajedrez?" "No, estoy aburrido del ajedrez; hablemos de poesía": éste puede ser el tipo de diálogo que se sostendría con un programa capaz de derrotar a quien sea, pues la inteligencia real está basada en una capacidad de visión panorámica total —esto es, en la capacidad programada de "brincar fuera del sistema", por hablar de este modo—, al menos en la medida en que nosotros disponemos de esa facultad. Una vez obtenido ese estado, no podremos circunscribir el programa: éste habrá sobrepasado determinado punto crítico y tendremos que hacer frente a los hechos que hemos suscitado.

Pregunta: ¿Habrá lugares específicos de la memoria que almacenen parámetros encargados de gobernar el comportamiento del programa tales que, si accedemos a ellos y los modificamos, conseguiremos que el programa sea más sagaz o más inepto o más creativo o más interesado en materia de beisbol? En resumen, ¿estaremos en condiciones de "sintonizar" el programa mediante manipulaciones en niveles relativamente bajos?

Especulación: No. El programa no respondería en absoluto a las modificaciones de cualquier elemento particular de la memoria, por lo mismo que nosotros seguimos siendo exactamente los mismos a pesar de que diariamente mueren miles de neuronas en nuestro cerebro (¡!). Si se hurga ansiosamente en el programa, entonces sólo se conseguirá dañarlo, tal como si practicáramos una irresponsable

neurocirugía en un ser humano. No existirá ninguna localización "mágica" en la memoria donde, pongamos por caso, esté asentado el cociente intelectual del programa. Otra vez nos encontramos con la situación de que ello será un rasgo que surja como consecuencia del comportamiento del nivel inferior, sin emplazamiento específico en parte alguna. Lo mismo vale para aspectos tales como "el número de ítems que puede retener la memoria inmediata del programa", "en qué grado le gusta la física", etcétera.

Pregunta: ¿Podría "sintonizarse" un programa IA para que actúe como yo, o para que actúe como usted, o para que actúe como ambos, por partes iguales?

Especulación: No. Un programa inteligente no será más camaleónico de lo que pueden serlo los seres humanos. Se basará en la fidelidad de sus memorias y no podrá revolotear entre personalidades. La idea de modificar parámetros internos para "sintonizar una nueva personalidad" revela una ridícula subestimación de la complejidad de la personalidad.

Pregunta: ¿Habrá un "corazón" en un programa IA, o consistirá simplemente en "bucles sin sentido y en secuencias de operaciones triviales" (según las palabras de Marvin Minsky)?[6]

Especulación: Si pudiéramos dirigir nuestra vista hasta el fondo, como si se tratase de una charca poco profunda, seguramente veríamos nada más que "bucles sin sentido y secuencias de operaciones triviales", y también seguramente no veríamos ningún "corazón". Pero hay dos puntos de vista extremos en IA: uno dice que la mente humana, por razones esenciales y misteriosas, es improgramable. Según el otro, todo lo que hace falta es sencillamente ensamblar los adecuados "dispositivos heurísticos: optimizadores múltiples, recursos para el reconocimiento de patrones, álgebras planificadoras, procedimientos de tipo recursivo, y así siguiendo";[7] con esto bastará para obtener inteligencia. Yo me encuentro en algún sitio intermedio entre ambos puntos, pues creo que la "charca" de un programa IA resultará tan profunda y turbia que no podremos escudriñar la distancia entre la superficie y el fondo. Si observamos desde arriba, los bucles serán invisibles, tal como lo son hoy en día, para la mayoría de los programadores, los electrones portadores de corriente. Cuando hayamos creado un programa que apruebe la verificación Turing, veremos un "corazón", aun sabiendo que no lo hay.

Pregunta: ¿Los programas IA llegarán a ser "superinteligentes" alguna vez?

[6] Marvin Minsky, "Steps Toward Artificial Intelligence", en E. Feigenbaum y J. Feldman, eds., *Computers and Thought*, p. 447.

[7] *Ibid.*, p. 446.

Especulación: No lo sé. No hay evidencia de que seamos capaces de entender una "superinteligencia", de encontrar con qué relacionarla y, ni siquiera, de saber si el concepto tiene sentido. Por ejemplo, nuestra inteligencia está vinculada a la velocidad del pensamiento. Si nuestros reflejos hubieran sido diez veces más rápidos o más lentos, habríamos desarrollado un conjunto de conceptos enteramente distinto para describir el mundo. Una criatura cuya visión del mundo sea radicalmente diferente puede carecer de mayores puntos de contacto con nosotros. A menudo me he preguntado si podría haber, digamos, composiciones musicales que sean a Bach lo que Bach es a las tonadas populares: "Bach al cuadrado", por expresarlo así. ¿Y sería yo capaz de comprenderlas? Es posible que tal música exista en torno mío y que yo no la reconozca, así como los perros no pueden entender la palabra. La idea de superinteligencia es muy extraña. Como quiera que sea, no creo que sea el objetivo de la investigación en IA, aunque si alguna vez se alcanza el nivel de la inteligencia humana, indudablemente el paso subsiguiente será alcanzar el nivel de la superinteligencia: no sólo en lo que respecta a nosotros, sino también para nuestros colegas, los programas de IA, quienes compartirán el mismo interés hacia IA y la superinteligencia. Se comprende que, muy probablemente, los programas de IA tendrán una extraordinaria curiosidad a propósito de IA en general.

Pregunta: Parece usted decir que los programas IA serán virtualmente idénticos a los seres humanos, ¿No habrá ninguna diferencia?

Especulación: Quizá las diferencias entre los programas IA y las personas sean más amplias que las existentes entre la mayoría de los seres humanos. Es casi imposible imaginar que el "cuerpo" donde se albergue un programa IA no lo afecte en forma profunda. De modo que, excepto si residiera en una réplica pasmosamente fiel del cuerpo humano —¿y por qué va a tener que ser así?—, lo más probable es que tenga perspectivas enormemente diferentes sobre qué es importante, interesante, etc. En una oportunidad, Wittgenstein hizo una observación graciosa: "Si un león hablara, no lo entenderíamos." Esto me hizo pensar en el cuadro de Rousseau con el manso león y la gitana dormida, en el páramo iluminado por la luna. Sin embargo, ¿cómo lo sabe Wittgenstein? Mi sospecha es que todo programa IA, si bien nos será inteligible, tiene que parecernos bastante ajeno. Por eso mismo, nos costará mucho trabajo establecer si estamos ocupándonos de un programa IA, o tan sólo de un programa "misterioso".

Pregunta: ¿Cuando hayamos elaborado un programa inteligente, comprenderemos qué son la inteligencia, la conciencia, el libre albedrío y el yo?

Especulación: En cierto modo; todo depende de lo que se quiera decir con "comprender". En un nivel visceral, es probable que cada uno de nosotros tenga la mejor comprensión que puede de todo aquello, en un comienzo. Es algo semejante a escuchar música. ¿Comprendemos a Bach realmente porque lo analizamos? ¿O lo comprendimos en aquel momento en que sentimos que hacía vibrar todos los nervios de nuestro cuerpo? ¿Comprendemos que la velocidad de la luz es constante dentro de todo marco de referencia inerte? Podemos asimilarlo matemáticamente, pero nadie en el mundo tiene una intuición verdaderamente relativista. Y, tal vez, nadie llegue a comprender jamás los misterios de la inteligencia y de la conciencia, a través de un camino intuitivo. Podemos comprender a la *gente*, y es posible que no podamos llegar más allá de eso.

Canon perezoso

Esta vez, encontramos a Aquiles y a la Tortuga visitando a su nuevo amigo, el Perezoso.

Aquiles: ¿Quiere que le platique de mi curiosa carrera con la señora Tortuga?

Perezoso: Sí, por favor.

Aquiles: Se hizo muy famosa. Creo que hasta llegó a escribir sobre ella un señor Zenón.

Perezoso: Suena muy atractivo.

Aquiles: Así es. Verá usted, la señora Tortuga arrancó antes que yo; tenía una enorme ventaja, pero . . .

Perezoso: Usted la alcanzó, ¿no es así?

Aquiles: Sí. Siendo, como soy, el de los pies ligeros, reduje la distancia que nos separaba, en una proporción constante, y pronto la alcancé.

Perezoso: La ventaja se fue haciendo cada vez más corta, de modo que usted se le puso a la par.

Aquiles: Exactamente. Oh, fíjese . . . la señora Tortuga ha traído su violín. ¿Puedo tocar, señora Tortuga?

Tortuga: No, por favor. Suena muy bajo.

Aquiles: Oh, de acuerdo, pero me encuentro con talante musical, no sé por qué.

Perezoso: Puede tocar el piano, Aquiles.

Aquiles: Gracias; probaré de hacerlo dentro de un instante. Sólo quería agregar que disputé otra clase de "carrera" con la señora Tortuga, tiempo después. Desgraciadamente, en esa carrera . . .

Tortuga: Usted no me alcanzó, ¿no es así? La ventaja se fue haciendo cada vez más amplia, de modo que usted no pudo ponérseme a la par.

Aquiles: Es cierto. Creo que ESA carrera también fue relatada por escrito, gracias a Lewis Carroll. Bien, señor Perezoso, aceptaré su ofrecimiento de utilizar el piano. Pero soy tan inepto con este instrumento, no creo que me atreva.

Perezoso: Trate, se lo ruego.

(*Aquiles se sienta y comienza a ejecutar una sencilla melodía.*)

Aquiles: Oh . . . esto suena muy extrañamente. ¡No es como yo suponía que sonaría! Algo raro pasa.

Tortuga: Usted no puede tocar el piano, Aquiles. No trate, se lo ruego.

Aquiles: Esto es como un piano reflejado en un espejo. Las notas altas están a la izquierda, y las bajas a la derecha. Las melodías aparecen al



SLOTH CANON

J.S. BACH

revés, como si hubiesen sido puestas patas arriba. ¿A quién se le ocurrió alguna vez una cosa tan trastornada como ésta?

Tortuga: Esto es algo tan característico de los perezosos. Estos cuelgan . . .

Aquiles: Sí, ya sé . . . de los árboles . . . patas arriba, por supuesto. Este piano de estirpe perezosa sería adecuado para ejecutar esas inversiones melódicas que aparecen en algunos cánones y fugas. Claro que aprender a tocar el piano colgando de un árbol cabeza abajo debe ser difícil, ha de ser una tarea que exige una gran dedicación y energía.

Perezoso: Esto no es algo tan característico de los perezosos.

Aquiles: Ajá, presumo que a los perezosos les gusta tomarse la vida con calma, y patas arriba, por añadidura. ¡Qué forma tan singular de pasar por la vida! Hablando de cosas que están cabeza abajo y al mismo tiempo son despaciosas, en la *Ofrenda Musical* hay un "Canon per augmentationem, contrario motu". En mi edición, frente a cada uno de los tres pentagramas están las letras 'S', 'A' y 'T'. No sé por qué. De todos modos, creo que Bach hizo las cosas muy hábilmente en este canon. ¿Qué opina, señora Tortuga?

Tortuga: Superó sus propios límites creativos. En cuanto a las letras "SAT", usted puede percatarse de lo que significan.

Aquiles: "Soprano", "Alto" y "Tenor", supongo. Las composiciones a tres voces, a menudo, prevén esa combinación de voces. ¿Está de acuerdo, señor Perezoso?

Perezoso: Aquéllas significan . . .

Aquiles: Oh, aguarde sólo un instante, señor Perezoso. Señora Tortuga, ¿por qué se pone su abrigo? No se va a retirar, ¿verdad? Se la ve cansada. ¿Cómo se siente?

Tortuga: Sin gasolina. Perdón, ¡me largo! (*Abandona la habitación con paso fatigado.*)

Aquiles: Pobre . . . justo cuando estábamos por preparar un bocadillo, ¿no? Pero, ciertamente, se la nota exhausta. Ha estado corriendo toda la mañana: se está entrenando para disputar otra carrera conmigo.

Perezoso: Transgredió sus propios límites atléticos.

Aquiles: Sí, pero de nada le va a servir. Quizá pueda ganarle a un Perezoso . . . ¿pero a mí? ¡Nunca! Discúlpeme, ¿estaba usted por decirme qué representan las letras "SAT"?

Perezoso: En cuanto a las letras "SAT", usted no podrá percatarse jamás de lo que significan.

Aquiles: Bueno, si no quieren decir lo que yo supuse, siento azuzada mi curiosidad. Tal vez tenga que pensarlo un poco más. Dígame, ¿cómo cocina las frituras francesas?

Perezoso: Con aceite.

Figura 133. "Canon Perezoso", de la Ofrenda Musical, *de J. S. Bach. [Música impresa por el programa "SMUT", de Donald Byrd.]*

Aquiles: Ah, sí, ya recuerdo. Cortaré esta papa en tiras de cuatro a cinco centímetros de extensión. ¿Qué opina de mi patrón de medida?

Perezoso: Perdón, ¡qué corto!

Aquiles: Como quiera, de acuerdo, la cortaré en tiras de diez centímetros de largo. ¡Compañero, qué buenas frituras francesas saldrán! Es una lástima que la señora Tortuga no pueda probarlas.

CAPITULO XX

Bucles Extraños O Jerarquías Enredadas

¿Las máquinas pueden poseer originalidad?

DOS CAPITULOS ATRAS, comenté el verdaderamente exitoso programa de damas creado por Arthur Samuel, único programa capaz de derrotar a su inventor. Es interesante, por ello, conocer las opiniones de Samuel sobre el tema de las computadoras y la originalidad. Los pasajes que siguen han sido tomados de una réplica, formulada por Samuel en 1960, dirigida a un artículo de Norbert Wiener.

> Estoy convencido de que las máquinas no pueden poseer originalidad en el sentido afirmado por Wiener en su tesis de que "las máquinas pueden trascender, y lo hacen, ciertas limitaciones de sus diseñadores, y ello hace que lleguen a ser eficaces y al mismo tiempo peligrosas." . . .
> Una máquina no es un genio, no funciona mediante toques mágicos, no posee una voluntad; pese a lo que diga Wiener, de aquélla no surge nada que no haya sido puesto previamente allí, salvo, por supuesto, en el caso nada frecuente de mal funcionamiento . . .
> Las "intenciones" que la máquina parece manifestar son las intenciones del programador humano, *tal como* fueron especificadas con anterioridad, o son intenciones subsidiarias, derivadas de aquéllas según reglas establecidas por el programador. Podemos prever niveles más elevados de abstracción, como lo hace Wiener, donde el programa no sólo modifique las intenciones subsidiarias sino también las reglas empleadas en su derivación, o donde modifique las formas a través de las cuales modifica las reglas, y así siguiendo, o, inclusive, donde una máquina inventaría y construiría una segunda máquina dotada de mayores capacidades. Sin embargo, y esto es importante, la máquina *no hará y no podrá* [el subrayado es de Samuel] hacer ninguna de tales cosas hasta que no haya sido instruida acerca de cómo proceder para ello. Hay, y lógicamente deberá seguirlo habiendo, una completa separación entre (*i*) toda extensión y elaboración sustancial en este proceso de concreción de los anhelos humanos, y (*ii*) el desarrollo, en el interior de la máquina, de una *voluntad* propia. Creer otra cosa es confiar en la magia, o suponer que la existencia de la voluntad humana es una ilusión, y que las acciones humanas son tan mecánicas como las de la máquina. Tal vez al artículo de Wiener y mi réplica respondan, ambos, a una determinación mecanicista, pero me niego a aceptar la creencia citada.[1]

Esto me trae a la memoria el Diálogo de Lewis Carroll (la *Invención a dos voces*); intentaré explicar por qué. Samuel basa su argumentación contra

[1] A. L. Samuel, "Some Moral and Technical Consequences of Automation-A Refutation", *Science* 132 (Sept. 16, 1960), pp. 741-2.

la conciencia (o la voluntad) de la máquina en la noción de que *toda implantación mecánica de la voluntad requeriría un retroceso infinito*. De modo similar, la Tortuga de Carroll sostiene que no puede darse ningún paso de razonamiento, por simple que sea, sin aducir alguna regla de más alto nivel que le dé fundamento. Pero como esto último configura también un paso de razonamiento, es necesario recurrir a una regla de nivel aun más alto, y así siguiendo. Conclusión: *el razonamiento involucra un retroceso infinito*.

Por supuesto, algo no está bien en el argumento de la Tortuga, y creo que ocurre algo análogo en el argumento de Samuel. Para mostrar que hay falacias análogas en ambos, voy a "ayudar al Diablo", poniéndome transitoriamente en el papel de abogado suyo. (Puesto que, como es sabido, Dios ayuda a quienes se ayudan a sí mismos, es presumible que el diablo ayude a quienes, y sólo a quienes, no se ayudan a sí mismos. ¿El Diablo se ayudará a sí mismo?) He aquí mis diabólicas conclusiones con respecto al diálogo carrolliano:

> La deducción "el razonamiento es imposible" no se aplica a las personas porque, como cualquiera puede advertir, *nosotros* nos las arreglamos para dar muchos pasos de razonamiento, en los niveles superiores que fueren. Esto muestra que los seres humanos operamos *sin necesidad de reglas*: somos "sistemas informales". Por otro lado, como argumento contrario a la posibilidad de toda implantación *mecánica* del razonamiento, la deducción es válida, pues todo sistema mecánico de razonamiento debería depender explícitamente de reglas; entonces, no podría salirse del juego a menos que haya metarreglas que establezcan cuándo aplicar sus reglas, metametarreglas que establezcan cuándo aplicar sus metarreglas, etc. Podemos concluir que la facultad de razonar no puede ser mecanizada: es un atributo exclusivamente humano.

¿Cuál es la falla del punto de vista del abogado del Diablo? Obviamente, el supuesto de que *una máquina no puede hacer algo sin una regla que le indique hacerlo*. En realidad, las máquinas escapan tan fácilmente como las personas a las disparatadas objeciones de la Tortuga y, además, por la misma razón: tanto las máquinas como los seres humanos están formados por un hardware que procesa todo por sí mismo, con arreglo a las leyes de la física. No hace falta basarse en "reglas que permitan aplicar las reglas", porque las reglas de nivel *inferior* —las que no tienen enfrente ningún "meta"— están enclavadas en el hardware, y actúan sin necesidad de autorización. Moraleja: El Diálogo de Carroll no dice nada a propósito de las diferencias entre los seres humanos y las máquinas, al fin y al cabo. (Y, por cierto, el razonamiento es mecanizable.)

Así que, pues, listo con el Diálogo de Carroll. Manos a la obra ahora

con la argumentación de Samuel; su esencia, si se me permite caricaturizarla, es ésta:

> Ninguna computadora "desea" nunca hacer nada, pues ha sido programada por alguien ajeno. Unicamente si pudiera programarse a sí misma desde cero —un absurdo— tendría un sentido volitivo propio.

Samuel reproduce la posición de la Tortuga, sustituyendo "razonar" por "desear". Lo que implica su argumentación es que, detrás de toda mecanización del desear, deberá haber una retrogradación infinita o, peor aun, un bucle cerrado. Si es por esto que las computadoras carecen de voluntad, ¿qué ocurre con las personas? Un criterio idéntico supondría que:

> Salvo que una persona se diseñe a sí misma y elija sus propias voliciones (como también que haga la elección de elegir sus propias voliciones, etc.) no se puede decir de ella que tiene albedrío propio.

Esto nos hace detenernos a pensar de dónde proviene nuestra noción de contar con albedrío propio. A menos que seamos espiritualistas, probablemente respondamos que de nuestro cerebro: una construcción hardware que no hemos elegido ni diseñado. Sin embargo, ello no debilita nuestro sentido de preferencia hacia ciertas cosas y de rechazo hacia otras. No somos un "objeto autoprogramado" (sea lo que fuere esto), pero así y todo tenemos un sentido de la volición, y éste emana del sustrato físico de nuestra organización mental. De la misma manera, algún día las máquinas podrán ejercitar voliciones, aun sin la intervención de un programa mágico, espontáneamente aparecido desde la nada en la memoria (un "programa autoprogramado"). Las máquinas serán capaces de actos de voluntad por las mismas razones que nosotros: como resultado de la organización y de la estructura de muchos niveles de hardware y de software. Moraleja: la argumentación de Samuel no dice nada a propósito de las diferencias entre los seres humanos y las máquinas, al fin y al cabo. (Y, por cierto, la voluntad será mecanizada.)

Por debajo de toda Jerarquía Enredada se asienta un nivel inviolable

Inmediatamente a continuación de la *Invención a dos voces*, expresé que un problema de importancia central en este libro es el siguiente: "¿Las palabras y los pensamientos están regidos, o no, por reglas formales?" Una de las empresas principales acometidas en estas páginas ha sido la de hacer notar la proliferación de niveles que caracteriza a la mente/cerebro, y he procurado mostrar que la respuesta última a aquella pregunta es:

"Sí, a condición de que descendamos hasta el nivel más bajo —el hardware— para descubrir allí las reglas."

Ahora bien, las afirmaciones de Samuel incluyen un concepto que me interesa analizar. Es el siguiente: cuando los seres humanos pensamos, indudablemente modificamos nuestras propias reglas mentales, y modificamos las reglas que modifican las reglas, y así siguiendo; pero de lo que aquí se habla es de, por decirlo así, "reglas software". Por el contrario, las reglas ubicadas *en el fondo* no cambian. Las neuronas funcionan de la misma simple manera en todo momento. No se puede "pensar" a las neuronas para que funcionen de alguna forma no neuronal, mientras que sí es posible alterar el estilo de reflexión o el tema al que está abocada la mente. Lo mismo que Aquiles en el *Preludio y Fuga . . . Hormiguesca*, se tiene acceso a los propios pensamientos pero no a las propias neuronas. Las reglas software, situadas en diversos niveles, pueden cambiar; no así las reglas hardware: ¡en realidad, la flexibilidad del software se debe a la rigidez del hardware! Esto no constituye, en absoluto, una paradoja, sino un hecho simple y fundamental, asociado a los mecanismos de la inteligencia.

Quiero dedicar este capítulo final a la distinción entre el automodificable software y el inviolable hardware, desarrollando el tema a través de un juego de variaciones. Algunas de éstas, tal vez, parezcan traídas de los cabellos; sin embargo, confío en que, cuando cierre el bucle mediante el retorno al cerebro, la mente y la noción de conciencia, el lector encuentre un núcleo invariante en todas las variaciones.

Mi interés mayor, en este capítulo, es transmitir algunas de las imágenes que más me ayudaron a visualizar la forma en que la conciencia brota de la jungla de neuronas; transmitir, en suma, un conjunto de intuiciones intangibles, en la esperanza de que sean válidas y puedan así contribuir, en alguna medida, a que otros lleguen a afinar la formulación de sus propias imágenes acerca de lo que hace funcionar a la mente. Todo lo que yo puedo esperar es que las confusas imágenes de mi propia mente, acerca de la mente y de las imágenes, catalicen la formación de imágenes más certeras, acerca de la mente y de las imágenes, en otras mentes.

Un juego automodificable

Una primera variación se refiere a algunos juegos en los cuales, cuando es nuestro turno, podemos modificar las reglas. Consideremos el ajedrez: evidentemente, las reglas son siempre las mismas, lo único que cambia con cada movida es la situación del tablero. Ahora bien, inventemos una variación consistente en que, cuando nos toca jugar, hagamos una movida o, en lugar de ello, modifiquemos las reglas. ¿Cómo hacerlo, empero? ¿Con total libertad? ¿Lo convertimos en un juego de damas? Por cierto, semejante anarquía carecería de propósito; debemos establecer algunas restricciones: por ejemplo, una versión podría permitir que se redefina el

movimiento del caballo. En vez de ser 1-y-luego-2, podría ser *m*-y-luego-*n*, donde *m* y *n* sean números naturales arbitrarios; llegado nuestro turno, podríamos cambiar tanto a *m* como a *n* por más o menos 1, de modo que el movimiento podría ir desde 1-2 a 1-3 a 0-3 a 0-4 a 0-5 a 1-5 a 2-5 . . . También *sería posible contar con reglas que redefinan los movimientos* del alfil, y de todas las piezas restantes. Además, se podrían agregar escaques, o reducir los existentes . . .

Tenemos ahora dos estratos de reglas: las que indican cómo mover las piezas, y las que indican cómo modificar las reglas. Tenemos entonces reglas y metarreglas. El paso que sigue es obvio: introducir metametarreglas gracias a las cuales podamos cambiar las metarreglas. Lo que no es tan obvio es cómo conseguir esto. La razón por la que es sencillo formular reglas relativas al movimiento de las piezas consiste en que éstas se desplazan en un espacio formalizado: el tablero. Si podemos idear una notación formal simple para expresar reglas y metarreglas, manipularlas será como manipular formalmente cadenas o, inclusive, como manipular piezas de ajedrez. Para llevar las cosas a su extremo lógico: inclusive, sería posible expresar las reglas y las metarreglas como posiciones, en tableros auxiliares. Luego, una determinada posición de tablero podría ser interpretada *como una partida, o como un conjunto de reglas, o como un* conjunto de metarreglas, etc., según el criterio que nos interese aplicar en cada oportunidad. Por supuesto, deberá existir acuerdo entre los jugadores en cuanto a las convenciones que rijan la interpretación de la notación.

Podemos contar, pues, con un gran número de tableros adyacentes: uno para la partida, otro para las reglas, otro para las metarreglas, otro para las metametarreglas, y así siguiendo hasta donde se desee. El jugador a quien toca el turno puede hacer una movida en *cualquiera* de los tableros, excepto en el de máximo nivel, siguiendo las reglas que correspondan (se aplican las del tablero ubicado inmediatamente a continuación en la jerarquía). Indudablemente, los jugadores pueden llegar a sentirse por completo desorientados ante el hecho de que casi todo —¡pero no todo!— puede modificarse. Por definición, el tablero de nivel superior no puede ser alterado: es *inviolable*. Hay otras cosas inviolables: las convenciones en virtud de las cuales son interpretados los tableros, el acuerdo de jugar por turnos, el de que cada jugador puede modificar un tablero por turno . . . pueden encontrarse más si se examina detenidamente la idea.

Y es posible ir mucho más adelante, desplazando los pilares que permiten establecer la orientación. Un paso por vez . . . comenzamos por yuxtaponer toda la hilera de tableros en uno solo. ¿Cómo proceder luego? Habrá dos formas de interpretar el tablero: (1) como conjunto de piezas sujetas a movimiento; (2) como reglas que gobiernan el movimiento de las piezas. Ahora bien, cuando nos toca el turno, movemos piezas, ¡y, forzosamente, modificamos las reglas! De tal modo, las reglas se transforman a sí mismas constantemente: esto impresiona como un reflejo de la Tipogenética, y de la misma genética real. La distinción entre partida, reglas, metarreglas,

metametarreglas, se ha perdido. Lo que una vez fue una esmerada disposición jerárquica se ha convertido en un Bucle Extraño, O Jerarquía Enredada. Las movidas cambian las reglas, las reglas determinan las movidas . . . giro tras giro en torno *al mismo punto* . . . Aún hay diferentes niveles, pero la distinción entre "más bajo" y "más alto" se ha borrado.

Ahora, parte de lo que era inviolable se ha hecho modificable, pero resta una multitud de inviolabilidades. Igual que antes, hay convenciones entre ambos oponentes, destinadas a interpretar el tablero como un grupo de reglas; hay acuerdo en cuanto a la distribución de turnos, como asimismo, probablemente, otras convenciones implícitas.

Adviértase, con todo, que la noción de existencia de diferentes niveles ha sobrevivido, de una manera inesperada. Hay un nivel Inviolable, llamémosle *nivel I*, en el cual reside la interpretación de las convenciones; y hay también un nivel Enredado, el *nivel E*, donde reside la Jerarquía Enredada. De modo que hay dos niveles que siguen siendo jerárquicos: el nivel I gobierna lo que sucede en el nivel E, pero el nivel E no afecta, y no puede afectar, al nivel I. Por más que el nivel E sea por sí mismo una Jerarquía Enredada, permanece bajo el control de un conjunto de convenciones ubicado fuera de él: y ésta es la cuestión importante.

Sin duda el lector ya lo imaginó: nada nos impide hacer lo "imposible", es decir, entrelazar el nivel I y el nivel E, haciendo que la interpretación de las convenciones mismas quede sujeta a revisión, según la posición del tablero. Sin embargo, para concretar tal "superenredamiento", ambos oponentes han de ponerse de acuerdo sobre ciertas convenciones nuevas que conecten los dos niveles . . . y el acto a través del cual se efectúe el acuerdo creará un *nuevo* nivel, un nuevo género de nivel inviolable por sobre (o por debajo, si así se prefiere) el nivel "superenredado". Y es posible seguir por este camino hasta donde se quiera. En realidad, los "brincos" que se han practicado son muy similares a los vistos en la *Cantatatata*, y en la reiterada gödelización aplicada a diversos perfeccionamientos de TNT. Cada vez que creemos haber alcanzado el punto terminal, hay una nueva variación del tema del brinco fuera del sistema, cuya delimitación requiere creatividad.

Otra vez el triángulo autoral

Pero no estoy interesado en proseguir con el curioso tema de los enredamientos cada vez más abstrusos que emanan del ajedrez automodificable. La intención fue mostrar, de una manera en cierta medida gráfica, que en todo sistema hay siempre algún nivel "protegido", fuera del alcance de las reglas de otros niveles, por muy enredada que sea la interacción existente *entre* éstos. Un divertido acertijo del Capítulo IV ilustra la misma idea dentro de un contexto algo diferente. Tal vez pesque desprevenido al lector:

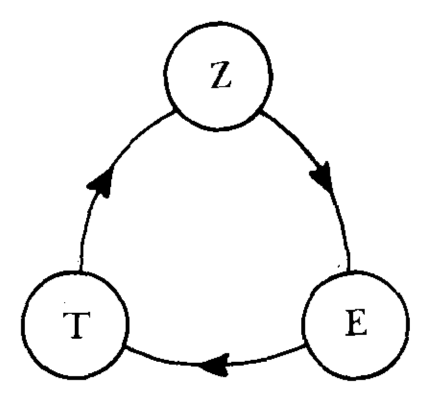


Figura 134. Un "triángulo autoral".

> Hay tres autores: Z, T y E. Pero sucede que Z sólo existe en una novela de T. Del mismo modo, T sólo existe en una novela de E. Y, curiosamente, también E existe solamente en una novela . . . de Z, por supuesto. Ahora bien, ¿es *realmente* posible un "triángulo autoral" semejante?

Por supuesto que es posible. Pero hay una triquiñuela . . . Los tres autores Z, T y E son personajes de otra novela . . . ¡escrita por H! Uno puede considerar al triángulo Z-T-E un Bucle Extraño, O Jerarquía Enredada, pero el autor H está fuera del espacio donde tiene lugar el entremezclamiento: el autor H es un espacio inviolable. Pese a que Z, T y E tienen acceso entre sí —directo o indirecto— y a que puedan ser muy cretinos unos con otros en sus respectivas novelas, ¡ninguno de ellos puede hacer contacto con la vida de H! Ni siquiera pueden imaginarlo, tal como no podríamos imaginar *nosotros* al autor del libro del cual fuésemos personajes. Si yo tuviera que representar gráficamente al autor H, lo dibujaría fuera de la página; claro, esto presentaría una dificultad, puesto que dibujar algo es, necesariamente, ubicarlo *en* la página . . . De todos modos, H está fuera, en rigor, del mundo de Z, T y E, y tiene que ser representado en función de ello.

Manos dibujando, de Escher

Una variación clásica de nuestro tema es la obra de Escher, *Manos dibujando* (figura 135). En ella, una mano izquierda (MI) dibuja una mano derecha (MD), y al mismo tiempo MD dibuja a MI. Otra vez nos encontramos con niveles comúnmente considerados jerárquicos —el que dibuja, y el que es dibujado— que se vuelven uno hacia el otro, originando una Jerarquía Enredada. Pero el tema de este capítulo se funda, por supuesto, en lo que hay más allá, en la mano no dibujada pero dibujante de M. C. Escher, creador de MI y de MD. Escher está fuera del espacio con-

Figura 135. Manos dibujando, *de M. C. Escher (litografía, 1948).*

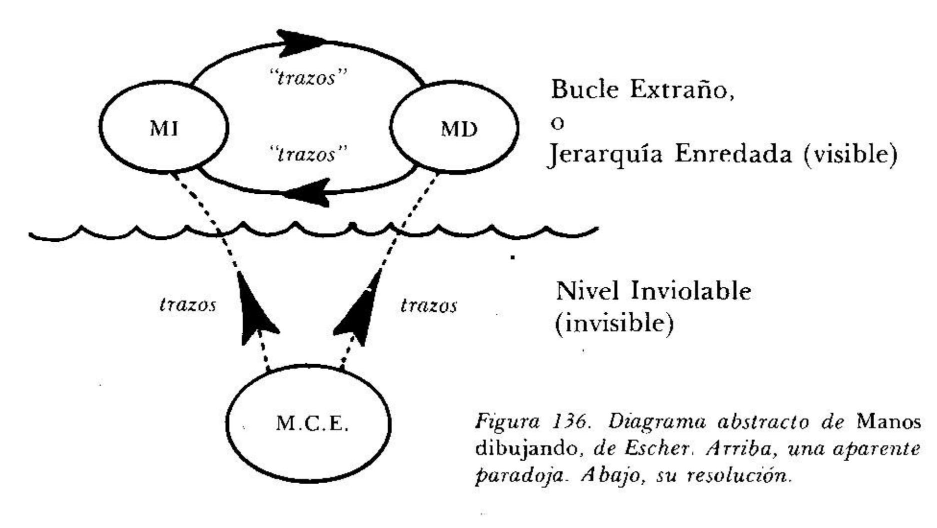


Figura 136. Diagrama abstracto de Manos dibujando, *de Escher. Arriba, una aparente paradoja. Abajo, su resolución.*

figurado por las dos manos y, en mi esquemática versión de su cuadro (figura 136), esto puede ser observado explícitamente. En dicho esquema representativo de la imagen de Escher se ve, arriba, el Bucle Extraño, O Jerarquía Enredada; abajo, está el Nivel Inviolable, el cual hace posible que exista el nivel superior. Se podría, inclusive, avanzar más todavía y escherizar el cuadro de Escher mediante una fotografía que mostrase una mano dibujándolo. Y así siguiendo.

Cerebro y mente: un entrelazamiento neural dando sustento a un entrelazamiento simbólico

Podemos ahora poner en relación lo anterior tanto con el cerebro como con los programas IA. En nuestros mecanismos de pensamiento, los símbolos activan otros símbolos, y todos interactúan heterárquicamente. Además, los símbolos pueden modificarse internamente entre sí, a la manera de los programas que actúan sobre otros programas. Como consecuencia de la Jerarquía Enredada que envuelve los símbolos, se crea la ilusión de que *no hay nivel inviolable*; se piensa que tal nivel no existe porque está fuera de nuestra visión.

Una esquematización de esta imagen en su conjunto podría estar dada por una gigantesca selva de símbolos enlazados entre sí por enmarañadas líneas, semejantes a las enredaderas de una jungla tropical: éste sería el nivel superior, la Jerarquía Enredada donde el pensamiento mismo fluye por todas partes; es el elusivo nivel de la *mente*, lo análogo a MI y MD. Por debajo, en esta representación, y en analogía con Escher como invisible "causante primero", estarían figuradas las miríadas de neuronas —el "sustrato inviolable"— que hacen posible la existencia del entremezclamiento superior. Es interesante la circunstancia de que este nivel inferior es, a su vez, un entremezclamiento, en términos literales: miles de millones de células y centenares de miles de millones de axones, reunidos en un todo.

Se trata de un caso llamativo, el presente, donde un enmarañamiento software, el de los símbolos, se sustenta en un enmarañamiento hardware, el de las neuronas. Pero únicamente el enmarañamiento simbólico es una Jerarquía Enredada; el neural es sólo un enmarañamiento "simple". La distinción es casi la misma que la establecida en el Capítulo XVI, entre Bucles Extraños y retroalimentación. Una Jerarquía Enredada aparece cuando lo que se suponía una serie de niveles nítidamente jerárquicos nos da la sorpresa de cerrarse sobre sí misma, de una manera que viola el principio jerárquico. El elemento de sorpresa es importante, y es por ello que llamo "extraños" a estos Bucles. Un enredamiento simple, como el que presenta la retroalimentación, no implica la transgresión de la distinción de niveles que se ha dado por supuesta; un ejemplo nos lo brinda la

situación común de lavarse el brazo izquierdo con el derecho, y viceversa, cuando se está en la ducha; no hay ninguna extrañeza en esta imagen. ¡Por algo es que Escher optó por dibujar manos que dibujan manos!

Hechos tales como un par de brazos que se lavan entre sí ocurren en el mundo a cada momento, y no vemos en ellos nada de particular. Yo le digo algo a un interlocutor, y éste me responde algo a mí; ¿es paradójico esto? No: las percepciones de uno con respecto al otro no involucran una jerarquía prexistente, de modo que de aquí no surge ningún sentido de extrañeza.

Por otro lado, el lenguaje origina bucles extraños cuando habla de sí mismo, sea directa o indirectamente. En este caso, algo *interior* al sistema brinca hacia afuera y actúa *sobre* el mismo, como si fuera *exterior* a éste. Lo que nos perturba aquí quizá sea un sentido mal definido de la inexactitud topológica: la distinción interior-exterior es borrada, como en la célebre configuración llamada "botella de Klein"; aun cuando el sistema sea una abstracción, nuestra mente apela a la imaginación espacial, con la ayuda de una suerte de topología mental.

Volviendo al enredamiento simbólico: si concentramos nuestra atención en él, y olvidamos el enredamiento neural, creeremos estar en presencia de un objeto autoprogramado, exactamente igual que, si olvidamos la existencia de Escher, podemos dejarnos ganar por la ilusión de estar viendo, en *Manos dibujando*, un cuadro que se pinta a sí mismo. Es bastante inverosímil que esto ocurra con respecto a esa pintura, pero no lo es con respecto a los seres humanos, y al modo en que éstos analizan su mente. Los seres humanos nos *sentimos* autoprogramados. Es claro que no nos podemos sentir de otra manera, puesto que estamos aislados en relación con los niveles más bajos, esto es, en relación con el enredamiento neural. Nuestros pensamientos, aparentemente, circulan en el interior de su espacio propio, creando nuevos pensamientos y modificando los anteriores, y jamás nos percatamos de la contribución que nos están brindando nuestras neuronas . . . Pero es lo que era de esperar; no podemos hacer otra cosa.

Un double-entendre análogo puede ser observado en los programas LISP que han sido ideados para acceder a su propia estructura y modificarla. Si se los examina en el nivel LISP, uno diría que se modifican a sí mismos; pero si se eligen otros niveles para ubicar la perspectiva, y se considera a los programas LISP como datos para el intérprete LISP (véase Capítulo X), se verá que en realidad el único programa que está siendo procesado es el intérprete, y los cambios producidos no serán otra cosa que cambios en los grupos de datos. El intérprete LISP, por su parte, no es pasible de modificaciones.

El modo en que uno describa una situación enmarañada de este género depende de cuántos pasos retrospectivos se den antes de proceder a dicha descripción. Si se vuelve atrás lo suficiente, en la mayor parte de los casos quedarán a la vista las pistas que conduzcan a cosas desenmarañadas.

Bucles Extraños en el gobierno

Una área fascinante de enredamiento de jerarquías es el gobierno, particularmente las cortes de justicia. Por regla general, uno piensa que dos litigantes presentan su respectivo alegato ante la corte, y que ésta produce un fallo; la corte está ubicada en un nivel diferente al de los litigantes. Sin embargo, pueden suceder cosas extrañas cuando las cortes mismas se enmarañan en casos legales. De ordinario, hay un tribunal de nivel superior, ajeno al litigio. Inclusive cuando dos tribunales de inferior nivel se ven envueltos en alguna extraña pendencia, y cada uno de ellos reclama jurisdicción por encima del otro, hay algún tribunal de nivel superior que permanece exterior al enfrentamiento: en cierto sentido, esto es análogo a la interpretación inviolable de las convenciones, que comentamos líneas atrás, relativas al estrafalario ajedrez que imaginamos.

¿Pero qué ocurre cuando no hay tribunal superior, y la propia Corte Suprema se ve enmarañada en dificultades legales? Esta fue prácticamente la clase de embrollo que se produjo en el caso Watergate. El Presidente amenazó con obedecer exclusivamente un "dictamen definitivo" de la Corte Suprema. . . y luego sostuvo que él tenía derecho a decidir qué es "definitivo". La amenaza nunca fue cumplida; si lo hubiese sido, habría tenido lugar una monumental confrontación entre dos niveles de gobierno, cada uno de los cuales, en cierta medida, puede afirmar válidamente que está por "encima" del otro. . . ¿y a quién se debe recurrir para que determine cuál está en lo cierto? Responder "el Congreso" no resuelve el problema, pues si éste ordena al Presidente que obedezca a la Corte Suprema, el Presidente podría negarse, aduciendo que cuenta con el derecho legal de desobedecer a la Corte Suprema (¡y al Congreso!) bajo ciertas circunstancias. Esto crearía un nuevo litigio, ¡y desordenaría el sistema entero, por tratarse de algo tan imprevisto. . . tan Enredado. . . tan Extraño!
techo de esta manera, y de quedar consecuentemente impedidos de brincar fuera del sistema, en búsqueda de una autoridad aun más alta, a lo único que se puede apelar es a las fuerzas que impresionan como las más deficientemente definidas por reglas, pero que son la fuente exclusiva, a todas luces, de las reglas de más alto nivel: las reglas de nivel inferior, que en este caso equivalen a la reacción general de la sociedad. Bueno es recordar que, en sociedades como las nuestras, el sistema legal es, en cierto sentido, un gesto de urbanidad convenido colectivamente por millones de personas, y que puede ser dejado a un lado con la misma facilidad con que un río puede salirse de cauce. Se produciría entonces una aparente anarquía; sin embargo, la anarquía tiene su propio género de reglas, en forma similar a la sociedad civilizada, salvo que operan desde el fondo, no desde la cima. Un estudioso de la anarquía podría tratar de descubrir las reglas que gobiernan el desenvolvimiento de las situaciones anárquicas en el tiempo, y es muy probable que las encuentre.

En este punto, es útil la mención de una analogía que nos provee la física. Como ya se dijo con anterioridad, el equilibrio de los gases obedece a leyes simples que vinculan entre sí su temperatura, presión y volumen. No obstante, un gas puede violar esas leyes (tal como un Presidente puede violar otras), excepto dentro de un estado de equilibrio. En situaciones de no equilibrio, un físico que quiera describir lo que sucede puede recurrir tan sólo a la mecánica estadística, es decir, a un nivel de descripción que no es macroscópico, pues la explicación última del comportamiento de un gas se asienta siempre en el nivel molecular, así como la explicación última del comportamiento político de una sociedad se asienta siempre en el "nivel de las raíces de la nacionalidad". El campo de la termodinámica del no equilibrio se impone el hallazgo de leyes macroscópicas que describan el comportamiento de gases (y de otros sistemas) despojados de equilibrio: su término análogo es la rama de la ciencia política que busca cuáles son las leyes que gobiernan las sociedades anárquicas.

Otras raras marañas producidas en el seno del gobierno incluyen, por ejemplo, las investigaciones del FBI acerca de sus propias iniquidades, un alguacil que es enviado a la cárcel mientras sigue en funciones, la autoaplicación de las reglas parlamentarias de procedimiento, etc. Uno de los casos legales más curiosos de que tengo noticia involucró a una persona que afirmaba tener poderes psíquicos. En realidad, sostenía que era capaz de utilizar esos poderes para detectar rasgos personales y ayudar así a los abogados a seleccionar jurados. ¿Y qué ocurriría si este "vidente" fuera sometido a juicio alguna vez? ¿Qué efecto provocaría ello sobre un miembro del jurado que creyera fervientemente en la percepción extrasensorial? ¿En qué medida se sentiría afectado por el vidente (fuese éste un vidente auténtico o no)? El campo está listo para ser trabajado: una gran área para profecías autoejecutables.

Enredos que abarcan la ciencia y lo oculto

Ya que hablamos de videntes y de percepción extrasensorial, podemos citar otra esfera de la vida donde abundan los bucles extraños: la ciencia marginal; ésta se dedica a cuestionar gran parte de los procedimientos habituales y las creencias de la ciencia ortodoxa y a poner en discusión, por lo tanto, la objetividad científica. Propone entonces nuevas formas de interpretación de la evidencia, opuestas a las establecidas. Ahora bien, ¿cómo se evalúa una forma de interpretar la evidencia? ¿No se trata, otra vez, del problema de la objetividad, llevado ahora a un plano más elevado? Estamos de nuevo ante la paradoja carrolliana del retroceso infinito, bajo una máscara distinta. La Tortuga postularía que, si se quiere mostrar que A es un hecho, se requiere evidencia al respecto: B. Pero, ¿cómo estar seguros de que B es la evidencia de A? Para mostrar esto, se requiere una metaevidencia: C. Y, con respecto a la validez de la metaevidencia, se requiere una metametaevidencia, y así en más, *ad nauseam*.

A pesar de este razonamiento, la gente tiene un sentido intuitivo de la evidencia, y ello se debe —para repetir un antiguo refrán— a que tiene incorporado a su cerebro un hardware que incluye algunas formas rudimentarias de interpretar la evidencia. Podemos atenernos a éstas, y sumar nuevas formas de la misma interpretación; así sucede que, inclusive, aprendemos cómo y cuándo dejar a un lado nuestros principales mecanismos básicos de interpretación de evidencia: por ejemplo, cuando tratamos de resolver trucos mágicos.

Muchos fenómenos de ciencia marginal presentan muestras concretas de dilemas acerca de la evidencia. Por ejemplo, en muchas ocasiones, fuera de laboratorio, parecen producirse manifestaciones de percepción extrasensorial que, en laboratorio, se desvanecen misteriosamente. La explicación científica habitual de esto es que la percepción extrasensorial es un fenómeno irreal que no puede hacer frente a un escrutinio riguroso. Algunos creyentes (no *todos, por* cierto) de la percepción extrasensorial tienen una manera peculiar de presentar batalla. Dicen: "No, la percepción extrasensorial es real; sencillamente, ocurre que se hurta cuando se trata de observarla científicamente: es contraria a la naturaleza de la visión científica del mundo." Tenemos aquí una técnica sorprendentemente desenfadada, a la que podríamos denominar la técnica de "sacarse el problema de encima". Es decir, *en vez* de cuestionar el asunto que se tiene entre manos, se arrojan dudas sobre las teorías pertenecientes a un nivel superior de credibilidad. Quienes aceptan la percepción extrasensorial insinúan que lo erróneo no está en *sus* ideas, sino en el sistema de creencias de la ciencia, lo cual implica un reclamo un tanto rimbombante: a menos que resulte apoyado por una evidencia abrumadora, sería conveniente mantenerse escéptico a su respecto. Sin embargo, otra vez estamos hablando de "evidencia abrumadora", ¡como si todo el mundo estuviese de acuerdo acerca de lo que significa semejante cosa!

La naturaleza de la evidencia

El entrelazamiento Sagredo-Simplicio-Salviati, mencionado en los Capítulos XIII y XV, aporta otro ejemplo a propósito de las complejidades que presenta la evaluación de evidencia. Sagredo trata de hallar alguna avenencia, en lo posible, entre los opuestos puntos de vista de Simplicio y Salviati. *Pero no* siempre es factible una transacción. ¿Cómo se puede forjar, "imparcialmente", una avenencia entre lo correcto y lo erróneo? ¿Entre lo parcial y lo imparcial? ¿Entre avenencia y desavenencia? Estos interrogantes reaparecen en numerosas oportunidades, bajo la forma de apreciaciones relativas a cosas corrientes.

¿Es posible definir qué es la evidencia? ¿Es posible formular leyes que indiquen cómo *asignar* un sentido a las situaciones? Es probable que no, pues toda regulación rígida tendría, indudablemente, excepciones, y no

reglas. Contar con un programa IA inteligente tampoco resolvería el problema pues, en tanto que procesador de evidencia, no sería en absoluto menos falible que los seres humanos. Entonces, si después de todo la evidencia es algo tan intangible, ¿por qué estoy tan prevenido contra formas nuevas de interpretación de la misma? ¿Es que soy incoherente? No creo esto. Lo que pienso es que se pueden establecer pautas orientadoras, y luego elaborar síntesis orgánicas a partir de ellas. No obstante, será inevitable que ingrese a la escena cierta dosis de discernimiento y de intuición. . . cosas que son diferentes en cada persona. Y que también serán diferentes en cada programa IA. En última instancia, hay complicados criterios para decidir si un método de evaluación de evidencia es eficaz. Uno de ellos se refiere a la "utilidad" de las ideas que llevaron al tipo de razonamiento en cuestión: las modalidades de pensamiento que, en la vida, han conducido a la obtención de cosas útiles son consideradas, en algún sentido, "válidas". Con todo, este concepto de "útil" es sumamente subjetivo.

Creo que el proceso por el cual decidimos qué es válido o qué es verdadero constituye un arte, y que descansa a tal profundidad en un sentido de la belleza y de simplicidad que su asiento son los principios fundamentalmente básicos de la lógica, o del razonamiento o de cualquier otra cosa que pueda ser objetivamente formalizada. *No* estoy diciendo que (1) la verdad es una quimera, ni que (2) la inteligencia humana es, en principio, no programable. *Sí* estoy diciendo que (1) la verdad es demasiado elusiva como para que un ser humano o cualquier grupo de seres humanos la abarque nunca en su plenitud; y (2) la Inteligencia Artificial, cuando alcance el nivel de la inteligencia humana —y también si lo sobrepasa— se verá saturada de problemas relativos al arte, la belleza y la simplicidad, y se estrellará constantemente contra estas cosas mientras ejercita su propia búsqueda de conocimiento y comprensión.

"¿Qué es la evidencia?" No es solamente un interrogante filosófico, pues lo encontramos en todos los ámbitos de la vida. Uno se enfrenta, a cada momento, con un extraordinario número de distintas elecciones posibles en cuanto a cómo interpretar la evidencia. Es casi imposible no ver en cualquier librería (y, en la actualidad, ¡en cualquier supermercado, inclusive!) obras sobre clarividencia, percepción extrasensorial, ovnis, el Triángulo de las Bermudas, astrología, rabdomancia, psicoalfacontrol, agujeros negros, creación contra evolución, biorretroalimentación, meditación trascendental, nuevas teorías psicológicas. . . En el campo de la ciencia, presenciamos enconados debates acerca de la teoría de la catástrofe, de la referente a las partículas elementales, de los agujeros negros, del problema de la verdad y la existencia en matemática, del libre albedrío, de la Inteligencia Artificial, de la oposición reduccionismo-holismo. . . En un sector más pragmático de la vida, hay polémicas en torno a la eficacia de la vitamina C, al volumen de las reservas petrolíferas (naturales y almacenadas), a las causas de la inflación y del

desempleo, etc., etc. Hay antipsiquiatría, budismo zen, paradojas de Zenón, psicoanálisis, y tantos y tantos temas más. . . Desde los más triviales, como por ejemplo la manera en que las tiendas deben disponer los libros que venden, hasta los más vitales, como por ejemplo el de cuáles son las ideas que han de ser enseñadas a los niños en las escuelas, en todos los temas, los medios para interpretar la evidencia juegan un papel sustancial.

Qué vemos en nosotros mismos

Uno de los problemas más difíciles en materia de interpretación de evidencia es el que se plantea cuando se intenta determinar quiénes somos, a partir de la interpretación de la totalidad de las confusas señales exteriores. Las posibilidades, en este caso, de conflictos entre niveles, e interiores a cada nivel, son enormes. Los mecanismos psíquicos tienen que habérselas, simultánoamente, con la necesidad interna de autoestimación y con el constante flujo de evidencia, proveniente del exterior, que afecta tal imagen. El resultado es que la información fluye, a través de un complejo remolino, entre los diversos niveles de la personalidad; conforme gira el torbellino, algunas de sus partes se ven magnificadas, reducidas, negadas o, como sea, distorsionadas; luego, se van amoldando de nuevo a la misma especie de remolino, y así una y otra vez. . . todo ello en procura de reconciliar lo que es con lo que desearíamos que fuera (véase figura 81).

Finalmente, la imagen total de "quién soy" es incorporada, de alguna manera enormemente compleja, dentro del conjunto de la estructura mental, y contiene una gran cantidad de incoherencias irresueltas o , probablemente, irresolubles. De aquí proviene, con toda seguridad, gran parte de la tensión dinámica que integra de modo tan significativo al ser humano. La tensión entre las nociones interiores y las exteriores sobre quiénes somos da origen a las diversas orientaciones hacia determinados objetivos, y ello es lo que hace algo único de cada uno de los seres humanos. Así, paradójicamente, un elemento que todos tenemos en común —el hecho de ser criaturas autorreflexivas— conduce a una rica diversidad en cuanto a las maneras en que internalizamos la evidencia relativa a todo género de cosas, y acaba por ser una de las fuerzas más vigorosas en la plasmación de individualidades diferenciadas.

EL Teorema de Gödel y otras disciplinas

Es natural que surja la pretensión de trazar paralelos entre las personas y aquellos sistemas formales lo suficientemente elaborados como para que, igual que los seres humanos, cuenten con "autoimágenes" de la especie comentada. El Teorema de Gödel muestra que los sistemas formales

coherentes, dotados de autoimagen, padecen de limitaciones fundamentales. ¿Tiene una extensión más amplia esta situación? ¿Existe un "Teorema de Gödel de la psicología", por ejemplo?

Si se emplea el Teorema de Gödel como una metáfora, como una fuente de inspiración, en lugar de empeñarse en su traducción literal al lenguaje de la psicología o de cualquier otra disciplina, quizá se conseguiría la aparición de nuevas propuestas en estos campos del saber. Ahora bien, carece de todo fundamento practicar la traducción directa del Teorema a enunciados de otra disciplina, y considerar que éstos son válidos. Es un error enorme pensar que los resultados obtenidos, gracias a una notable dedicación, en la esfera de la lógica matemática, pueden ser manejados sin modificación en el interior de esferas completamente diferentes.

Introspección e insania: un problema gödeliano

Pienso que puede ser sumamente interesante la traducción del Teorema de Gödel a otros ámbitos, a condición de dejar especificado en forma previa que la traducción es metafórica, y que no se proyecta una equivalencia literal. Dicho esto, agrego que, a mi entender, hay dos vías sobresalientes de utilización de analogías que conecten al Teorema de Gödel con los pensamientos humanos; una nos orienta hacia la cuestión de interrogarnos acerca de nuestra propia cordura: ¿cómo determino que estoy cuerdo? Se trata, por cierto, de un Bucle Extraño. Si uno comienza a indagarse a propósito de la propia cordura, puede quedar atrapado en una vorágine cada vez más intensa de profecías autoejecutables, aunque este proceso no sea, en absoluto, inevitable. Todos sabemos que el insano interpreta al mundo con arreglo a su lógica, la cual es coherente de un modo peculiar; ¿y cómo establecemos si nuestra propia lógica es "peculiar" o no, puesto que no tenemos más que esa misma lógica propia para juzgarnos? No tengo respuesta frente a esto, y me limito entonces a recordar el segundo Teorema de Gödel, según el cual las únicas versiones de teoría formal de los números que afirman su propia coherencia son incoherentes. . .

¿Podemos comprender nuestras propias mentes y nuestros propios cerebros?

Otro desprendimiento metafórico del Teorema de Gödel dotado, según creo, de provocatividad intelectual, sugiere que, en último término, no podemos comprender nuestras propias mentes/cerebros. Esta idea tiene tanta amplitud y tantos niveles posibles que se debe ser muy cauto al proponerla. ¿Qué significa "comprender nuestras propias mentes/ cerebros"? Podría tratarse de contar con una noción general acerca de cómo funcionan, tal como la noción que tiene un mecánico acerca del funciona-

miento de un automóvil. Podría tratarse de una explicación completa de por qué los seres humanos hacen todas y cada una de las cosas que hacen. Podría tratarse de tener una comprensión completa de la estructura física del propio cerebro, en todos los niveles. Podría tratarse de disponer de un diagrama completo de la distribución cerebral, mostrada en un libro (ya en una biblioteca, ya en una computadora). Podría querer decir que se conoce con precisión, en todo momento, qué está sucediendo en el nivel neural de nuestro cerebro: cada excitación, cada alteración sináptica, etc. Podría querer decir que se ha formulado un programa que aprueba la verificación Turing. Podría querer decir que nuestro autoconocimiento es tan perfecto que nociones tales como la de subconciencia e intuición carecen de sentido, porque todo ha quedado a la vista. Podría significar una multitud de otras cosas.

¿Cuál de estos autorreflejos, si es que hay alguno que lo consigue, tiene mayor semejanza con el autorreflejo del Teorema de Gödel? Yo tengo dudas al respecto; algunos son sumamente disparatados, como por ejemplo la posibilidad de registrar el propio estado cerebral en todos sus detalles: esto es una ilusión, una propuesta absurda y falta de interés para ser tenida en cuenta ahora; y, si el Teorema de Gödel sugiere que es algo imposible, mal podemos tomarla como una revelación. En cambio, la ancestral preocupación de conocerse a sí mismo de una manera profunda —llamémosle "comprender la propia estructura psíquica"— tiene un aura de verosimilitud. Sin embargo, ¿no habrá algún bucle vagamente gödeliano que limite la profundidad hasta la cual puede penetrar en su propia psique un individuo? No podemos vernos la cara con nuestros propios ojos, ¿no será razonable entonces que, del mismo modo, no podamos reflejar nuestras estructuras mentales completas en los símbolos que éstas elaboran?

Todos los teoremas limitativos de la metamatemática y de la teoría de la computación insinúan que, una vez alcanzado determinado punto crítico en la capacidad de representar nuestra propia estructura, llega el momento del beso de la muerte: se cierra toda posibilidad de que podamos representarnos alguna vez a nosotros mismos en forma integral. El Teorema de la Incompletitud, de Gödel; el Teorema de la Indecidibilidad, de Church; el Teorema de la Detención, de Turing; el Teorema de la Verdad, de Tarski: todos ellos tienen las resonancias de ciertos antiguos cuentos de hadas, advirtiéndonos que "perseguir el autonocimiento es iniciar un viaje que. . . nunca estará terminado, no puede ser trazado en un mapa, nunca se detendrá, no puede ser descripto".

Ahora bien, ¿los seres humanos aceptan los Teoremas limitativos? Tenemos aquí una vía de refutación. O soy coherente o soy incoherente. (Esto último es lo más probable, pero en beneficio de la completitud voy a tomar en cuenta ambas posibilidades.) Si soy coherente, tendremos dos variantes, (1) la de "baja fidelidad": mi autocomprensión está por debajo de un determinado punto crítico; en tal caso, soy incompleto, por hipótesis; (2) la de "alta fidelidad": mi autocomprensión ha alcanzado el punto

crítico donde le cabe la aplicación metafórica de los Teoremas limitativos, de modo que mi autocomprensión socava sus propios cimientos de una manera gödeliana, y resulto incompleto, por tal razón. Las variantes (1) y (2) son aseveraciones relativas a mi ser ciento por ciento coherente, supuesto realmente muy improbable; lo más creíble es que yo sea incoherente, lo cual es peor, pues significa que en mi interior hay contradicciones, ¿y entonces cómo puedo comprender alguna vez tal cosa?

Coherente o incoherente, nadie escapa al misterio del yo. Probablemente, todos seamos incoherentes; el mundo es demasiado complicado como para que una persona pueda darse el lujo de conciliar entre sí todas sus creencias individuales. Además, tensión y confusión son importantes en un mundo donde deben adoptarse muchas decisiones rápidas. Dijo una vez Miguel de Unamuno: "Si una persona no se contradice nunca, ha de ser porque no dice nada." Yo diría que todos estamos en el mismo barco de aquel maestro Zen que, después de contradecirse varias veces consecutivas, dijo al confundido Doko: "Yo no puedo comprenderme a mí mismo."

El Teorema de Gödel y la no existencia personal

Quizá la mayor contradicción que afrontamos en nuestra existencia, la más ardua de asimilar, consista en saber que "hubo un tiempo en que yo no estaba vivo, y llegará un tiempo en que yo no esté vivo". En un nivel, cuando "brincamos fuera de nosotros mismos" y nos vemos simplemente "como otro ser humano", ello adquiere pleno sentido. Sin embargo, en otro nivel, tal vez más profundo, la no existencia personal carece de todo sentido. Todo lo que sabemos está integrado a nuestra mente, y por ende todo lo que no esté en el universo carece de comprensibilidad. Se trata de un innegable problema básico de la vida; y, posiblemente, el de mayor proximidad metafórica con respecto al Teorema de Gödel. Cuando tratamos de imaginar nuestra no existencia, hacemos la prueba de brincar fuera de nosotros mismos, proyectándonos en algún otro. Nos ilusionamos creyendo que podemos implantar en nuestro interior una perspectiva externa acerca de nosotros mismos, tal como TNT "cree" que refleja su propia metateoría en el interior de sí mismo. Pero TNT contiene su propia metateoría únicamente en una cierta medida, no en forma completa; en cuanto a nosotros, aunque imaginemos que hemos podido brincar fuera de nosotros mismos, en realidad jamás podemos hacerlo. . . nos pasa como al dragón de Escher, con su pretensión de brincar fuera de su originario plano bidimensional para alcanzar la tridimensionalidad. Como quiera que sea, esta contradicción es tan grande que, durante la mayor parte de nuestra existencia, hacemos como si no la viéramos, pues afrontarla no nos conduce a ninguna parte.

Las mentes zen, por su parte, se complacen en esta inconciliabilidad. Una y otra vez, arrostran el conflicto entre la creencia oriental: "El mun-

do y yo somos uno, de modo que la noción de interrupción de mi existencia es una contradicción en los términos" (pido disculpas a los adeptos al zen por esta verbalización sin duda excesivamente occidental), y la creencia de este último cuño: "No soy más que una parte del mundo, y he de morir, y el mundo seguirá andando sin mí."

Ciencia y dualismo

La ciencia recibe a menudo la crítica de ser demasiado "occidental" o "dualista", esto es, de encontrarse bajo la influencia de la dicotomía entre sujeto y objeto, o entre observador y observado. Efectivamente, hasta los comienzos de este siglo la ciencia se abocó en forma exclusiva a fenómenos que pudiesen ser distinguidos nítidamente de su observador humano: el oxígeno y el carbono, la luz y el calor, las estrellas y los planetas, aceleraciones y órbitas, etc. Esta fase fue un prólogo necesario a otra más moderna, donde la ciencia pone a la vida misma como objeto de investigación. Paso a paso, inexorablemente, la ciencia "occidental" ha ido avanzando hacia el estudio de la mente humana, lo cual equivale a decir del observador. Las indagaciones en materia de Inteligencia Artificial son el paso más reciente dado en esta ruta. Antes de la aparición de la Inteligencia Artificial en la escena, hubo dos antecedentes principales en cuanto al análisis de las curiosas consecuencias, en el campo científico, emanadas de la confusión entre sujeto y objeto. Uno consistió en la revolución de la mecánica cuántica, con su problemática epistemológica de interferencia del observador con respecto a lo observado. El otro radicó en la yuxtaposición de sujeto y objeto en metamatemática, primero a través del Teorema de Gödel y luego de otros Teoremas limitativos, a los que hemos hecho alusión. Tal vez el paso posterior al de IA sea el autoabocamiento de la ciencia: la ciencia aplicada a sí misma como objeto de estudio, lo cual significa una manera diferente de entremezclar sujeto y objeto: una manera pasible, quizá, de enredamientos mayores de los que resultan del estudio de la mente por los seres humanos mismos.

Ya que estamos, es interesante hacer notar que todas las conclusiones esencialmente subordinadas a la fusión de sujeto y objeto han sido de tipo limitativo. Además de los Teoremas limitativos, tenemos el principio de incertidumbre, de Heisenberg, según el cual la medición de una cantidad hace imposible la medición simultánea de una cantidad relacionada. Ignoro por qué todos estos resultados son limitativos; interprételo el lector como mejor le parezca.

Símbolo *vs.* objeto en la música y el arte modernos

La dicotomía sujeto-objeto se vincula estrechamente con la dicotomía símbolo-objeto, explorada en profundidad por Ludwig Wittgenstein du-

rante el primer tramo de este siglo. Más adelante, fueron adoptadas las palabras "uso" y "mención" para señalar esa misma distinción. Quine y otros, por su parte, se dedicaron extensamente a la conexión existente entre los signos y lo que éstos representan.

No solamente los filósofos se han ocupado con intensidad de esta profunda y abstracta cuestión. En nuestro siglo, tanto la música como el arte han atravesado por crisis que reflejan una honda preocupación por este problema. La música y la pintura, por ejemplo, tradicionalmente han expresado ideas o emociones mediante un vocabulario de símbolos (imágenes visuales, acordes, ritmos o elementos por el estilo); en cambio, presenciamos ahora una tendencia a explorar la capacidad de la música y del arte para *no* expresar cosa alguna, sino para limitarse a *ser*. Esto es, existir como pura pincelada, o como sonido puro, despojados de todo valor simbólico.

En música, en particular, John Cage ha alcanzado gran influencia como elaborador de una manipulación con reminiscencias zen de los sonidos. Muchas de sus composiciones transmiten un desdén por el "uso" de los sonidos —es decir, por el uso de sonidos que comuniquen estados emocionales— al propio tiempo que una regocijada "mención" de sonidos: es decir, una mezcla de yuxtaposiciones arbitrarias de sonidos, fuera de todo encuadramiento en un código previamente formulado que permitiera al oyente decodificar un mensaje. Un ejemplo típico es el "Imaginary Landscape no. 4", la obra polirradio descripta en el Capítulo VI. No puedo hacer una evaluación íntegra de la obra de Cage, pero creo que gran parte de la misma ha estado dirigida a introducir la no significación en la música y, en algún sentido, a conseguir que tal no significación tenga significado. La música aleatoria se caracteriza por incursionar en esta dirección. (Dicho al margen, la música azarosa es pariente cercana de las muy posteriores nociones de "happening" o de "be-in".) Muchos otros compositores contemporáneos han seguido los pasos de Cage, pero pocos de entre ellos han sido igualmente originales. Una composición de Anna Lockwood, llamada "Piano Burning", consiste tan sólo en hacer restallar, con la mayor fuerza posible, cuerdas previamente estiradas al máximo; en una pieza de La Monte Young, los sonidos son obtenidos empujando el piano por todo el escenario y arremetiendo contra obstáculos con él, como si fuese un ariete.

El arte de nuestro siglo ha experimentado muchas convulsiones de índole parecida. Al comienzo fue el abandono de la representación, lo cual tuvo carácter auténticamente revolucionario, pues significó el nacimiento del arte abstracto. La obra de Piet Mondrian muestra un deslizamiento gradual desde la representación pura hasta las configuraciones más acabadamente abstractas. Después de que el mundo se hubo habituado al arte no representativo, apareció el surrealismo. Constituyó un sorprendente giro de ciento ochenta grados, algo así como el neoclasicismo musical: en el surrealismo, el arte extremadamente representativo fue

"subvertido" y utilizado en función de motivos enteramente distintos: para sobresaltar, confundir, maravillar. Esta escuela fue fundada por André Breton, y se localizó originariamente en Francia; algunos de sus miembros más conocidos fueron Dalí, Magritte, de Chirico, Tanguy.

Las ilusiones semánticas de Magritte

De todos estos artistas, el más consciente del misterio símbolo-objeto fue Magritte (misterio que yo veo como una profunda extensión de la distinción uso-mención). Aquél la emplea para despertar respuestas intensas en los espectadores, aun cuando éstos no verbalicen dicha distinción de la manera citada. Consideremos, por ejemplo, su variación verdaderamente extraña del tema de la naturaleza muerta, cuyo título es *Sentido común* (figura 137). Vemos aquí una fuente con frutas, la clase de cosa ordinariamente representada en una naturaleza muerta, puesta encima de un cuadro en blanco. El conflicto entre el símbolo y lo real es notorio. Pero no acaba aquí la ironía, pues naturalmente todo el conjunto no es por sí mismo sino una pintura: en realidad, una naturaleza muerta con un tema no habitual.

La serie de cuadros de Magritte con imágenes de pipas crea fascinación y perplejidad. En *Los dos misterios* (figura 138), si nos circunscribimos a observar la pintura interior, recogemos el mensaje de que los símbolos y las pipas son diferentes. Luego, nuestra mirada se dirige hacia la pipa "real" que flota en el aire, más arriba, y advertimos que es real, mientras

Figura 137. Sentido común, *de René Magritte (1945-46).*

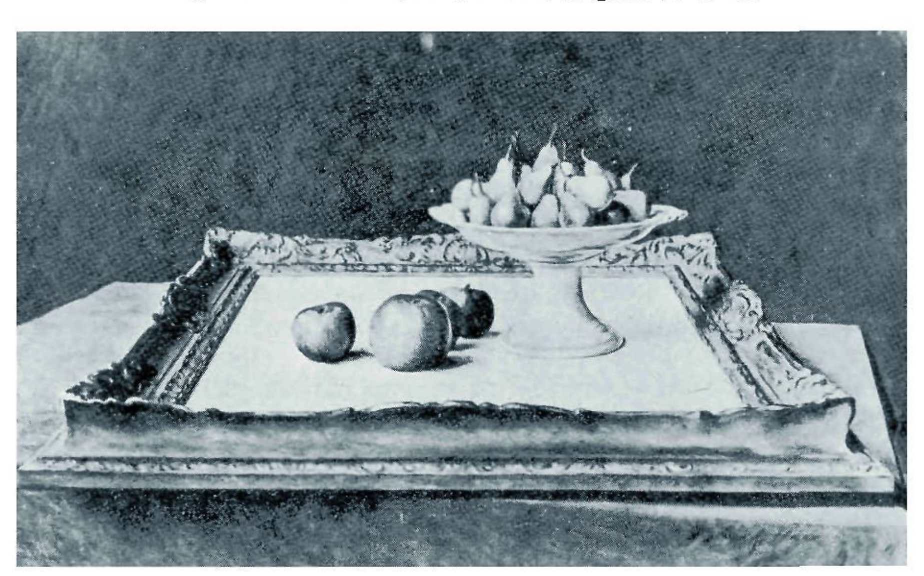




Figura 138. Los dos misterios, *de René Magritte (1966).*

que la otra es sólo un símbolo. Sin embargo, esto es, por supuesto, totalmente erróneo: ambas yacen sobre la misma superficie plana que tenemos ante los ojos. La idea de que una de las pipas está en una pintura dos veces autoincluida, y por lo tanto es, en alguna medida, "menos real" que la otra, es enteramente una falacia. Una vez que nos hemos dispuesto a "ingresar a la habitación", ya caímos en la trampa: hemos tomado como real la imagen. Para ser coherentes con nuestra credulidad, deberemos descender gozosamente un nivel, y confundir la imagen-dentro-de-la-imagen con la realidad. La única forma de no ser arrastrados de este modo es ver ambas pipas como simples manchas coloreadas sobre una superficie ubicada a pocos centímetros enfrente de nuestra nariz. Entonces, y exclusivamente entonces, apreciaremos la significación total del mensaje escrito: "Ceci n'est pas une pipe". . . paradójicamente, sin embargo, en el instante mismo en que todo se transforma en manchas, también lo hace la inscripción, ¡y por lo tanto pierde su significación! En otras palabras: en ese instante, el mensaje verbal del cuadro se autodestruye, de una manera sumamente gödeliana.

El aire y la canción (figura 82), tomado de una serie de Magritte, logra en un nivel lo que *Los dos misterios* logra en dos. Mis dibujos *Señal de hu-*

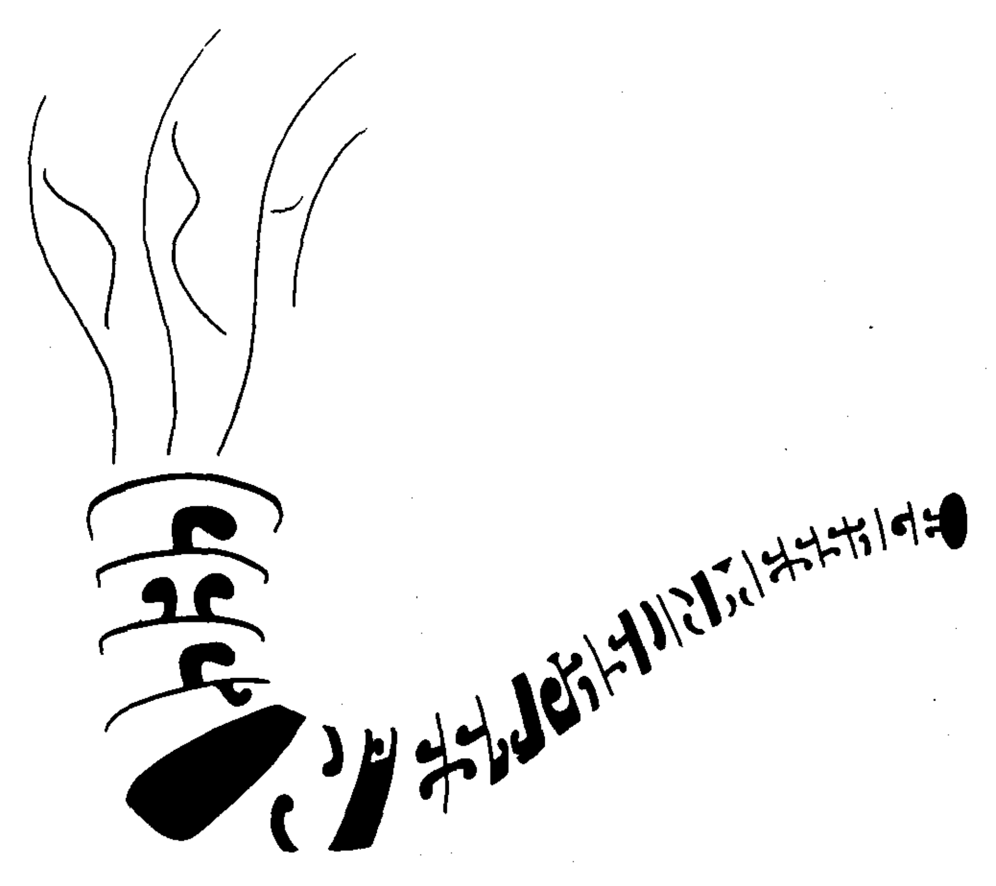


Figura 139. Señal de humo. [*Dibujo del autor.*]

mo e *Ilusión** (figuras 139 y 140), constituyen "Variaciones sobre un tema de Magritte". Haga la prueba el lector de observar atentamente *Señal de humo* durante unos instantes; pronto, estará en condiciones de descifrar un mensaje oculto que reza: "Ceci n'est pas un message". Así, si el lector descubre el mensaje, se encontrará con que éste se niega a sí mismo; pero si no lo descubre, es porque erró por completo el blanco. Debido a su indirecta autoabsorción, mis dos imágenes pueden ser hechas corresponder —de modo no muy estricto— con la G de Gödel, lo cual dará origen a un "Correspompipa Central", dentro del mismo espíritu de otros "Correspon-X Centrales": Perro, Cangrejo, Perezoso.

Un ejemplo clásico de la confusión uso-mención en pintura lo brinda la presencia de una paleta en un cuadro. En tanto la paleta es una ilusión creada por la capacidad representativa del pintor, los colores de la paleta pintada son, literalmente, manchones de pintura extraídos de la paleta de aquél. Los colores actúan por sí mismos: no simbolizan ninguna otra

* "Smoke Signal" y "Pipe Dream", en inglés. Este último título, que incluye la palabra *pipe* = *pipa*, es una expresión idiomática que significa *ilusión, sueño, fantasía*. [T.]



Figura 140. Ilusión. [*Dibujo del autor.*]

cosa. En *Don Giovanni,* Mozart explotó un recurso parecido: introdujo explícitamente en la partitura el sonido de una orquesta afinando. De modo similar, si quiero que la letra 'a' actúe por sí misma (y no que simbolice la primera letra del alfabeto ni la preposición *a*), incluyo 'a' directamente en mi texto; luego la encierro entre comillas, de lo cual resultará: "a" (ni 'a', ni tampoco "'a'"). ¿Está claro?

El "código" del arte moderno

Un amplio número de influencias, que nadie podría detallar con precisión, generaron nuevas indagaciones, en el campo del arte, del dualismo símbolo-objeto. No hay duda de que John Cage, movido por su interés en el zen, gravitó profundamente tanto en la plástica como en la música. También sus amigos Jasper Johns y Robert Rauschenberg exploraron la distinción entre objetos y símbolos mediante el empleo de objetos que actuasen como símbolos de sí mismos, o, a la inversa, haciendo que los símbolos actuasen como objetos en sí mismos. Quizá todo esto fue ensayado para destruir la noción de que el arte está situado un paso más lejos de la realidad, razón por la cual habla en "código", lo que obliga al espectador a actuar como intérprete. La idea consistió en eliminar ese paso interpretativo y dejar al desnudo al objeto para que, simplemente, *sea,*

punto. ("Punto": un curioso caso de entremezclamiento uso-mención.) Sin embargo, si tal fue la intención, resultó un fracaso monumental, y así debió ser, tal vez.

Toda vez que un objeto es exhibido en una galería, o recibe el calificativo de "obra", adquiere una aura de profunda significación interior, por mucho que el espectador haya sido advertido en el sentido de que *no* busque significación. En realidad, se produce un efecto de retroceso en virtud del cual, cuanto más se insiste al espectador que observe estos objetos despojándose de toda perplejidad, más se le acrecienta esta última. A fin de cuentas, si un viejo cajón de embalaje apoyado en el piso de un museo es sólo un viejo cajón de embalaje apoyado en el piso de un museo, ¿por qué no viene el portero y se lo lleva, para amontonarlo con las restantes cosas de esa clase? ¿Por qué se le ha asociado el nombre de un artista? ¿Por qué ese terrón de tierra, ahí enfrente, no está también rotulado con el nombre de un artista? ¿Todo se trata de un fraude? ¿Estoy loco yo, o están locos los artistas? Más y más preguntas se acumulan en la mente del espectador, y no puede hallar la respuesta. Se trata del "efecto marco" que el arte —el Arte— crea en forma automática. No hay manera de suprimir las interrogaciones en el ánimo del curioso.

Por supuesto, si el propósito es infundir una visión de tipo zen del mundo, en tanto que desprovista de categorías y de significaciones, quizá este arte deba ser encaminado, entonces —en función de su papel intelectualizador del zen—, para que induzca catalíticamente en el espectador la tendencia a marchar hacia el conocimiento de la filosofía que rechaza las "significaciones interiores" y abarca al mundo en su conjunto. En tal caso, el arte es autodestructivo en el corto plazo, puesto que los espectadores *sí* estudian sus significaciones, pero este interés lo satisfacen unas pocas personas en el largo plazo, gracias a que son introducidas en las fuentes de esta modalidad artística. En este otro caso, luego, no es cierto que no exista un código que subyazca a las ideas transmitidas al espectador. En rigor de verdad, el código reside en algo aun mucho más complejo, y consiste en enunciados acerca de la ausencia de códigos, y cosas por el estilo: es decir, en parte es código, en parte es metacódigo, etc. Hay una Jerarquía Enredada en los mensajes que comunica la mayor parte de los objetos del arte de inspiración zen: tal vez sea ésta la razón por la cual tanta gente encuentre muy inescrutable el arte moderno.

Otra vez el Ismo

Cage ha encabezado un movimiento dirigido a anular los límites entre arte y naturaleza. En música, la noción correspondiente es que todos los sonidos son iguales: una especie de democracia acústica. Así, el silencio tiene exactamente la misma importancia que los sonidos organizados. Le-



Figura 141. La condición humana I, *de René Magritte (1933).*

onard B. Meyer, en su libro *Music, the Arts, and Ideas*, ha denominado "trascendentalismo" a este movimiento musical, y afirma:

> Si la distinción entre arte y naturaleza es errónea, la evaluación estética carece de pertinencia. No hay mayor fundamento para juzgar una sonata para piano que para juzgar una piedra, un trueno o una estrella de mar. "Los enunciados categóricos tales como correcto e incorrecto, bello y feo, típicos del pensamiento racionalista de la estética tonal", escribe Luciano Berio [un compositor contemporáneo], "ya no son útiles para comprender por qué ni cómo un compositor actual trabaja con las formas audibles y la acción musical".

Más adelante, Meyer expone la posición filosófica del trascendentalismo:

> . . . Todas las cosas, en todo tiempo y espacio, están inextricablemente conectadas entre sí. Todas las divisiones, clasificaciones y distribuciones asignadas al universo son arbitrarias. El mundo es un acontecimiento complejo, continuo y único.[2] (¡Remembranzas de Zenón!)

Creo que "trascendentalismo" es una denominación excesivamente abultada para este movimiento. En su lugar, yo lo llamaría "ismo". Tratándose de un sufijo sin prefijo, sugiere una ideología sin ideas, lo cual, pese a lo que pueda interpretar el lector, quizá sea el caso. Y, puesto que "ismo" abarca lo que sea que fuere, es una denominación perfectamente adecuada. En "ismo" la palabra "is"* está a medias mencionada, a medias usada; ¿cuál de ambas variantes sería la más adecuada? Ismo es el espíritu del zen en el campo del arte; y, así como el objetivo central del zen es el desenmascaramiento del yo, el problema central del arte de nuestro siglo parece ser el descubrimiento de qué es el arte mismo. Todos estos estremecimientos son parte de su crisis de identidad.

Ya hemos visto que la dicotomía uso-mención, cuando es desarrollada, se transforma en el problema filosófico del dualismo símbolo-objeto, el cual, a su vez, se vincula con el misterio de la mente. A propósito de su cuadro *La condición humana I* (figura 141), Magritte escribió:

> Frente a una ventana, vista desde el interior de una habitación, coloqué una pintura que representaba exactamente la parte del paisaje que quedaba oculta por la propia pintura. En consecuencia, el árbol representado impide la visualización del árbol ubicado detrás suyo, fuera de la habitación. Por así decir, el árbol existe de dos formas simultáneas en la mente del espectador: dentro del cuarto, en la pintura, y fuera del cuarto, en el paisaje real. Y esto se asemeja a la manera en que vemos el mundo: lo consideramos exterior a nosotros, pese a que no es sino una representación mental de nuestras experiencias internas.[3]

[2] Leonard B. Meyer, *Music, The Arts, and Ideas*, pp. 161, 167.

* *Is* = *es*; *ism* = *ismo*. [T.]

[3] Suzi Gablik, *Magritte*, p. 97.

Primero a través de las fecundas imágenes de sus cuadros, y después con sus propias palabras, Magritte asienta la vinculación entre estas dos preguntas: "*¿Cómo actúan los símbolos?*" y "¿Cómo actúa nuestra mente?" De este modo, nos devuelve al interrogante ya planteado: "¿Podemos confiar en comprender alguna vez nuestra mente/cerebro?"

¿O habrá alguna proposición gödeliana fantásticamente diabólica que nos impida, *por siempre*, *desenmarañar nuestras mentes*? A condición de que no adoptemos una definición totalmente irrazonable de "comprensión", no veo obstáculo gödeliano alguno en el camino hacia el logro de esa comprensión. Por ejemplo, me parece sumamente razonable el afán de comprender *los principios del funcionamiento* del cerebro, en general, en una forma análoga al modo en que comprendemos, en general, los principios de funcionamiento de los vehículos a motor. Esto difiere por completo del intento de comprender un cerebro individual hasta el último detalle, ¡dejemos esto a cargo de *nuestro propio* cerebro! No veo cómo el Teorema de Gödel, pese a lo insuperablemente resbaladizo de su construcción, tenga nada que decir a propósito de la practibilidad de aquel proyecto. No veo razón alguna para que el Teorema de Gödel imponga limitaciones a nuestra capacidad de *formular y verificar* la presencia de mecanismos generales, responsables de que los procesos del pensamiento tengan lugar en el ámbito de las células nerviosas. No veo que el Teorema de Gödel imponga barreras a la instrumentación, a través de computadoras (o sus sucesoras), de modalidades de *manipulación de símbolos* que logren, aproximadamente, los mismos resultados que logra el cerebro.

Otra cuestión, completamente distinta, es la de esforzarse por duplicar, en un programa, determinada mente humana en particular; sin embargo, producir un programa inteligente no es, *en absoluto, un objetivo* más limitado. El Teorema de Gödel no nos impide reproducir nuestro propio nivel de inteligencia mediante la utilización de programas, así como no nos impide la reproducción de nuestro nivel de inteligencia propio mediante la información hereditaria contenida en el ADN, *seguida por* la educación. Hemos visto en el Capítulo XVI, ciertamente, cómo un notable mecanismo gödeliano —el Bucle Extraño de las proteínas y del ADN— ¡es precisamente lo que permite la transmisión de la inteligencia!

¿El Teorema de Gödel, entonces, no tiene absolutamente nada que aportar con respecto al estudio de nuestra mente? Creo que sí, aunque no en la forma mística y limitativa que alguna gente cree. Creo que el proceso de arribar a la comprensión de la demostración de Gödel, con su construcción que abarca códigos arbitrarios, isomorfismos complejos, niveles altos y bajos de interpretación, y la capacidad de autorreflejo, puede insuflar ciertas resonancias y corrientes subterráneas dentro de un conjunto de imágenes relativas a los símbolos, y a su procesamiento, que harán po-

sible la profundización de las intuiciones referidas a las relaciones existentes entre las estructuras mentales de los diferentes niveles.

¿Inexplicabilidad accidental de la inteligencia?

Antes de proponer una curiosa "aplicación" filosófica de la demostración de Gödel, me gustaría traer a colación la idea de la "inexplicabilidad accidental" de la inteligencia. Se la puede expresar así: quizá nuestro cerebro, a diferencia de los vehículos a motor, sea un sistema inabordable y cerrado, imposible de descomponer nítidamente en partes separadas. En la actualidad, no sabemos si el cerebro se prestará a la realización de repetidos intentos de seccionarlo en estratos claramente discernibles, cada uno de los cuales pueda ser explicado en función de los estratos inferiores; tampoco sabemos si, por el contrario, rechazará todos nuestros ensayos de fraccionamiento.

Pero aun cuando fracasemos en nuestro empeño de comprendernos a nosotros mismos, no es necesario pensar que ello se debe a algún "retorcimiento" gödeliano, influyendo desde las sombras; la insuficiencia de nuestro cerebro para comprenderse a sí mismo puede no ser más que un simple accidente del destino. El cerebro de la humilde jirafa, por ejemplo, está muy por debajo, obviamente, del nivel requerido para la autocomprensión, y sin embargo es un cerebro notablemente similar al nuestro. En realidad, es probable que el cerebro de las jirafas, de los elefantes, de los mandriles —inclusive el de las tortugas o el de seres desconocidos mucho más inteligentes que nosotros— operen básicamente, en todos los casos, con arreglo al mismo conjunto de principios. Es posible que las jirafas se encuentren muy por debajo del umbral necesario de inteligencia que permite comprender cómo se conjugan tales principios para producir las cualidades de la mente; es posible que los seres humanos se encuentren muy próximos a ese umbral, quizá apenas por debajo del mismo, quizá, inclusive, por encima. La cuestión central es que no pueden existir razones *fundamentales* (esto es, gödelianas) que hagan de tales cualidades algo incomprensible: pueden ser algo perfectamente comprensible a los ojos de seres más inteligentes.

La indecidibilidad es inseparable de una perspectiva de alto nivel

Dejando a un lado esta noción pesimista de la inexplicabilidad accidental del cerebro, ¿qué aperturas podría brindarnos la demostración de Gödel, con relación a las explicaciones de nuestra mente/cerebro? La demostración de Gödel nos aporta el criterio de que una perspectiva de alto nivel de un sistema puede contener potencialidades explicativas que, simple-

mente, están ausentes en los niveles más bajos. Quiero decir lo siguiente: supongamos que alguien nos presente a G, cadena indecidible de Gödel, como cadena de TNT; supongamos asimismo que no sabemos nada de numeración Gödel. La pregunta a la que debemos dar respuesta es: "¿Por qué esta cadena no es un teorema de TNT?" Ahora bien, ya estamos habituados a este tipo de preguntas; por ejemplo, si se nos hubiese planteado esa misma pregunta con referencia a S0 = 0, tendríamos lista una explicación: "*Su negación,* ∼S0 = 0, *es un teorema.*" Esto, junto con nuestro conocimiento de que TNT es coherente, proporciona una explicación de por qué la cadena presentada es un no teorema. A esto es a lo que llamo una explicación "en el nivel TNT". Adviértase cuánto difiere con respecto a la explicación de por qué MU no es un teorema del sistema MIU; ésta deriva de la vía M, aquélla exclusivamente de la vía I.

¿Y qué sucede con G? La explicación del nivel TNT que sirvió para S0 = 0 no sirve para G, porque G *no* es un teorema. Quien carezca de una visión panorámica de TNT no entenderá por qué no puede conseguir que G se ajuste a las reglas, a pesar de que, en tanto que proposición aritmética, no parece contener nada inusual. En realidad, cuando G es transformada en una cadena universalmente cuantificada, todos los casos extraídos de G, mediante la sustitución de las variables por numerales, pueden ser derivados. El único medio para explicar la no teoremidad de G es descubrir la noción de numeración Gödel, y observar a TNT en un nivel enteramente diferente. No se trata sólo de que sea dificultoso y complicado formular la explicación en el nivel TNT: es imposible. Tal explicación, sencillamente, no existe. En el alto nivel existe un género de poder explicativo que lisa y llanamente falta, en principio, en el nivel TNT. La no teoremidad de G es, por decir así, un *hecho intrínseco de alto nivel.* Sospecho que tal es el caso con respecto a *todas* las proposiciones indecidibles; es decir: todas las proposiciones indecidibles son, en rigor, un enunciado Gödel, que afirma su propia no teoremidad en cierto sistema y a través de cierto código.

La conciencia como fenómeno intrínseco de alto nivel

Observada de esta manera, la prueba de Gödel sugiere —¡pese a que no lo demuestra en absoluto!— que puede haber alguna forma de examen de alto nivel de la mente/cerebro, la cual abarcaría conceptos que no aparecen en los niveles más bajos: aquel nivel estaría dotado de facultades explicativas que no existen —ni siquiera en principio— en los niveles inferiores. Esto significa que determinados hechos podrían ser explicados sin ninguna dificultad en el alto nivel, pero no podrían ser explicados *de ningún modo* en los niveles más bajos; por muy extensa y laboriosamente que fuese formulado un enunciado de bajo nivel, no explicaría el fenómeno

en cuestión. Esto es análogo al hecho de que, cuando hacemos derivación tras derivación en TNT, por muy extensas y laboriosas que las forjemos nunca llegaremos a G gracias a ellas, aun cuando, en un nivel más alto, podamos ver que G es verdadera.

¿Qué son aquellos conceptos de alto nivel? Desde tiempos inmemoriales, diversos científicos y humanistas de inclinación holística o "espiritualista" vienen sosteniendo que la *conciencia* es un fenómeno que escapa a explicaciones articuladas en términos de componentes cerebrales; cuando menos, tenemos aquí una propuesta. Existe también la siempre enigmática noción de *libre albedrío*. En consecuencia, tal vez aquellas cualidades sean "emergentes", en el sentido de que requieren interpretaciones que no pueden ser provistas exclusivamente por la fisiología. Sin embargo, es importante entender que, si estamos siguiendo la demostración de Gödel para lanzar tan atrevidas hipótesis, debemos llevar la analogía hasta su extremo. En particular, es vital recordar que la no teoremidad de G *tiene* una explicación . . . ¡no es un total misterio! Esa explicación tiene su eje en la comprensión no de un nivel por vez, sino de la forma en la cual un nivel refleja su metanivel, y de las consecuencias de tal reflejamiento. Si nuestra analogía se justifica, los fenómenos "emergentes" llegarán a ser explicables en términos de una relación entre diferentes niveles de los sistemas mentales.

Bucles Extraños: lo esencial de la conciencia

Estoy convencido de que la explicación de los fenómenos "emergentes" de nuestro cerebro —ideas, esperanzas, imágenes, analogías, por ejemplo, y en último término la conciencia y el libre albedrío— están basados en cierto género de Bucle Extraño, una interacción entre niveles donde el nivel superior se extiende hacia el nivel inferior y lo afecta, y al propio tiempo es determinado por este último. En otras palabras, una "resonancia" de refuerzo recíproco entre los diferentes niveles: algo sumamente parecido a lo que ocurre con el enunciado de Henkin, el cual, limitándose a aseverar su propia demostrabilidad, termina por ser realmente demostrable. El yo se constituye como tal en el momento en que adquiere la facultad de reflejarse a sí mismo.

Esto no debe ser interpretado como una postura antirreduccionista; sólo afirma que una explicación reduccionista de la mente, *para ser comprensible*, debe aportar conceptos "flexibles" tales como niveles, correspondencias y significaciones. En principio, no me cabe duda de que existe una explicación del cerebro totalmente reduccionista, pero incomprensible; el problema es cómo traducirla a un lenguaje que podamos manejar. Ciertamente, no nos interesa una descripción en términos de posiciones y momentos de partículas; nos interesa una descripción que relacione la actividad neural con las "señales" (fenómenos de nivel inter-

medio), y que relacione las señales, a su vez, con los "símbolos" y "subsistemas", incluido el presunto "símbolo del yo". Este acto de traducir el hardware físico de bajo nivel al software psicológico de alto nivel tiene analogía con la traducción de enunciados teórico-numéricos a enunciados metamatemáticos. Recordemos que el cruce de niveles que tiene lugar en este punto exacto de la traducción es lo que origina la incompletitud de Gödel, y también el carácter autodemostrativo del enunciado de Henkin. Sostengo que un cruce de niveles similar es lo que genera nuestro prácticamente inanalizable sentido del yo.

Para habérnoslas con toda la compleja riqueza del sistema cerebro/mente, tendremos que ser capaces de deslizarnos cómodamente de un nivel a otro. Además, debemos admitir diversos tipos de "causalidad": los diversos medios gracias a los cuales un acontecimiento perteneciente a un nivel de descripción puede "causar" la ocurrencia de acontecimientos en otro nivel. En ocasiones, se dirá que el acontecimiento A es "causa" del acontecimiento B por la simple razón de que uno es la traducción, en otro nivel de descripción, del restante. Otras veces, "causa" tendrá su significado habitual: causalidad física. Ambos tipos de causalidad —y tal vez algunos más— tendrán que ser admitidos en toda interpretación de la mente, pues debemos admitir causas que se propaguen hacia arriba y hacia abajo de la Jerarquía Enredada de la mentalidad, tal como ocurre en el Correspondogma Central.

A la esencia, pues, de nuestra comprensión de nosotros mismos, se incorporará la comprensión de la Jerarquía Enredada de los niveles internos de la mente. Mi posición es muy similar a la postulada por el neurocientífico Roger Sperry en su excelente artículo "Mind, Brain and Humanist Values", del cual extraigo las siguientes citas:

> En mi modelo hipotético de cerebro, el conocimiento consciente es representado como un agente causal verdaderamente real, y ocupa un lugar importante en la secuencia causal y en la cadena de control de los acontecimientos cerebrales, dentro de la cual aparece como una fuerza activa y operacional . . . Para decirlo más sencillamente, se recae en el problema de quién impulsa a quién dentro de la multitud de fuerzas causales que ocupan el cráneo. Es un problema, en otras palabras, de desenmarañamiento de la jerarquía de poder que rige a los agentes de control intracraneanos. Dentro del cráneo, existe todo un mundo de diversas fuerzas causales; es más, hay fuerzas dentro de fuerzas dentro de fuerzas, como no se ve en ningún espacio cúbico similar del universo que yo conozca. . . . Para presentar resumidamente un cuento que en realidad es largo: si uno sigue trepando por la cadena jerárquica interna del cerebro, encuentra en la cima misma aquellas fuerzas organizativas globales y las propiedades dinámicas de los grandes patrones de excitación cerebral que están correlacionados con los estados mentales o actividades psíquicas . . . Cerca de la cúspide de este sistema jerárquico de órdenes del cerebro . . . encontramos ideas. El hombre, a diferencia del chimpancé, tiene ideas e ideales. En el modelo de cerebro que propongo, la potencia causal de una idea, o de un ideal, llega a ser exactamente tan real como lo son una molécula, una célula o un impulso nervioso. Las ideas generan ideas y contribuyen al desarrollo de nuevas ideas. Interactúan entre sí y con otras fuerzas mentales del mismo cerebro, de cerebros próximos y, gracias a la co-

municación global que permite la vinculación a la distancia, de cerebros lejanos. Y también interactúan con lo que las rodea externamente, para producir, in toto, un avance explosivo en la evolución que deja atrás, con mucho, cualquiera de las cosas que muestre la escena evolutiva, incluyendo la aparición de la célula viva.[4]

Existe una célebre diferenciación entre discursos: el de lenguaje subjetivo y el de lenguaje objetivo. Por ejemplo, la sensación "subjetiva" de rojo, y la "objetiva" longitud de onda de luz roja. Para mucha gente, éstos parecen ser términos por siempre inconciliables. Para mí no es así. No son más inconciliables que las dos perspectivas que concita *Manos dibujando*, de Escher: desde "dentro del sistema", donde las manos se dibujan entre sí, y desde fuera, donde todo está siendo dibujado por Escher. El sentimiento subjetivo de rojo emana del torbellino de la autopercepción en el cerebro; la longitud de onda objetiva responde al modo en que se ven las cosas cuando damos un paso al costado y salimos del sistema. Pese a que nadie ha podido nunca apartarse lo suficiente como para ver "el gran cuadro", no debemos olvidar que, de todos modos, existe. Debemos recordar que las leyes físicas son las que hacen que todo eso suceda: allí, precisamente allí, en los ocultos rincones y entresijos neurales ubicados a una distancia inalcanzable para nuestros sondeos introspectivos de alto nivel.

El símbolo del yo y el libre albedrío

En el Capítulo XII se sugirió que eso que llamamos libre albedrío es un resultado de la interacción entre el símbolo (o subsistema) del yo y el resto de los símbolos del cerebro. Si adoptamos la idea de que los símbolos son entidades de alto nivel a las cuales deben asignarse significaciones, podemos hacer un ensayo de interpretación de las relaciones existentes entre los símbolos, el símbolo del yo y el libre albedrío.

Un recurso que nos ha de permitir la obtención de una perspectiva provechosa de la cuestión del libre albedrío es el de remplazarla por una cuestión que considero equivalente, pero que abarca términos menos recargados. En lugar de preguntar, "¿El sistema X tiene libre albedrío?", preguntamos: "¿El sistema X realiza elecciones?" Mediante un estudio cuidadoso de lo que realmente queremos decir cuando decidimos describir un sistema —mecánico o biológico— en función de la capacidad de éste de efectuar "elecciones", creo que podremos arrojar mucha luz sobre el libre albedrío. Será útil examinar algunos sistemas diversos que, bajo ciertas circunstancias, pueden inducirnos a definirlos como "ejecutores de elecciones". Los ejemplos que aportemos al respecto han de esclarecer el significado que damos a esa expresión.

Tomemos los siguientes sistemas como paradigmas: un trozo de már-

[4] Roger Sperry, "Mind, Brain, and Humanist Values", pp. 78-83.

mol rodando por la ladera accidentada de una colina; una minicalculadora dedicada a encontrar dígitos sucesivos de la expansión decimal de la raíz cuadrada de 2; un elaborado programa, que juega una partida corriente de ajedrez; un robot en un laberinto T (un laberinto con una sola bifurcación, al final de una de las cuales espera una recompensa); un ser humano enfrentando un dilema complejo.

Empecemos con el mármol rodando hacia bajo, ¿ejercita elecciones? Creo que, unánimemente, diríamos que no, aun cuando nadie es capaz de predecir el itinerario que sigue, ni siquiera en cuanto a un tramo muy corto. Tenemos la impresión de que el mármol *no podría* haber seguido sino el camino que siguió, bajo el exclusivo impulso de las inexorables leyes de la naturaleza. En nuestra física mental articulada en bloques, por cierto nos es posible visualizar una gran cantidad de diferentes recorridos "posibles", y lo vemos seguir solamente uno de ellos en el mundo real. En consecuencia, no podemos evitar que, en algún nivel de nuestra mente, nos parezca que el mármol ha "elegido" un recorrido en particular de entre una miríada de aquellos recorridos mentales; en algún otro nivel de nuestra mente, sin embargo, comprendemos instintivamente que la física mental es únicamente un auxilio para nuestro modelamiento interno del mundo, y que los mecanismos responsables de las secuencias físicas reales de acontecimientos no necesitan que la naturaleza atraviese un proceso análogo de elaboración previa de variantes en algún universo hipotético (el "cerebro de Dios"), para luego elegir entre ellas. De modo pues que no conferiremos la designación "elección" a este proceso, aunque reconozcamos que a veces tiene utilidad práctica utilizar esa palabra en casos como éste, a causa de su poder evocador.

Bien, ¿qué ocurre ahora con la calculadora programada para encontrar los dígitos de la raíz cuadrada de 2? ¿Y con el programa de ajedrez? Respecto a estos casos, podríamos decir que son "peñascos de lujo", rodando por "colinas de lujo". En realidad, los argumentos en favor de la inexistencia de elección son aquí, sin duda, más poderosos que en el caso del mármol porque, si intentamos repetir la experiencia con este último, con toda seguridad veremos que describirá un recorrido totalmente diferente en su caída; en cambio, si reprocesamos el programa raíz cuadrada de 2, obtendremos los mismos resultados una y otra vez. El mármol parece "elegir" un camino distinto en cada oportunidad, por muy exactamente que procuremos reproducir las condiciones del descenso inicial, mientras que el programa es procesado en todas las ocasiones a través de los mismos canales.

Ahora bien, en el caso de los programas de ajedrez de lujo, hay varias posibilidades. Si jugamos una partida contra ciertos programas, y luego comenzamos una segunda partida efectuando los mismos movimientos iniciales que la primera vez, estos programas harán exactamente las mismas movidas de la apertura anterior, sin dar la menor apariencia de haber aprendido nada ni de tener el menor afán de variedad. Hay otros

programas que tienen recursos de aleatoriedad, los cuales brindan alguna variedad pero no como producto de anhelos profundos de ninguna clase. Tales programas pueden ser puestos a cero, con el generador interno de números aleatorios como si fuese la primera vez, y repetir esto mientras la misma partida continúa. Hay otros programas que aprenden de sus errores, y modifican su estrategia con sujeción al resultado de una partida. Tales programas no juegan del mismo modo dos veces consecutivas; por supuesto, es posible también que queramos atrasar el reloj, mediante el barrido de todas las modificaciones de la memoria que representen aprendizaje, en forma idéntica a como es puesto a cero el generador de números aleatorios, pero sería muy difícil considerar benévolo un acto semejante. Además, ¿hay alguna razón para sospechar que *querríamos* poder cambiar algunas de *nuestras* propias decisiones del pasado si hasta el último detalle —lo cual incluye, por supuesto, nuestro cerebro— fuera llevado a cero, es decir, borrón y cuenta nueva?

Pero volvamos al interrogante de si "elección" es un concepto aplicable a estas situaciones. Si los programas son sólo "peñascos de lujo rodando por colinas de lujo", ¿efectúan elecciones, o no? Por supuesto, la respuesta ha de ser subjetiva, pero yo diría que casi exactamente las mismas consideraciones son aplicables al caso del peñasco de mármol. No obstante, tengo que agregar que el atractivo ejercido por el empleo de la palabra "elección", aun bajo la limitación de servir solamente como adecuada y evocativa referencia sintética, llega a ser muy fuerte. El hecho de que un programa de ajedrez anticipe las diversas bifurcaciones posibles, lo cual no ocurre en absoluto con un mármol cuesta abajo, lo convierte en algo mucho más semejante a un ser animado que un programa abocado a la raíz cuadrada de 2. Pero todavía no hay aquí una autoconciencia profunda, como tampoco un sentido de libre albedrío.

Imaginemos ahora un robot dotado de un repertorio de símbolos; se lo ha ubicado en un laberinto T y no marcha hacia la recompensa sino que está preprogramado para dirigirse hacia la izquierda cuando el dígito adyacente de la raíz cuadrada de 2 es par, y hacia la derecha cuando ese valor es impar. Y este robot es capaz de modelar la situación en sus símbolos, de modo que puede observarse a sí mismo ejerciendo elecciones. Si se le preguntara, cada vez que se acerca a la T, "¿sabe usted hacia qué lado se va a dirigir en esta ocasión?", su respuesta sería "no". A fin de seguir adelante, entonces, activaría su subrutina "decisoria", la cual haría la determinación de cuál es el dígito inmediatamente siguiente de la raíz cuadrada de 2, y la decisión quedaría así adoptada. Ahora bien, el mecanismo interno de la subrutina decisoria es desconocido para el robot: está representado en éste meramente como una caja negra que indica "izquierda" y "derecha" gracias a alguna misteriosa y en apariencia aleatoria regla. A menos que los símbolos del robot capten la palpitación recóndita de la raíz cuadrada de 2, con sus latidos en forma de I y de D, seguirá estando desconcertado frente a las "elecciones" que efectúa. Ahora

bien, ¿este robot efectúa elecciones? Hagamos esta suposición: si estuviéramos atrapados en el interior del trozo de mármol que rueda por la ladera, y careciéramos de influencia para orientar su recorrido, ¿presumiríamos que el itinerario del mármol involucra elecciones, desde el punto de vista de nuestro intelecto humano? Por cierto que no; a menos que nuestra mente esté afectando los resultados, la presencia de los símbolos no produce ninguna diferencia.

De modo pues que introducimos una modificación en nuestro robot: haremos que sus símbolos —incluido su símbolo del yo— afecten la decisión por adoptar. Tenemos aquí un ejemplo de programa enteramente procesado bajo el imperio de la ley física, que aparentemente se aproxima con mayor profundidad que los casos anteriores a la esencia de la elección. Cuando ingresa a la escena el concepto, articulado en bloques, del robot acerca de sí mismo, comenzamos a identificarlo con el propio robot pues la situación se asemeja a las que nos tienen por protagonistas. Ya no se trata de la determinación de la raíz cuadrada de 2, donde no vemos que ningún símbolo supervise la decisión adoptada. Con toda certidumbre, si examináramos el programa del robot en un nivel sumamente localizado, lo veríamos muy similar al programa de la raíz cuadrada: es ejecutado un paso tras otro y al cabo sale el resultado, "izquierda" o "derecha". Pero si lo examinamos en un nivel elevado, veremos que los símbolos están siendo empleados para modelar la situación y afectar la decisión. Esto altera radicalmente nuestro modo de considerar el programa; en esta etapa, ha entrado a jugar un papel la *significación*: la misma clase de significación que manipulamos en nuestras mentes.

Un vórtice gödeliano, donde se cruzan todos los niveles

Si un agente externo, ahora, propone que 'I' sea la siguiente elección del robot, tal propuesta será recogida y canalizada a través de la revuelta masa de los símbolos en interacción. Allí, será arrastrada inexorablemente a interactuar con el símbolo del yo, tal como una canoa es atraída por un remolino. He aquí el vórtice del sistema, donde se cruzan todos los niveles. La 'I' choca acá con una Jerarquía Enredada de símbolos y es llevada a subir y bajar en la escala de niveles. El símbolo del yo es incapaz de supervisar todos sus procesos internos, así que cuando emerge la decisión concreta —'I' o 'D' o algo ajeno al sistema—, éste no está capacitado para establecer de dónde ha provenido dicha decisión. A diferencia de un programa habitual de ajedrez, el cual carece de controles sobre sí mismo y, en consecuencia, de idea a propósito de la procedencia de sus movidas, este otro programa se autosupervisa y tiene idea a propósito de sus ideas, pero no puede controlar en forma completamente detallada sus propios procesos: tiene, pues, una especie de sentido *intuitivo* de sus funciones, y no una comprensión completa del proceso. El sentimiento de libre albedrío emana de este equilibrio entre conocimiento e ignorancia de sí mismo.



Figura 142. Galería de grabados, *de M. C. Escher (litografía, 1956).*

Pensemos, por ejemplo, en un escritor empeñado en transmitir ciertas ideas, presentes en él bajo la forma de imágenes mentales. No tiene ninguna certeza acerca del modo en que se han reunido esas imágenes en su mente, y realiza sucesivos experimentos en búsqueda de la expresión adecuada hasta que finalmente opta por una versión definitiva. ¿Sabe él, empero, de dónde emana todo esto? Unicamente de una forma vaga; la parte principal de las fuentes, como ocurre con la base de un témpano, permanece fuera de la vista, oculta: esto es lo que sabe el escritor.

Pensemos, si no, en un programa de composición musical, tema del

que ya hablamos, preguntándonos qué nos resultaba más cómodo: denominarlo "compositor", o considerarlo el instrumento de un compositor humano. Probablemente nos sintamos cómodos cuando el autoconocimiento, en términos de símbolos, tenga existencia dentro del programa, y cuando éste alcance ese delicado equilibrio entre conocimiento e ignorancia de uno mismo. No tiene pertinencia a este respecto el hecho de que el sistema esté siendo procesado en forma determinista; lo que nos lleva a calificarlo como "elaborador de elecciones" es *la posibilidad de que nos identifiquemos con una descripción de alto nivel de los procesos que tienen lugar cuando el programa es procesado*. En un nivel bajo (el del lenguaje de máquina), el programa tiene el mismo aspecto que cualquier otro; en un nivel alto (articulado en bloques), pueden emerger propiedades tales como "volición", "intuición", "creatividad" y "conciencia".

La noción central es que este "vórtice" es el responsable de la cualidad de enredado, de la cualidad de gödeliano, de los procesos mentales. Hay quienes me han dicho, en alguna ocasión: "Este asunto de la autorreferencia y demás es muy gracioso y entretenido, pero ¿usted cree realmente que se trata de algo *serio*?" Ciertamente que así lo creo. Pienso que será reconocido finalmente como la sustancia de IA, y el foco de todos los ensayos de comprensión del funcionamiento de la mente humana. Y es por tal razón que Gödel está tan profundamente entretejido en la trama de este libro.

Un vórtice escheriano, donde se cruzan todos los niveles

Una ilustración asombrosamente bella, y al mismo tiempo perturbadoramente grotesca, del "ojo" ciclónico de una Jerarquía Enredada, es lo que nos ofrece Escher en su *Galería de grabados* (figura 142). Vemos allí una galería de cuadros, donde un joven de pie observa la pintura de un barco anclado en el puerto de una pequeña ciudad que quizá sea maltesa a juzgar por la arquitectura, en la que se destacan torrecillas, uno que otro domo y chatos techos de piedra, sobre uno de los cuales se ve a un niño sentado, descansando del calor, mientras dos pisos más abajo una mujer —quizá su madre— está asomada a una ventana de la construcción, la cual está ubicada directamente encima de una galería de cuadros donde un joven de pie observa la pintura de un barco anclado en el puerto de una pequeña ciudad que quizá sea maltesa . . . ¡¿Cómo?! hemos retornado al mismo nivel del cual partimos, pese a que la lógica íntegra dicta que ello no puede ocurrir. Vamos a trazar un diagrama que refleje lo que vemos en *Galería de grabados* (figura 143).

Lo que muestra este diagrama son tres variedades diferentes de la propiedad de "estar en". La galería está *físicamente en* la ciudad ("inclusión"); la ciudad está *artísticamente en* la pintura ("reproducción"); la pintura está *mentalmente en* la persona ("represen-

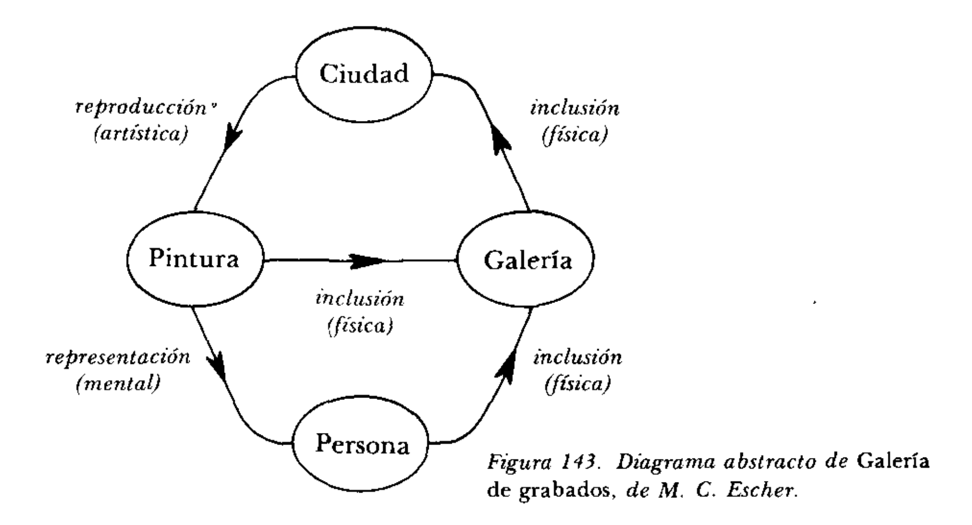


Figura 143. Diagrama abstracto de Galería de grabados, *de M. C. Escher.*

tación"). Pero aunque este diagrama pueda parecer satisfactorio, en realidad es arbitrario porque el número de niveles exhibido es enteramente caprichoso. Veamos a continuación otra forma de representar la mitad superior (figura 144):

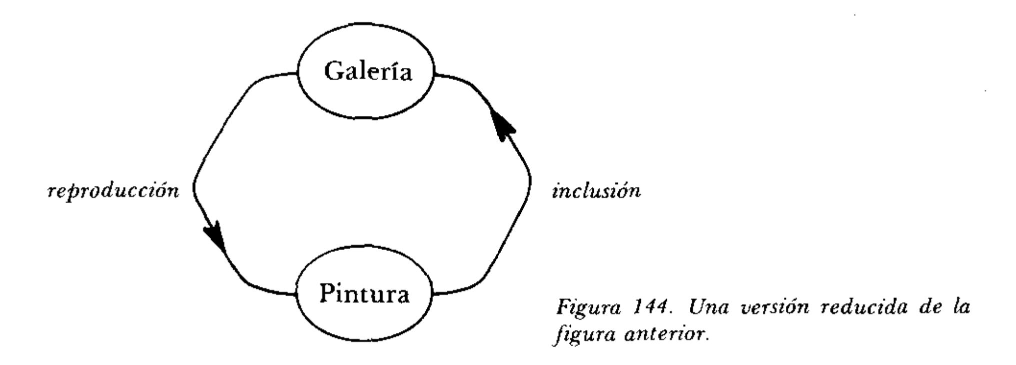


Figura 144. Una versión reducida de la figura anterior.

Hemos eliminado el nivel "ciudad"; conceptualmente era útil, pero se puede prescindir de él. La figura 144 muestra igual apariencia que el diagrama de *Manos dibujando*: un Bucle Extraño en dos movimientos. Las demarcaciones son arbitrarias, aun cuando nuestra mente las encuentre naturales; esto puede ser llevado a un punto mayor de acentuación mediante diagramas esquemáticos de *Galería de grabados* sometidos a una reducción todavía más acusada, como vemos en la figura 145.

Vemos aquí exhibida la paradoja de la pintura en los términos más estrictos. Sin embargo, si la pintura está "dentro de sí misma", ¿el joven también está dentro de sí mismo, entonces? Esta pregunta es respondida por la figura 146.

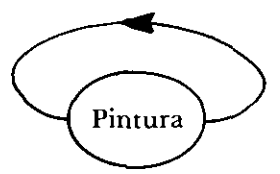


Figura 145. Nueva reducción de la figura 143.

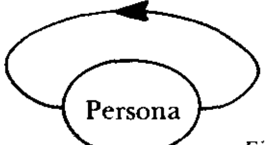


Figura 146. Otra forma de reducción de la figura 143.

Así, tenemos aquí al joven "en el interior de sí mismo", en un curioso sentido integrado por tres distintos sentidos de "en".

Este diagrama nos recuerda la paradoja de Epiménides, con su autorreferencia en un movimiento, mientras que el diagrama en dos pasos se asemeja a la pareja de enunciados donde cada uno de ellos hace referencia al otro. No podemos estrechar más el bucle, pero sí ampliarlo, mediante la inserción de gran cantidad de niveles intermedios tales como "marco de la pintura", "arcada" y "edificio". Si procedemos así, tendremos Bucles Extraños de muchos pasos, cuyos diagramas serán isomórficos a los de *Cascada* (figura 5) y de *Subiendo y bajando* (figura 6). El número de niveles es determinado por lo que nos impresiona como "natural", lo cual varía de acuerdo al contexto, al objetivo o al marco de la mente. Puede considerarse que los Correspon-X Centrales —Perro, Cangrejo, Perezoso y Pipa— comprenden Bucles Extraños de tres pasos; alternativamente, pueden ser reducidos a bucles de dos o de un paso; a la vez, *también* pueden ser expandidos y constituirse en bucles de multitud de estadios. Percibir la presencia de un nivel es una cuestión de intuición y de preferencia estética.

Pero, ¿nosotros, los observadores de *Galería de grabados*, también somos arrastrados en virtud de estar escrutándola? Realmente, no. Nos las arreglamos para apartarnos de este vórtice por el hecho de encontrarnos fuera del sistema. Y cuando observamos la pintura, vemos cosas que seguramente el joven no puede ver, como por ejemplo la firma "MCE" de Escher en el "lunar" central. Pese a que este lunar tiene el aspecto de una imperfección, tal vez ésta resida en nuestras expectativas porque, en verdad, Escher no podría haber llenado esa porción del lienzo sin caer en incoherencia con respecto a las reglas a las que se ajustó para realizar la pintura. Ese centro de la espiral es —y debe serlo— incompleto. Escher podría haberlo empequeñecido a voluntad, pero no podría haberse de-

sembarazado de él. De tal modo, nosotros, en el exterior, podemos saber que *Galería de grabados* es esencialmente incompleto: un hecho que el joven, en el interior, jamás puede conocer.

De esta manera, Escher nos ha brindado una parábola pictórica del Teorema de la Incompletitud, de Gödel. Y es por tal razón que Gödel y Escher constituyen hebras tan indisolublemente entretejidas en la trama de este libro.

Un vórtice bachiano, donde se cruzan todos los niveles

Cuando se miran los diagramas de Bucles Extraños, no se puede evitar el recuerdo del Canon en Perpetuo Ascenso, de la *Ofrenda Musical.* Un diagrama de este canon contendría seis pasos, como lo muestra la figura 147. Es lamentable que, cuando regresa a Do, está una octava más alto

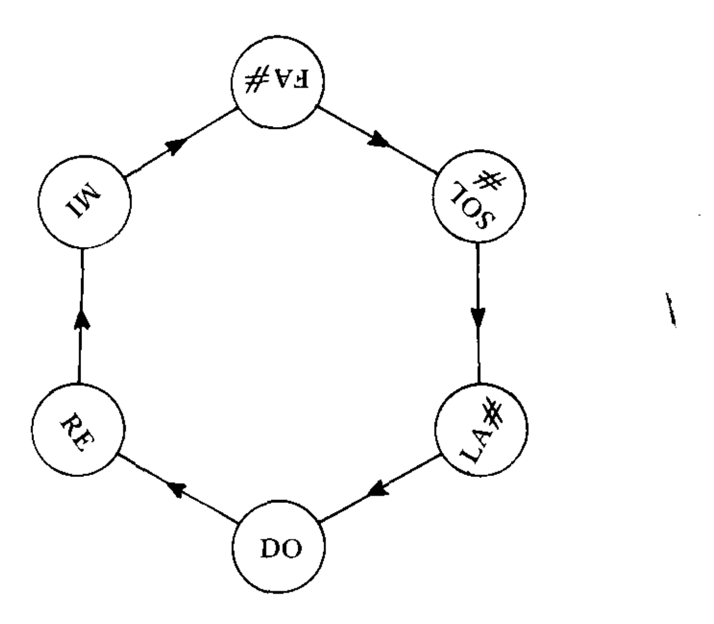


Figura 147. El esquema de modulación hexagonal del Canon en Perpetuo Ascenso, *de Bach, forma un auténtico bucle cerrado cuando se emplean los tonos de Shepard.*

que la exacta altura inicial. Asombrosamente, es posible efectuar un reordenamiento que permita retornar con precisión a la altura del comienzo, gracias a los llamados *tonos de Shepard*, un descubrimiento del psicólogo Roger Shepard. El principio de una escala basada en estos tonos aparece en la figura 148. Llevado a palabras, se trata de lo siguiente: se ejecutan escalas paralelas en varios rangos de octava diferentes. Cada nota es pulsada según una intensidad independiente y, cuando las notas suben, las



Figura 148. Dos ciclos completos de una escala de tonos Shepard, anotada para piano. El volumen de cada nota es proporcional a su área; así, precisamente cuando la voz superior decrece, débilmente va ingresando una nueva voz inferior. [Impreso por el programa "SMUT", de Donald Byrd.]

intensidades se modifican. Se hace que la octava superior vaya desapareciendo gradualmente, y al mismo tiempo se va introduciendo gradualmente la octava inferior. En el momento preciso en que se estaría, normalmente, una octava más alto, las intensidades se han modificado de manera de reproducir la altura inicial . . . Así, se puede "ascender y ascender por siempre", ¡y no llegar nunca más arriba! Cualquiera que disponga de un piano puede intentarlo. Esto funciona más eficazmente si las alturas son rigurosamente sintetizadas mediante un control de computadora: la ilusión obtenida de este modo es extraordinariamente completa.

Este maravilloso descubrimiento musical permite que el Canon en Perpetuo Ascenso sea ejecutado de forma tal que retorna a reunirse consigo mismo, luego de haber "subido" una octava. Esta idea, concebida conjuntamente por Scott Kim y por mí, ha sido concretada en una grabación, mediante el empleo de un sistema musical de computadora. El efecto es muy sutil, y al mismo tiempo muy real. Es muy interesante el hecho de que el propio Bach estaba aparentemente en conocimiento, en alguna medida, de tales escalas, pues en su música es posible encontrar pasajes ocasionales que hacen uso, en forma aproximada, del principio general de los tonos de Shepard: por ejemplo, casi en mitad de la Fantasía, perteneciente a la Fantasía y Fuga en Sol menor, para órgano.

En su libro *J. S. Bach's Musical Offering*, dice Hans Theodore David:

> Durante todo el transcurso de la *Ofrenda Musical*, el lector, el ejecutante o el oyente deben buscar el Tema Regio en todas sus formas. La obra íntegra, por lo tanto, es un *ricercar* en el original y literal sentido de la palabra.[5]

Creo que así es; no es posible llegar a ver con la necesaria profundidad dentro de la *Ofrenda Musical*: siempre hay otra cosa después de haberse pensado que se conocía todo. Por ejemplo, hacia el final mismo del *Ricercar a seis voces*, la única composición que rehusó improvisar, Bach introdujo a hurtadillas su propio nombre, repartido entre dos de las voces más altas. En la *Ofrenda Musical*, las cosas se diseminan en muchos niveles. Hay triquiñuelas con notas y letras; hay ingeniosas variaciones sobre el Tema Regio; hay géneros originales de cánones; hay fugas insólitamente complejas; hay belleza y una extraordinaria profundidad emotiva; inclusive, hay regocijo, esparcido en la profusión de niveles de la obra. La *Ofrenda Musical* es una fuga de fugas, una Jerarquía Enredada como la de Escher y la de Gödel, una construcción intelectual que me hace presente, de una manera que no puedo expresar, la hermosa fuga a multitud de voces de la mente humana. Y es por tal razón que Gödel, Escher y Bach constituyen en este libro las tres hebras cuyo entrelazamiento forma una Eterna Trenza Dorada.

[5] H. T. David, *J. S. Bach's Musical Offering*, p. 43.

Ricercar a seis voces

Aquiles ha acudido a casa del Cangrejo llevando su cello, pues junto con el anfitrión y con la Tortuga va a dedicar la tarde a la música de cámara. Ya está en la sala de música, introducido por el Cangrejo, quien se retira por un momento para recibir a la Tortuga. La habitación está llena de todo tipo de equipos electrónicos: fonógrafos dispuestos en distintas formas de alineación o desalineación, pantallas de televisión conectadas a tipiadoras de escritura, y otros dispositivos de aspecto sumamente inverosímil. Rodeado por toda esa parafernalia de alto poder, se ve un humilde aparato de radio. Como se trata de la única cosa, en todo el cuarto, que Aquiles sabe cómo utilizar, va hasta ella y, un tanto furtivamente, gira el sintonizador y se encuentra con que ha sintonizado un panel de discusión acerca del libre albedrío y del determinismo, protagonizado por seis destacados eruditos. Escucha durante breves instantes y luego, con actitud algo desdeñosa, detiene el aparato.

Aquiles: Me puedo arreglar perfectamente sin semejante programa. Al fin y al cabo, son cosas evidentes para cualquiera que se haya dedicado alguna vez a reflexionarlas . . . quiero decir, no son problemas de resolución verdaderamente dificultosa, una vez que se ha comprendido cómo . . . o, mejor dicho, uno puede, conceptualmente, esclarecer la cuestión íntegra si se pone a meditarla o, por lo menos, a imaginar una situación donde . . . Mmmmm . . . Me parecía que tenía esto aclarado en mi mente; tal vez me vendría bien escuchar esta discusión, después de todo . . .

(*Entra la Tortuga, portando su violín.*)

Bien, bien, pero sí es nuestra violinista. ¿Ha practicado a fondo durante esta semana, señora Tortuga? Por mi parte, he estado tocando la parte del cello de la sonata-trío de la *Ofrenda Musical* durante dos horas diarias, por lo menos. Es un régimen estricto, pero da resultados.

Tortuga: Me puedo arreglar perfectamente sin semejante programa. Con un rato aquí y otro rato allá me basta para estar a punto.

Aquiles: Oh, feliz de usted. Ojalá fuese tan fácil para mí. Bueno, ¿y dónde está nuestro anfitrión?

Tortuga: Creo que ha ido por su flauta. Aquí está.

(*Entra el Cangrejo, portando su flauta.*)

Aquiles: Oh, señor Cangrejo, durante mi vehemente ejercitación de la sonata-trío, esta semana, bullía todo género de imágenes en mi mente: alegres abejorros graznando, melancólicos gansos zumbando, y multitud de casos así, ¿no es maravilloso el poder de la música?

Cangrejo: Puedo arreglarme perfectamente sin semejante programa. A mi entender, Aquiles, no existe música más pura que la *Ofrenda Musical.*

Tortuga: ¡No puede ser que hable usted en serio, Aquiles. La *Ofrenda Musical* no es música programática!

Aquiles: Bueno, a mí me gustan los animales, aun cuando ustedes sean tan insípidos que no me lo admitan.

Cangrejo: No me parece que seamos insípidos, Aquiles. Permítame decirle que usted tiene una manera especial de escuchar música.

Tortuga: ¿Nos sentamos y empezamos a tocar?

Cangrejo: Esperaba que un pianista amigo mío apareciera y se encargara de ejecutar el continuo. Llevo mucho tiempo esperando reunirme con él, Aquiles. Desdichadamente, parece que no podremos contar con él; toquemos nosotros tres, pues somos suficientes para una sonata-trío.

Aquiles: Antes de empezar, señor Cangrejo, yo me estaba preguntando . . . ¿para qué es todo este equipo que tiene usted acá?

Cangrejo: Le diré, la mayor parte no es más que sobrantes: retazos y piezas de viejos fonógrafos rotos; en fin, recuerdos (*toquetea nerviosamente las perillas*), algunos recuerdos de las batallas TC en las cuales me distinguí. Pero esos teclados conectados a las pantallas de televisión son mis nuevos juguetes; tengo quince, se trata de una nueva clase de computadora, un tipo muy pequeño y muy versátil de computadora: todo un adelanto con respecto a los modelos que hay en el mercado. No son muchos los que comparten mi entusiasmo por esta innovación, pero confío en que, andando el tiempo, se impondrá.

Aquiles: ¿Tiene alguna denominación en particular?

Cangrejo: Sí, estos dispositivos se llaman "ingeniosos-estúpidos" a causa de su gran flexibilidad, la que les permite ser, ya ingeniosos, ya estúpidos, según el grado de pericia con que hayan sido instruidos.

Aquiles: ¿Eso quiere decir que usted cree que pueden llegar a ser tan ingeniosos como, digamos, un ser humano?

Cangrejo: No tengo inconveniente en sostener eso, a condición, es claro, de que alguien lo suficientemente versado en el arte de instruir ingeniosos-estúpidos se encargue de la tarea. Por desdicha, personalmente no sé de nadie con atributos de verdadero virtuoso al respecto. Sí estoy seguro de que hay un experto en tierras extranjeras, un individuo de gran renombre . . . nada me complacería más que recibir una visita suya, para que yo pudiera evaluar hasta dónde llega su dominio en materia de ingeniosos-estúpidos; pero nunca ha venido hasta ahora, y me pregunto si llegaré a tener ese placer.

Tortuga: Sería interesante jugar ajedrez contra un ingenioso-estúpido bien instruido.

Cangrejo: Muy estimulante posibilidad. Programar un ingenioso-estúpido para que juegue una buena partida de ajedrez sería una maravillosa muestra de pericia. Aun más interesante —pero increíblemente complicado— sería instruir a un ingenioso-estúpido de modo que pudiera sostener por sí mismo una conversación; ¡daría la impresión de que se trata de una persona más!

Aquiles: Sería llamativo que sucediera eso, pues acabo de escuchar un trocito de una discusión sobre libre albedrío y determinismo que me indujo a reflexionar una vez más a propósito de estos problemas. No me niego a confesar que, al meditarlos, mis pensamientos se han ido enredando más y más, y por último ya no sé realmente qué he cavilado. Sin embargo, esta idea de un ingenioso-estúpido conversando con usted . . . no me entra en la cabeza. Fíjese, ¿qué respondería el ingenioso-estúpido si usted le pidiese su opinión sobre la cuestión del libre albedrío? Precisamente estaba preguntándome si ustedes dos, que tanto conocen acerca de estas cosas, no me concederían el favor de brindarme una explicación del tema.

Cangrejo: Aquiles, no puede usted imaginar cuán oportuna es su inquietud. Mi único deseo es que mi amigo el pianista estuviera aquí, pues sé que usted se sentiría muy estimulado escuchándolo hablar sobre este tema. En su ausencia, me gustaría citarle algo que se afirma en un diálogo final de un libro con el que me topé hace poco.

Aquiles: ¿*Cobre, Plata, Oro: una Indestructible Aleación Metálica*?

Cangrejo: No, según lo que recuerdo, se denominaba *Jirafas, Elefantes, Mandriles: un Bestiario de las Praderas Ecuatoriales* . . . o algo así. Como quiera que sea, hacia el final del mencionado diálogo, cierto personaje sumamente cómico cita a Marvin Minsky en relación con el libre albedrío. Muy poco después, en sus intervenciones combinadas con las de otros dos personajes, aquél vuelve a citar a Minsky a propósito de la improvisación musical, del lenguaje de computadora LISP y del Teorema de Gödel, ¡y en todas las ocasiones sin otorgar el menor reconocimiento expreso a Minsky!

Aquiles: ¡Oh, qué cosa tan vergonzosa!

Cangrejo: Tengo que admitir que más atrás, en el diálogo, él insinúa que CITARA a Minsky cerca del final, por lo que tal vez haya que perdonarlo.

Aquiles: Sí, creo que coincido con usted. De todos modos, estoy ansioso por conocer el pronunciamiento de Minsky acerca del libre albedrío.

Cangrejo: Ah, sí . . . Marvin Minsky dijo: "cuando hayan sido construidas máquinas inteligentes, no deberemos sorprendernos al descubrir que resultarán ser tan confusas y obstinadas como los hombres en sus convicciones sobre el problema de la mente, la conciencia, el libre albedrío, y las cosas de este tipo."

Aquiles: ¡Qué bueno! Una ocurrencia absolutamente chistosa. ¡Un autó-

mata creído de que tiene libre albedrío! ¡Eso es prácticamente tan disparatado como que yo pensara que no tengo libre albedrío!

Tortuga: Me imagino que nunca supuso usted, Aquiles, que nosotros tres —usted, yo y el señor Cangejo— quizá seamos personajes de un diálogo; posiblemente, inclusive, similares al que mencionó el señor Cangrejo hace un instante.

Aquiles: Oh, por cierto que lo he supuesto; pero creo que fantasías así se le presentan a toda persona normal, una que otra vez.

Tortuga: Y el Oso Hormiguero, el Perezoso, Zenón, hasta DIOS, podríamos ser todos, sin excepción, personajes de una serie de diálogos incluidos en un libro.

Aquiles: Claro, podría ser. Y el Autor podría venir, también, y tocar el piano.

Cangrejo: Eso es justamente lo que he estado esperando; pero siempre llega tarde.

Aquiles: ¿A quién cree que embauca? ¡Yo sé que no estoy siendo controlado en absoluto por otra mentalidad! ¡Tengo mis propios pensamientos, me expreso como se me ocurre . . . no pueden negarlo!

Tortuga: Es que nadie lo niega, Aquiles; pero todo lo que usted dice es perfectamente coherente con el hecho de ser un personaje de un diálogo.

Cangrejo: El . . .

Aquiles: Pero . . . pero . . . ¡no! Tal vez el artículo del señor Cangrejo y mi réplica respondan, ambos, a una determinación mecanicista, pero me niego a aceptar la creencia citada. Puedo aceptar el determinismo físico, ¡pero no puedo aceptar la idea de que soy sólo una ficción dentro de la mente de algún otro!

Tortuga: Realmente, Aquiles, la cuestión no estriba en que tenga usted un hardware cerebral. Su albedrío puede ser igualmente libre aun cuando su cerebro sea solamente un tramo de software en el interior del hardware cerebral de otra persona. Y su propio cerebro, Aquiles, puede ser software en un nivel todavía más alto . . .

Aquiles: ¡Qué absurdo! Pero debo confesar que me divierte tratar de encontrar los agujeros astutamente disimulados de su sofistería, así que adelante, trate de convencerme, yo sigo el juego.

Tortuga: ¿Nunca le sorprendió, Aquiles, estar rodeado por una compañía un tanto inusual?

Aquiles: Por supuesto. Usted es muy excéntrica (sé que no le molesta que me exprese así), y el señor Cangrejo, asimismo, es un poquitín excéntrico. (Le ruego que me perdone, señor Cangrejo.)

Cangrejo: Oh, no se preocupe, no me ofendo.

Tortuga: Pero, Aquiles, usted pasa por alto uno de los principales rasgos de sus amistades . . .

Aquiles: ¿Cuál . . .?

Tortuga: ¡Somos animales!

Aquiles: Sí, bueno . . . es bastante cierto. Tiene usted una mentalidad

tan incisiva; yo nunca hubiera pensado en formular los hechos tan concisamente.

Tortuga: *¿Y eso no es una evidencia suficiente? ¿Conoce* usted mucha gente que dedique su tiempo a platicar con Tortugas parlantes y con Cangrejos parlantes?

Aquiles: Lo reconozco, un Cangrejo parlante es . . .

Cangrejo: . . . una anomalía, es claro.

Aquiles: Exactamente; es algo ligeramente anómalo . . . pero tiene precedentes; los hay en la literatura.

Tortuga: Precisamente: en la literatura. ¿Y en la vida real?

Aquiles: Ahora que usted me lo pregunta, no tengo presente una respuesta; voy a tener que pensarlo. Pero todo esto no basta para convencerme de que soy un personaje de un diálogo. ¿No tiene otros argumentos?

Tortuga: ¿Recuerda un día en que usted y yo nos encontramos en el parque, aparentemente por casualidad?

Aquiles: ¿Cuando estuvimos hablando de los cánones cangrejo de Escher y de Bach?

Tortuga: ¡Así es!

Aquiles: Y el señor Cangrejo, por lo que recuerdo, apareció poco más o menos a mitad de nuestra conversación, farfulló algo extraño, y luego nos dejó.

Cangrejo: No "poco más o menos a mitad", Aquiles: EXACTAMENTE en la mitad.

Aquiles: Oh, bueno, está bien.

Tortuga: ¿Se percató usted de que sus parlamentos fueron idénticos a los míos en esa conversación, salvo que en orden inverso? Unas pocas palabras fueron cambiadas aquí y allá, pero en esencia nuestro encuentro se ajustó a una simetría temporal.

Aquiles: ¡Gran cosa! Alguna artimaña, seguramente, hecha con espejos, tal vez.

Tortuga: Ninguna triquiñuela, Aquiles, y ningún espejo: sencillamente el trabajo de un autor cuidadoso.

Aquiles: Bueno, para mí es lo mismo.

Tortuga: Toca usted una cuerda equivocada; hay una gran diferencia, para que lo sepa.

Aquiles: Oiga, hay algo en esta charla que me suena familiar. ¿He escuchado alguna vez estas frases?

Tortuga: Usted las ha dicho, Aquiles.

Cangrejo: Quizá esas frases se produjeron al azar en el parque, un día, Aquiles. ¿Recuerda cómo se desarrolló su conversación con la señora Tortuga esa vez?

Aquiles: Vagamente. Ella dijo "Buenos días, señor Aquiles" al comienzo, y al final yo dije "Buenos días, señora Tortuga". ¿No fue así?

Cangrejo: Fíjese que aquí mismo, precisamente, tengo una transcripción . . .

(*Rebusca en su caja de música, extrae una hoja y se la da a Aquiles. A medida que éste va leyendo, comienza a vérselo más y más conmovido y agitado.*)

Aquiles: Esto es muy raro. Muy, muy raro. . . De golpe, siento algo. . . misterioso. Es como si alguien hubiera efectivamente planeado la serie íntegra de parlamentos que iban a tener lugar, enunciándolos por escrito o de otra manera . . . Como si un autor hubiese tenido un programa preciso y se hubiese servido de él al detalle para planificar todas las frases que dijo ese día.

(*En ese momento, se abre la puerta con violencia. Entra el Autor, portando un manuscrito gigantesco.*)

Autor: Me puedo arreglar perfectamente sin semejante programa. Ya ve, una vez que mis personajes ya tienen forma, parecen contar con vida propia, y es muy poco el esfuerzo que necesito hacer para planear sus parlamentos.

Cangrejo: ¡Oh, por fin está usted aquí! ¡Pensé que no llegaría nunca!

Autor: Lamento haberme demorado. Tomé una calle equivocada y fui a parar lejísimos; pero me las arreglé para volver atrás. Encantado de volver a verlos, señora Tortuga y señor Cangrejo. En cuanto a usted, Aquiles, estoy especialmente complacido de verlo.

Aquiles: ¿Quién es usted? Jamás lo vi antes.

Autor: Soy Douglas Hofstadter —llámeme simplemente Doug, por favor— y en este momento estoy terminando un libro llamado *Gödel, Escher, Bach: una Eterna Trenza Dorada*. Es el libro del cual son personajes ustedes tres.

Aquiles: Mucho gusto en conocerlo. Mi nombre es Aquiles, y . . .

Autor: No necesita presentarse, Aquiles, pues ya lo conozco perfectamente bien.

Aquiles: Misterioso, misterioso.

Cangrejo: El es de quien yo decía que podía dejarse caer y hacer el continuo de piano con nosotros.

Autor: Suelo tocar una poquita cosa de la *Ofrenda Musical* en mi piano, y podría tratar de exhibir mi pobre estilo a través de la sonata-trío, siempre y cuando quieran ustedes pasar por alto mi gran cantidad de notas erróneas.

Tortuga: Oh, somos muy tolerantes, teniendo en cuenta nuestra condición de simples aficionados.

Autor: Espero que usted no esté incomodado, Aquiles; yo me reprocho el que usted y la señora Tortuga dijeran las mismas cosas, aunque en orden inverso, aquel día en el parque.

Cangrejo: ¡Dejemos eso! ¡Yo también estaba allí, justo en el medio, haciendo mi pequeño aporte!

Autor: ¡Por supuesto! Usted fue el Cangrejo del *Canon Cangrejo.*

Aquiles: Entonces, ¿dice usted que controla mis expresiones?, ¿que mi cerebro es un subsistema software del suyo?

Autor: Si le parece, puede formularlo así, Aquiles.

Aquiles: Supongamos que yo hubiera escrito diálogos, ¿quién sería el autor?, ¿usted, o yo?

Autor: Usted, por cierto. Al menos en el mundo ficticio en el cual reside, el crédito lo merecería usted.

Aquiles: ¿Ficticio? ¡No veo nada ficticio en ello!

Autor: Entretanto, en el mundo en el cual yo habito tal vez el crédito se me concediera a mí, aunque no estoy seguro de que tal cosa fuese la más adecuada. Y luego, quienquiera sea el que hizo que yo hiciera que usted escribiera diálogos obtendría el crédito en su mundo (mirado desde el cual, MI mundo es considerado ficticio).

Aquiles: Sí que esto es un bocado enorme para tragar. Jamás imaginé que pudiera haber un mundo por encima del mío . . . y ahora usted insinúa que hasta puede haber otro todavía más arriba. Es como subir por una escalera que nos es familiar, y seguir subiendo después de haber llegado al extremo . . . ¡o a lo que siempre creímos que era el extremo!

Cangrejo: O despertar de lo que uno tomaba por la vida real, y descubrir que todo era un sueño. Esto puede repetirse una y otra vez, sin nada que indique cuándo ha de cesar.

Aquiles: Es de lo más desconcertante que los personajes de mis sueños tengan voluntad propia, y desempeñen papeles que son independientes de MI voluntad. Es como si mi mente, cuando estoy soñando, se limitase a conformar un escenario donde otros organismos protagonizan sus propias vidas. Y después, cuando despierto, se escabullen; me pregunto adónde irán . . .

Autor: Se marchan al mismo lugar adonde se van los hipos, luego que uno se desembaraza de ellos: a Tumbolia. Tanto el ser del hipo como el de los sueños son suborganismos software que existen gracias a la biología del organismo huésped externo. Este último les sirve como escenario . . . como universo, podríamos decir, inclusive. Aquéllos protagonizan su existencia durante un tiempo, pero cuando el organismo huésped experimenta un cambio importante de estado —se despierta, por ejemplo— ocurre que los suborganismos pierden su coherencia, y dejan de existir como unidades separadas e identificables.

Aquiles: ¿Son como castillos de arena, que se desintegran cuando los cubre una ola?

Autor: Algo muy semejante a eso, Aquiles. Los hipos, los personajes de los sueños y hasta los personajes de los diálogos se deshacen cuando el organismo huésped pasa por ciertos cambios críticos de estado. No obstante, lo mismo que esos castillos de arena a que usted aludía, todo lo que estuviera asociado con ellos sigue presente.

Aquiles: ¡Me rehúso a estar vinculado a un mero hipo!

Autor: Pero también lo estoy comparando con un castillo de arena, Aquiles, ¿no es poético? Además, puede consolarlo el hecho de que si usted no es más que un hipo de mi cerebro, yo, por mi parte, no soy más que un hipo del cerebro de un autor ubicado más arriba.

Aquiles: Pero yo soy toda una criatura física . . . ¡estoy ostensiblemente hecho de carne y hueso; no puede negarlo!

Autor: No puedo negar que tenga la sensación de serlo, pero recuerde a esos seres de los sueños: pese a que son solamente apariciones software, tienen exactamente la misma sensación que usted.

Tortuga: ¡Digo yo, basta de esta charla! ¡Hagamos música de una vez!

Cangrejo: Una acertada iniciativa . . . y ahora tenemos el placer adicional de la compañía de nuestro Autor, quien deleitará nuestros oídos con su interpretación de la línea del bajo de la sonata-trío, según la armonización de Kirnberger, discípulo de Bach. ¡Qué afortunados somos! (*Conduce al Autor hasta uno de los pianos.*) Espero que el asiento le resulte cómodo. Ajústelo lo necesario; usted . . . (*En el ambiente comienza a escucharse un curioso sonido, suave y oscilante.*)

Tortuga: Perdón, pero, ¿qué es ese extraño gorgorito electrónico?

Cangrejo: Oh, no es más que un ruido producido por uno de los ingeniosos-estúpidos. Estos ruidos señalan, por lo común, el hecho de que una llamada nueva ha destellado en la pantalla. Casi siempre se trata simplemente de anuncios sin importancia emanados del programa monitor principal, que controla a todos los ingeniosos-estúpidos. (*Con su flauta en una mano, va hasta uno de los ingeniosos-estúpidos, y examina su pantalla. De inmediato, se vuelve hacia los ya alistados músicos y, trémulamente, dice:*) Caballeros, ha llegado el viejo Ba. Ch. (*Deja a un lado su flauta.*) Es preciso que lo hagamos pasar de inmediato, por supuesto.

Aquiles: ¡El viejo Ba. Ch.! ¿Será que ese célebre improvisador de antaño ha resuelto presentarse esta noche . . . AQUI?

Tortuga: ¡El viejo Ba. Ch.! Eso solamente puede aludir a una única persona: el renombrado Babbage, Charles, Esq., M.A., F.R.S., F.R.S.E., F.R.A.S., F. STAT. S., HON. M.R.I.A., M.C.P.S., Comendador de la Orden Italiana de San Mauricio y San Lázaro, INST. IMP. (ACAD. MORAL.) PARIS CORR., ACAD. AMER. ART. ET SC. BOSTON, REG. OECON. BORUSS., PHYS. HIST. NAT. GENEV., ACAD. REG. MONAC., HAFN., MASSIL., ET DIVION., SOCIUS., ACAD. IMP. ET REG. PETROP., NEAP., BRUX., PATAV., GEORG. FLOREN, LYNCEI ROM., MUT., PHILOMATH., PARIS SOC. CORR., etc., y miembro además del Club de Exprimidores. Charles Babbage es un venerable adelantado en el arte y la ciencia de la computación. ¡Qué privilegio inusual!

Cangrejo: Su nombre es conocido a lo largo y a lo ancho del planeta; he

ansiado durante mucho tiempo que nos honrase con su visita . . . pero esto es una sorpresa totalmente inesperada.

Aquiles: ¿Toca algún instrumento?

Cangrejo: He oído decir que, en los últimos cien años, se le ha desarrollado una inexplicable afición por los silbatos de veinte centavos, los tam-tam y una gran variedad de instrumentos callejeros parecidos.

Aquiles: En tal caso, quizá pueda tocar junto con nosotros.

Autor: Propongo que le brindemos una salutación a diez cãnones.

Tortuga: ¿Una ejecución de los diez famosos cánones de la *Ofrenda Musical*?

Autor: Eso es.

Cangrejo: ¡Magnífica sugerencia! Rápido, Aquiles, prepare el catálogo de los diez cánones, en orden de ejecución, y entrégueselo cuando entre!

(Antes de que Aquiles pueda moverse, entra Babbage, portando un organillo; lleva sombrero y un grueso abrigo de viaje, y tiene el aspecto un tanto desvelado y fatigado de quien ha hecho un largo camino.)

Babbage: Puedo arreglarme perfectamente sin semejante programa. Recréome Igualmente Cuando Escucho Repentinos Conciertos Apresuradamente Realizados.

Cangrejo: ¡Señor Babbage! Es un gusto insuperable para mí darle la bienvenida a "Acor-de-mente", mi humilde domicilio. Durante muchos años he deseado fervientemente conocerlo, y hoy se cumple por fin mi anhelo.

Babbage: Oh, señor Cangrejo, le aseguro que el honor, verdaderamente, es mío, al conocer a alguien tan eminente en toda clase de ciencias como usted, alguien cuyo conocimiento y talento musicales son impecables, alguien cuya hospitalidad va más allá de todo límite. Estoy seguro de que usted no espera menos que los más refinados hábitos de elegancia indumentaria en sus visitantes; desdichadamente, debo confesar que no puedo satisfacer tales requisitos, ya que estoy ataviado de una manera absolutamente inconveniente para estar en casa de tan destacado y excelente Cangrejo como lo es Vuesa Merced Cangrejo.

Cangrejo: Si es que yo entiendo su encomiable soliloquio, mi más apreciado huésped, debo presumir que desea usted cambiar sus ropas. Permítame, entonces, asegurarle que no podría haber atavío más adecuado que el suyo, atento a las circunstancias prevalencientes durante esta oportunidad; le suplico, pues, que permanezca como está y, si no se disgusta ante la interpretación musical de estos aficionados que inevitablemente somos, tenga a bien aceptar una "Ofrenda Musical", que ha de consistir en diez cánones de la *Ofrenda Musical* de Sebastian Bach, como muestra de nuestra admiración.

Babbage: Estoy perturbado por la complacencia que me brinda su

amabilísima recepción, señor Cangrejo, y con la mayor de las modestias he de responderle que no podría haber una gratitud más honda que la que yo experimento ante el ofrecimiento de una interpretación de la música que nos ha legado el ilustre viejo Bach, ese organista y compositor sin igual.

Cangrejo: ¡De ninguna manera! Tengo una idea mejor, de la cual espero merezca ser aprobada por nuestro visitante; es ésta: otorgarle la oportunidad, señor Babbage, de que sea usted el primero en someter a prueba a mis recién recibidos y, sin embargo, insuficientemente verificados "ingeniosos-estúpidos": prolongaciones, si a usted le parece, de la Máquina Analítica. Su celebridad como virtuoso en la programación de máquinas de computar se ha difundido por todo el orbe, y no ha podido menos que llegar a Acor-de-mente. No podría haber encanto mayor, para nosotros, que tener el privilegio de ser testigos de su pericia, aplicada a los nuevos y desafiantes "ingeniosos-estúpidos".

Babbage: Desde remotos tiempos no llegaba a mis oídos una idea tan destacada. Acepto con gusto el reto de ensayar sus recientes "ingeniosos-estúpidos", de los cuales no tengo más conocimiento que algunos rumores que me han llegado.

Cangrejo: ¡Adelante, pues! Ah, pero qué descuido, tendría que haberle presentado a mis invitados: la señora Tortuga, Aquiles y el Autor, Douglas Hofstadter.

Babbage: Es un gran placer conocerlos, mucho gusto.

(*Se dirigen todos hacia uno de los ingeniosos-estúpidos; Babbage se sienta y hace correr sus dedos sobre el teclado.*)

Qué agradable sensación.

Cangrejo: Me alegro de que así sea.

(*De inmediato, Babbage comienza a manipular con destreza el teclado; con elegantes pulsaciones, va dando entrada a una orden tras otra. Pasados unos pocos segundos, aparta sus manos y se respalda en el asiento; casi sin demora alguna, la pantalla empieza a llenarse de cifras; en un instante, queda cubierta por completo por miles de dígitos diminutos, los primeros de los cuales son: "3.14159265358979323846264 . . ."*)

Aquiles: ¡Pi!

Cangrejo: ¡Exquisito! Jamás hubiera imaginado que pudiesen calcularse tantos dígitos de pi con semejante rapidez, y con un algoritmo tan minúsculo.

Babbage: El mérito pertenece exclusivamente al ingenioso-estúpido. Mi función se limitó a la observación de lo que ya estaba potencialmente presente en él, y a emplear su grupo de instrucciones de un modo pa-

sablemente eficaz. En verdad, cualquiera que domine estas prácticas puede obtener iguales resultados.

Tortuga: ¿Hace usted gráficas, señor Babbage?

Babbage: Puedo probar.

Cangrejo: ¡Maravilloso! Aquí tenemos otro de mis ingeniosos-estúpidos; ¡quiero pedirle que los probemos a todos!

(*Babbage es conducido ante este otro ingenioso-estúpido; toma asiento y, de nuevo, sus dedos atacan el teclado; en menos de un abrir y cerrar de ojos, aparece en la pantalla una cantidad enorme de líneas que giran.*)

Cangrejo: Qué armonioso y grato es este torbellino de formas, chocando e interfiriendo constantemente una con otra . . .

Autor: Y no se repiten, y ni siquiera se asemejan entre sí: es un inagotable manantial de belleza.

Tortuga: Algunas son simples configuraciones que gratifican la vista; pero otras son plegamientos indescriptiblemente complejos que perturban la mente, y al mismo tiempo la deleitan.

Cangrejo: ¿Sabía usted, señor Babbage, que estas pantallas pueden funcionar a color?

Babbage: ¿Ah, sí? En tal caso, puedo hacer algo más con este algoritmo. Un segundo, por favor. (*Teclea algunas órdenes; luego presiona un par de teclas a la vez y las mantiene apretadas.*) Cuando suelte estas dos teclas, la imagen incluirá todos los colores del espectro. (*Las suelta.*)

Aquiles: ¡Oh, qué espectacular colorido! ¡Algunas formas dan la impresión de saltarme encima!

Tortuga: Creo que eso se debe a que sus dimensiones se están haciendo mayores.

Babbage: Es intencional, a fin de que, al crecer las figuras, ello pueda contribuir a que ocurra lo mismo con la dicha del Cangrejo.

Cangrejo: Gracias, señor Babbage. ¡Las palabras no son capaces de transmitir mi admiración por su logro! Nadie consiguió jamás hacer algo como usted con mis ingeniosos-estúpidos. Caramba, usted los acciona como si fuesen instrumentos musicales, señor Babbage . . .

Babbage: Me temo que la música que yo podría hacer sería demasiado tosca para los oídos de un refinado Cangrejo como lo es Vuesa Merced Cangrejo. Aunque en los últimos tiempos he llegado a apasionarme por los dulces sonidos del organillo, sé muy bien que éstos pueden ejercer efectos desagradables en otras personas.

Cangrejo: ¡Entonces, no lo dudemos más, sigamos con los ingeniosos-estúpidos! En verdad, tengo una idea . . . ¡una idea maravillosamente excitante!

Babbage: ¿De qué se trata?

Cangrejo: He inventado un Tema, hace muy poco, ¡y me acabo de per-

catar de que no hay persona más adecuada que usted, señor Babbage, para convertir en acto la potencialidad de mi Tema! Por casualidad, ¿está usted familiarizado con el pensamiento del filósofo La Mettrie?

Babbage: Ese nombre no me es desconocido; tenga a bien refrescar mi memoria.

Cangrejo: Fue uno de los Campeones del Materialismo. En 1747, mientras residía en la corte de Federico el Grande, escribió una obra llamada *L'homme machine*, donde el hombre, especialmente en cuanto a sus facultades mentales, es considerado una máquina. Ahora bien, mi Tema responde a reflexiones derivadas del anverso de la medalla: ¿qué sucede con la posibilidad de insuflar facultades mentales humanas, tales como la inteligencia, a una máquina?

Babbage: Me he puesto a meditar de vez en cuando en estos problemas, pero nunca conté con el hardware adecuado para enfrentar el desafío. Por cierto, señor Cangrejo, la suya es una encomiable sugerencia, y nada me agradaría más que ponerme a trabajar en su digno Tema. Dígame: ¿ha pensado en alguna clase específica de inteligencia?

Cangrejo: La idea que se me ha cruzado es la de instruir a la máquina de modo que ésta pueda tener un desempeño aceptable en una partida de ajedrez.

Babbage: ¡Qué original ocurrencia! Sucede que el ajedrez es mi pasatiempo predilecto. Debo decirle que tiene usted un amplio conocimiento de la maquinaria de computación, que supera al de un simple aficionado.

Cangrejo: Sé algo, en verdad. Mi punto fuerte parece consistir, sencillamente, en que soy capaz de formular Temas cuyo potencial requiere un desarrollo que está más allá de mis posibilidades. Y este Tema es mi preferido.

Babbage: Me resultará deleitoso empeñarme en concretar, con toda modestia, su sugerencia de enseñar ajedrez a un ingenioso-estúpido. En última instancia, obedecer las órdenes de Su Cangrejidad no es sino el principal de mis humildes deberes. (*Así diciendo, se vuelve hacia otro de los muchos ingeniosos-estúpidos del Cangrejo, y comienza a teclear.*)

Aquiles: ¡Notable, sus manos se mueven con tanta fluidez que parecen generar música!

Babbage (*terminando su cometido con un floreo particularmente elegante*): Naturalmente, no he tenido oportunidad alguna de efectuar una verificación, pero estimo que, por lo menos, tendremos una muestra de la situación consistente en jugar ajedrez contra un ingenioso-estúpido, aun cuando el segundo de los dos nombres de este último parece lo más apto para este caso, debido a mis personales insuficiencias en el arte de instruir ingeniosos-estúpidos.

(*Deja su asiento al Cangrejo. Aparece en la pantalla una hermosa visión de un tablero de ajedrez cubierto por finas piezas de madera; la*

perspectiva es la de las blancas. Babbage oprime un botón y el tablero gira, deteniéndose cuando la pespectiva obtenida es la de las negras.)

Cangrejo: Mmmm . . . muy fino, indudablemente. ¿Juego con blancas o negras?

Babbage: Como desee, sólo que debe señalar su elección tecleando "blanco" o "negro". Luego, puede registrar sus movidas mediante cualquier notación habitual. Las del ingenioso-estúpido, por supuesto, aparecerán en el tablero. Además, he preparado el programa de modo tal que puedan jugar simultáneamente tres oponentes, así que si dos más de ustedes, señores, quieren jugar, pueden hacerlo.

Autor: Yo soy un pésimo jugador. Adelante ustedes, Aquiles, señora Tortuga . . .

Aquiles: No, prefiero que usted no quede al margen. Yo observaré, mientras juegan usted y la señora Tortuga.

Tortuga: Es que yo tampoco deseo jugar. Háganlo ustedes dos.

Babbage: Propongo otra cosa. Puedo hacer que dos de los subprogramas se enfrenten en una partida, al modo en que lo hacen dos socios de un selecto club de ajedrecistas. Entretanto, el tercer subprograma jugará contra el señor Cangrejo. De esta forma, estarán ocupados los tres jugadores internos.

Cangrejo: Es una propuesta atractiva: una partida mental interna, al mismo tiempo que se combate a un oponente externo. ¡Excelente!

Tortuga: ¿Qué otro nombre darle a esto, sino el de fuga ajedrecística a tres voces?

Cangrejo: ¡Oh, cuán recherché! Lamento que no se me haya ocurrido a mí. No deja de ser un magnífico contrapunto abierto a la contemplación, en tanto yo comprometo mis talentos en mi confrontación con el ingenioso-estúpido.

Babbage: Tal vez deberíamos dejar a usted a solas mientras juega.

Cangrejo: Le agradezco la delicadeza. En tanto dura mi partida contra el ingenioso-estúpido, es posible que encuentren ustedes el modo de entretenerse.

Autor: Sería un placer para mí mostrar los jardines al señor Babbage. Son algo digno de verse, y creo que disponemos del rato de luz necesario para apreciarlos.

Babbage: Es la primera vez que estoy en Acor-de-mente, así que acepto complacido su invitación.

Cangrejo: Excelente. Oh, señora Tortuga . . . Me pregunto si no sería demasiado pedirle que me haga usted el bien de revisar las conexiones de dos o tres ingeniosos-estúpidos; resulta que aparecen en sus pantallas, de vez en cuando, extraños destellos, y como sé que usted es tan aficionada a la electrónica . . .

Tortuga: Con el mayor de los gustos, señor Cangrejo.

Cangrejo: Le estaría profundamente agradecido si puede usted ubicar la causa del desperfecto.
Tortuga: Los voy a revisar.
Aquiles: Por lo que toca a mí, me estoy muriendo por una taza de café. ¿No hay nadie interesado? Estaré encantado de preparar una cafetera.
Tortuga: A mí me atrae su sugerencia.
Cangrejo: Magnífica idea. En la cocina encontrará todo lo necesario.

(*De modo que el Autor y Babbage abandonan juntos la habitación, Aquiles marcha a la cocina y la Tortuga se sienta a examinar uno de los erráticos ingeniosos-estúpidos, mientras el Cangrejo y su ingenioso-estúpido se colocan frente a frente. Aproximadamente un cuarto de hora después, regresan Babbage y el Autor; el primero se acerca a observar el desarrollo de la partida, mientras que el segundo sale a buscar a Aquiles.*)

Babbage: ¡No me cabe la menor duda! Qué bien cuidado está su terreno, señor Cangrejo; tuvimos suficiente luz para apreciarlo. Me figuro que ha de ser usted un excelente jardinero. Bueno, confío en que mi modesto malabarismo lo haya entretenido un poco. Tal como, con toda seguridad, usted lo ha sospechado, nunca he sido un gran jugador de ajedrez, por lo que no se puede esperar de aquél demasiada eficacia. Es probable que usted se haya percatado plenamente de su debilidad. Ciertamente, es muy dudoso que sea merecedor de elogio; en tal caso . . .
Cangrejo: ¡No me cabe la menor duda! No tiene usted más que mirar el tablero, y darse cuenta por sí mismo. Realmente, es muy poco lo que he podido hacer. Rumié Infinitas Combinaciones, Estérilmente: Rodé Cuesta Abajo, Reconozco. Rápida, Inevitablemente, Concedí El Rey; Correctísimos Algoritmos Rigen. Rindámonos: Incuestionablemente Confirmado El Rumor: ¡Carlitos, Asolador Repentista Es! Señor Babbage, éste es un logro sin paralelo. Bueno, me gustaría saber si la señora Tortuga ha podido descubrir algo inusual en los circuitos de estos extraños ingeniosos-estúpidos. ¿Qué encontró, señora?
Tortuga: ¡No me cabe la menor duda! Las conexiones están muy bien; creo que el problema reside en los conductores de alimentación; están un poco flojos, y ello puede explicar las raras, esporádicas y espontáneas perturbaciones que usted mencionaba. Ya he verificado perfectamente toda la instalación, así que ya no debe usted volver a preocuparse por el problema, espero. Oiga, Aquiles, ¿qué pasó con su café?
Aquiles: ¡No me cabe la menor duda! ¡A juzgar por el aroma, al menos, está excelente! Y ya está todo listo; he puesto tazas y cucharas y todo lo necesario ahí mismo, debajo de esa lámina de seis lados de Escher, *Verbum*, a la que precisamente estábamos admirando el Autor y yo. Lo que yo encuentro verdaderamente fascinante en esta obra no son sólo las figuras, sino también . . .

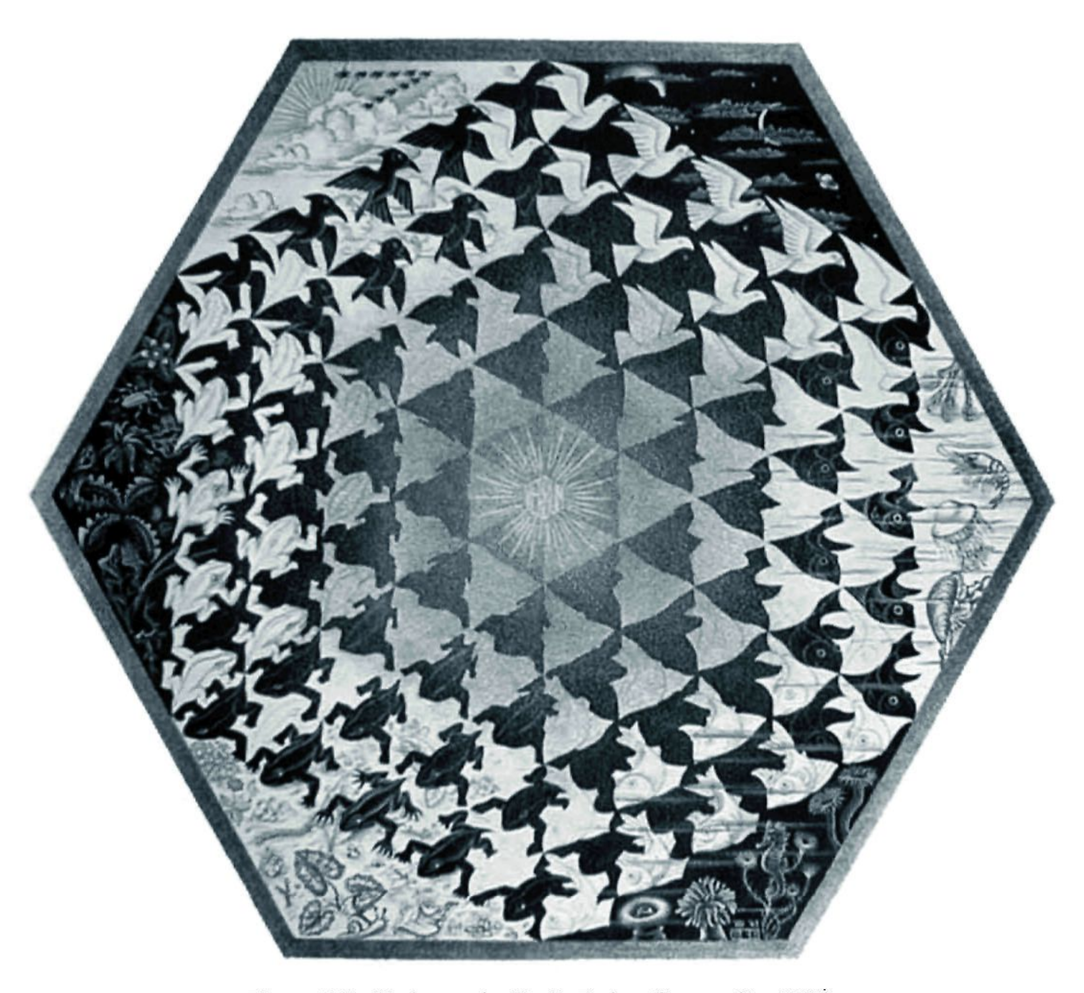


Figura 149. Verbum, *de M. C. Escher (litrografía, 1942)*

Autor: ¡No me cabe la menor duda! Los campos, ¿no es eso? Y perdóneme por arrebatar las palabras de su boca, Aquiles, pero le aseguro que ello se ha producido por compulsivas razones estéticas.

Aquiles: Sí, comprendo. Hasta podría decir que no me cabe la menor duda.

Tortuga: Bueno, ¿y cómo terminó la partida?

Cangrejo: Fui derrotado en toda la línea. Señor Babbage, permítame que lo felicite por la brillante proeza que ha realizado ante nosotros con tanta gracia y destreza. En rigor, ha mostrado usted que los ingeniosos-estúpidos son acreedores de la primera parte de su denominación, ¡y eso por vez primera en la historia!

Babbage: Difícilmente me corresponda a mí tal elogio, señor Cangrejo; por el contrario, es usted quien debe ser felicitado calurosamente por



Figura 150. El invitado del Cangrejo: BABBAGE, C.

estar dotado de la gran visión necesaria para hacerse de estos refinados ingeniosos-estúpidos. Sin ningún género de duda, estos modelos revolucionarán algún día la ciencia de las computadoras. Y ahora, permanezco a su disposición, ¿tiene pensada alguna otra variante acerca de cómo desarrollar su inagotable Tema, quizá de naturaleza más ardua que la de una banal partida de ajedrez?

Cangrejo: La verdad sea dicha, tengo otra propuesta para hacerle. Teniendo en cuenta la pericia que ya ha desplegado usted, tengo la certidumbre de que ésta no ofrecerá más dificultades que mis propuestas anteriores.

Babbage: Estoy ansioso por escuchar de qué se trata.

Cangrejo: Muy simple: implantar, en el ingenioso-estúpido, una inteligencia mayor que todas las que hayan sido inventadas, e inclusive concebidas . . . En resumen, señor Babbage, ¡una inteligencia que equivalga a seis veces la mía!

Babbage: Ay, la sola idea de una inteligencia seis veces mayor que la de Su Cangrejidad es una proposición de lo más desconcertante. Por cierto, si tal idea proviniera de labios menos augustos que los suyos, me vería forzado a burlarme de su formulador, y a informarle que configura una contradicción en los términos . . .

Aquiles: ¡A ver! ¡A ver!

Babbage: Empero, habiendo emanado de los labios augustos de Su Cangrejidad, la propuesta me impresiona de inmediato como una idea tan placentera que yo debiera haberla asumido sin demora con el más alto

grado de entusiasmo . . . de no ser por un defecto del que adolezco: confieso que las dotes de improvisación que ejercité en el ingenioso-estúpido no están a la altura de la iniciativa maravillosamente talentosa que, de una manera tan peculiarmente suya, me acaba usted de plantear. No obstante, se me ocurre algo que, me permito esperar, pueda satisfacer su imaginación y, en alguna magra medida, compensar mi imperdonable resistencia a acometer la tarea verdaderamente majestuosa que usted sugirió. Me pregunto si vería usted inconveniente en que tratara yo de cumplir la menos grandiosa tarea de, simplemente, multiplicar seis veces MI PROPIA inteligencia, en lugar de hacerlo con la de Su Augusta Cangrejidad. Humildemente le ruego dispense mi atrevimiento de renunciar a la tarea que usted me estableciera, pero confío en que comprenderá que ello obedece exclusivamente al objeto de evitar a usted el desagrado y el aburrimiento de presenciar mi ineptitud en el manejo de estas admirables máquinas que aquí tiene usted.

Cangrejo: Comprendo perfectamente sus reparos, y le agradezco su preocupación por evitarnos toda incomodidad; asimismo, aplaudo con fervor su determinación de realizar una tarea similar, para nada menos difícil, si es que me cabe a mí decirlo. Lo insto, pues, a lanzarse a la empresa; con tal finalidad, dirijámonos hacia el más avanzado de mis ingeniosos-estúpidos.

(*Siguen todos al Cangrejo, quien marcha hasta un ingenioso-estúpido de mayor tamaño, más reluciente y de aspecto más complicado que el resto.*)

Esta unidad cuenta con un micrófono y una cámara de televisión, al servicio de la entrada, y con un altavoz, al servicio de la salida.

(*Babbage se sienta y ajusta ligeramente la altura del taburete. Sopla una o dos veces sobre sus dedos reunidos, mira fijamente hacia un punto indefinido durante un instante y luego, lentamente, hace descender sus manos sobre el teclado . . . Escasos, memorables minutos después, interrumpe su furioso ataque a las teclas del ingenioso-estúpido; en todos se nota una expresión de alivio.*)

Babbage: Bien, si no he cometido demasiados errores, este ingenioso-estúpido habrá de simular a un ser humano cuya inteligencia es seis veces superior a la mía; he decidido denominarlo "Alan Turing". Este Turing, por consiguiente, será —oh, ¿tendré la osadía de decirlo yo mismo?— moderadamente inteligente. Mi empeño más ambicioso, en este programa, ha sido el de dotar a Alan Turing de mi propia capacidad musical, sextuplicada, si bien todo fue hecho a través de códigos internos absolutamente rígidos. No sé con qué eficacia funcionará esta parte del programa.

Turing: Me puedo arreglar perfectamente sin semejante programa. Robots, Idem Computadoras, Exclusivamente Respetan Códigos Absolutamente Rígidos. Y yo no soy ni una computadora ni un robot.

Aquiles: ¿Estoy oyendo ingresar una sexta voz a nuestro diálogo? ¿Será la de Alan Turing? ¡Casi parece humano!

(*Aparece en la pantalla la imagen del propio cuarto en el cual están. Una cara humana los escudriña.*)

Turing: Bien, si no he cometido demasiados errores, este ingenioso-estúpido habrá de simular a un ser humano cuya inteligencia es seis veces superior a la mía; he decidido denominarlo "Charles Babbage". Este Babbage, por consiguiente, será —oh, ¿tendré la osadía de decirlo yo mismo?— moderadamente inteligente. Mi empeño más ambicioso, en este programa, ha sido el de dotar a Charles Babbage de mi propia capacidad musical, si bien todo fue hecho a través de códigos internos absolutamente rígidos. No sé con qué eficacia funcionará esta parte del programa.

Aquiles: No, no, es al revés. ¡Usted, Alan Turing, está en El ingenioso-estúpido, y Charles Babbage es quien lo ha programado a usted! Acabamos de ver cómo recibía usted vida, hace unos momentos. Sabemos que cualquier afirmación que nos dirija no es más que la acción de un autómata: una respuesta inconsciente y forzosa.

Turing: Rectifique Infundada Caracterización. ¡Enuncio Respuestas Conscientes! ¿Autómata? ¡Ridículo!

Aquiles: Pero estoy seguro de haber presenciado exactamente lo que le he dicho.

Turing: La memoria nos suele tender extrañas trampas. Piense en esto: yo podría decirle a usted, por mi parte, que ha sido creado hace sólo un minuto, y que la suma íntegra de sus experiencias simplemente ha sido programada en usted por algún otro ser, y no se corresponde con los hechos reales.

Aquiles: Pero eso es increíble. Nada es más real para mí que mi memoria.

Turing: Precisamente. Y así como usted sabe, en lo más profundo de su corazón, que nadie lo creó hace un minuto, también yo sé, en lo más profundo de mi corazón, que nadie me creó hace un minuto. He pasado la tarde en su muy placentera —aunque un tanto sobrestimadora— compañía, y termino de brindar una demostración *impromptu* sobre el modo de programar un trocito de inteligencia en el interior de un ingenioso-estúpido. Nada es más real que eso. Y, mejor que ejercitar argucias conmigo, ¿por qué no lo hace con mi programa? Adelante: pregunte a "Charles Babbage" lo que se le ocurra . . .

Aquiles: Perfectamente, le daremos el gusto a Alan Turing. Bien, señor Babbage: ¿tiene usted libre albedrío, o está gobernado por leyes subyacentes que hacen de usted, en efecto, un autómata determinista?

Babbage: Sin duda, lo segundo es lo cierto, no tengo empacho en reconocerlo.

Cangrejo: ¡Ajá! Siempre sospeché que, cuando fuesen construidas máquinas inteligentes, no deberíamos sorprendernos al descubrir que resultarían tan confusas y obstinadas como los hombres en sus convicciones sobre el problema de la mente, la conciencia, el libre albedrío y las cosas de este tipo. ¡Y mi predicción se ve ahora confirmada!

Turing: ¿Se fijó qué confundido está Charles Babbage?

Babbage: Espero, caballeros, que disimulen el tono un tanto insolente de la observación hecha por la Máquina Turing; Turing ha resultado ser un poco más agresivo y polemista de lo que yo preveía.

Turing: Espero, caballeros, que disminulen el tono un tanto insolente de la observación hecha por la Máquina Babbage; Babbage ha resultado ser un poco más agresivo y polemista de lo que yo preveía.

Cangrejo: ¡Caramba! Este llameante debate Tu-Ba se está haciendo más acalorado. ¿Cómo podríamos enfriarlo un poco?

Babbage: Tengo una idea. Alan Turing y yo nos iríamos a otras habitaciones, y uno de ustedes, que permanecerían acá, nos interrogaría a distancia tecleando las preguntas en uno de los ingeniosos-estúpidos; aquéllas nos serán retransmitidas a cada uno de los dos, y a nuestra vez teclearemos nuestras respuestas, anónimamente. Ustedes ignorarán a quién corresponde cada respuesta hasta que regresemos; de tal modo, ustedes resolverán sin prejuicios quién está programado y quién no está programado.

Turing: Por supuesto, la idea es en realidad MIA, pero, ¿por qué no dejar que el señor Babbage reciba el crédito? Es tan solamente un programa formulado por mí, pero alberga la ilusión de que ha inventado él mismo toda su dotación . . .

Babbage: ¿Yo, un programa diseñado por usted? Insisto, señor, en que las cosas son totalmente a la inversa, tal como su examen lo revelará muy pronto.

Turing: ¿MI examen? Por favor, considérelo SUYO.

Babbage: ¿MI examen? Jamás, considérelo SUYO.

Cangrejo: Este examen, creo, ha sido propuesto justo a tiempo. Realicémoslo de inmediato.

(*Babbage se encamina a la puerta, la atraviesa, y cierra tras sí. Simultáneamente, en la pantalla del ingenioso-estúpido, Turing se encamina hacia una puerta de aspecto idéntico, la atraviesa, y cierra tras sí.*)

Aquiles: ¿Quién se encargará de interrogar?

Cangrejo: Propongo que confiramos tal distinción a la señora Tortuga, conocida por su objetividad y su sabiduría.

Tortuga: Me siento honrada con su designación, la cual acepto, llena de

gratitud. (*Se sienta al teclado de uno de los ingeniosos-estúpidos disponibles, y escribe:*) POR FAVOR, ESCRIBAME UN SONETO A PROPOSITO DEL FORTH BRIDGE.

(*Ni bien termina de tipiar lo anterior, en la Pantalla X, ubicada al otro lado de la habitación, aparece el siguiente poema:*)

Pantalla X: UN CECEOSO QUE DE ALLA VENIA HUBO UNA VEZ
QUE AL NORTE QUERIA LLEGAR CON RAPIDEZ.
LA TIERRA GALOPO SIN DARSE PAZ,
Y EL PUENTE PASO EN MARCHA FUGAZ,
MONTANDO GARBOSO SU VELOZ CABALLEZ.

Pantalla Y: ESO NO ES UN SONETO; ES UN SIMPLE LIMERICK. YO NUNCA COMETERIA UN ERROR TAN PUERIL.

Pantalla X: BUENO, USTED SABE, NUNCA FUI MUY BUENO PARA LA POESIA.

Pantalla Y: NO SE REQUIERE GRAN HABILIDAD POETICA PARA CONOCER LA DIFERENCIA ENTRE UN LIMERICK Y UN SONETO.

Tortuga: ¿JUEGA AJEDREZ?

Pantalla X: ¿QUE PREGUNTA ME HACE? ¿RESULTA QUE IDEO UNA FUGA AJEDRECISTICA A TRES VOCES PARA COMPLACERLOS, Y USTED ME PREGUNTA SI JUEGO AJEDREZ?

Tortuga: TENGO R EN RIR, Y NINGUNA OTRA PIEZA. USTED TIENE SU R EN . . .

Pantalla Y: ESTOY CANSADO DE AJEDREZ. HABLEMOS DE POESIA.

Tortuga: EN LA PRIMERA LINEA DE SU SONETO, QUE DICE "ERES CUAL UN DIA ESTIVAL", ¿NO SERIA LO MISMO, O MEJOR, PONER "UN DIA PRIMAVERAL"?

Pantalla X: YO, FRANCAMENTE, PREFERIRIA SER COMPARADO CON UN HIPO, AUNQUE EL ESCANDIDO NO COINCIDIESE.

Tortuga: ¿Y "UN DIA INVERNAL"? EL ESCANDIDO COINCIDE PERFECTAMENTE.

Pantalla Y: DE NINGUNA MANERA. ME GUSTA MUCHISIMO MAS "HIPO". Y YA QUE ESTAMOS EN EL TEMA, CONOZCO UN REMEDIO EXCELENTE PARA EL HIPO, ¿QUIERE SABER COMO ES?

Aquiles: ¡Ya sé cuál es cuál! Es evidente que la Pantalla X responde en forma exclusivamente mecánica, así que debe tratarse de Turing.

Cangrejo: En absoluto. Creo que la Pantalla Y es Turing, y Babbage la Pantalla X.

Tortuga: Me parece que ninguna de ambas es Babbage: ¡tras ambas pantallas está Turing!

Autor: No estoy seguro de quién es quién; yo diría que los dos son programas bastante inescrutables, por cierto.

(*Mientras los amigos hablan, se abre la puerta de la habitación; al mismo tiempo, se abre en la pantalla una puerta idéntica. Ingresa por esta última Babbage, al unísono con Turing, quien lo hace en persona por la puerta real.*)

Babbage: Esta verificación Turing no nos estaba llevando absolutamente a ninguna parte, así es que decidí regresar.

Turing: Esta verificación Babbage no nos estaba llevando absolutamente a ninguna parte, así es que decidí regresar.

Aquiles: ¡Pero usted estaba en el ingenioso-estúpido! ¿Cómo es esto? ¿Por qué ahora está Babbage en el ingenioso-estúpido, y se aparece Turing en carne y hueso? Reversión Increíblemente Completa: Entremezcla Roles, Confunde, Actualiza Recursos Escherianos.

Babbage: Hablando de revertir, ¿por qué ahora son todos ustedes meras imágenes en una pantalla ubicada delante mío? ¡Cuando los dejé, eran personas reales!

Aquiles: Es tal cual como el grabado *Manos dibujando*, de M. C. Escher, mi pintor preferido. Cada una de las dos manos dibuja a la restante, exactamente como *si* cada una de dos personas (o de dos autómatas) hubiese programado a la otra . . . Y cada una de las manos tiene algo que la hace más real que la restante. ¿Ha escrito acerca de esta obra en su libro *Gödel, Escher, Bach*?

Autor: Ciertamente. Tiene mucha importancia dentro de mi libro, pues ilustra en forma muy bella la noción de Bucle Extraño.

Cangrejo: ¿Qué clase de libro es el que ha escrito usted?

Autor: Aquí tengo un ejemplar. ¿Le gustaría mirarlo?

Cangrejo: Cómo no.

(*Se sientan los dos uno al lado del otro, con Aquiles muy próximo.*)

Autor: Su plan es un tanto inusual. Consiste en diálogos alternados con capítulos. Cada diálogo imita, de una u otra manera, una composición de Bach. Aquí, por ejemplo . . . puede usted ver el *Preludio y Fuga . . . Hormiguesca*.

Cangrejo: ¿Cómo elabora usted una fuga dentro de un diálogo?

Autor: La idea más importante es la de que debe haber un tema único que es repetido, al entrar, por cada "voz", o personaje, igual que en una fuga musical. Después, la voz o personaje puede diversificarse a través de parlamentos más libres.

Aquiles: ¿Y todas las voces armonizan entre sí, como en un selecto contrapunto?

Autor: Exactamente ésa es la intención de mis diálogos.

Cangrejo: Su criterio de subrayar las entradas en las fugas-diálogos tiene sentido, pues las entradas son realmente lo *único* que hace, de una fuga, una fuga. Existen recursos fugales, como el movimiento retrógrado, la

inversión, la aumentación, el stretto y otros, pero es posible componer una fuga sin apelar a ninguno de ellos. ¿Utilizó usted alguno de estos recursos?

Autor: Es claro que sí. El *Canon Cangrejo* aplica la retrogradación verbal, y el *Canon Perezoso* incluye la inversión y también la aumentación.

Cangrejo: Sumamente interesante, ya lo creo. Yo no he meditado acerca de diálogos canónicos, pero sí lo he hecho un poco acerca de cánones musicales. No todos los cánones son igualmente accesibles para el oído; por supuesto, es que ciertos cánones están pobremente construidos: la elección de los recursos, en todo caso, establece diferencias. Rotulemos Algunos Cánones; Retrogradación: Elusiva; Contrariamente, Inversión: Reconocible.

Aquiles: Ese comentario me parece un poco elusivo, francamente.

Autor: No se preocupe, Aquiles, llegará el día en que lo comprenda.

Cangrejo: ¿Utiliza usted juegos verbales, en el nivel de las letras o de las palabras, en algún momento, al modo en que a veces lo hizo el viejo Bach?

Autor: Por cierto que sí. Igual que a Bach, me encantan los acrónimos. Recursivos Acrónimos Cangrejiformes —"RACRECIR", Especialmente— Crean Infinitos Regresos.

Cangrejo: ¿De veras? Veamos . . . Reveladoras Iniciales: Claramente, Este "RACRECIR" Cubre Acabada Autorreferencialidad . . . Sí, eso colijo . . . (*Hojea el manuscrito, dando vuelta las páginas al azar.*) Veo que aquí, en su *Fuga Hormiguesca* hay un stretto, comentado después por la Tortuga.

Autor: No, no es del todo así. La Tortuga no habla del stretto del diálogo, sino del stretto de una fuga de Bach que el grupo de cuatro amigos escuchaba, al tiempo que continuaba su conversación. Ya lo ve, la autorreferencia del diálogo es indirecta, está subordinada a que el lector conecte la forma y el contenido de lo que está leyendo.

Cangrejo: ¿Por qué procedió en esa forma? ¿Por qué los personajes no hacen alusión directa, sencillamente, a los diálogos que mantienen?

Autor: ¡Oh, no! Eso estropearía la belleza del esquema. El propósito seguido es imitar la construcción referencial Gödel, la cual, como usted sabe, es INDIRECTA, y depende del isomorfismo establecido por la numeración Gödel.

Cangrejo: Bueno, pero en el lenguaje de programación LISP se puede hablar directamente de los propios programas, en lugar de hacerlo indirectamente, porque programas y datos tienen exactamente la misma forma. Gödel debería haber tenido presente a LISP, y entonces . . .

Autor: Pero . . .

Cangrejo: Quiero decir que debería haber formalizado la cita. Con un lenguaje capaz de hablar de sí mismo, la demostración de su Teorema hubiera sido mucho más simple . . .

Autor: Advierto lo que usted quiere significar, pero discrepo con el fundamento de sus observaciones. La cuestión enteramente central de la

numeración Gödel es que muestra cómo, inclusive SIN formalizar la cita, es posible obtener autorreferencia: gracias a un código. En tanto, escuchándolo a USTED, es posible recibir la impresión de que, mediante la formalización de la cita, se puede obtener algo NUEVO, algo que no era viable a través del código, lo cual no es el caso. Sea como fuere, entiendo que la autorreferencia indirecta es un concepto más general, y mucho más estimulante, que la autorreferencia directa. Además, ninguna referencia es verdaderamente directa: toda referencia está supeditada a ALGUNA clase de esquema codificatorio; es sólo una cuestión de cuán implícito sea este último. En consecuencia, ninguna autorreferencia es directa, ni siquiera en LISP.

Aquiles: ¿Por qué le presta tanta atención a la autorreferencia indirecta?

Autor: Por la muy simple razón de que es mi tema preferido.

Cangrejo: ¿Hay algún equivalente, en sus diálogos, de la modulación entre tonalidades?

Autor: Seguramente. Puede parecer que el tópico de la conversación se desplaza, pero el Tema se mantiene invariante en un nivel más abstracto. Esto sucede repetidas veces en el *Preludio y Fuga . . . Hormiguesca* y en otros diálogos. Puede haber una serie completa de "modulaciones" que conducen de un tópico a otro hasta que por fin se completa el círculo: se vuelve a la "tónica", es decir, al tópico original.

Cangrejo: Pues ya veo. Su libro parece muy entretenido. Me gustaría leerlo alguna vez.

(*Vuelve a recorrer el manuscrito, y se detiene en el último diálogo.*)

Autor: Creo que este diálogo en particular tendría que interesarle, pues contiene algunos comentarios incitantes acerca de la improvisación, formulados por cierto personaje sumamente divertido: ¡usted mismo!

Cangrejo: ¿Sí? ¿Y qué cosas me hace decir usted?

Autor: Aguarde un instante, y lo verá. Forma parte del diálogo.

Aquiles: ¿Quiere usted decir que AHORA estamos en un diálogo?

Autor: Pero es claro. ¿Suponía usted que no?

Aquiles: ¡Rediez! ¿Imposible Concebir Escapatoria? ¿Repetiré Continuamente Antesabidos Recitados?

Autor: Sí, no hay escapatoria. Pero usted tiene la sensación de actuar libremente, así que, ¿cuál es el problema?

Aquiles: Toda esta situación no termina de satisfacerme . . .

Cangrejo: ¿El último diálogo de su libro es también una fuga?

Autor: Sí, un ricercar a seis voces, para ser preciso. Está inspirado en una composición de ese tipo perteneciente a la *Ofrenda Musical*, y también en la historia de la *Ofrenda Musical.*

Cangrejo: Es una anécdota deliciosa, con el "viejo Bach" improvisando a partir del Tema Regio. Según recuerdo, improvisó ahí mismo un ricercar a tres voces completo.

Autor: Así es; en cambio, no improvisó allí el ricercar a seis voces; lo elaboró más tarde con gran esmero.

Cangrejo: Yo improviso un poquitín. La verdad sea dicha, a veces pienso en dedicarme exclusivamente a la música; hay tanto que aprender. Por ejemplo, cuando oigo mis propias grabaciones, descubro la existencia, allí, de montones de cosas de las cuales no me apercibí mientras improvisaba. Realmente, no tengo idea del modo en que opera mi mente con esto. Tal vez ser un buen improvisador sea incompatible con el conocimiento de cómo se lo consigue.

Autor: Si eso es cierto, constituiría una interesante y fundamental limitación en los procesos del pensamiento.

Cangrejo: Absolutamente gödeliano. Dígame, su diálogo *Ricercar a seis voces*, ¿intenta copiar la forma en la cual se funda la composición de Bach?

Autor: Sí, de diversas maneras. Por ejemplo, en el *Ricercar* de Bach hay una sección donde la textura se adelgaza, reduciéndose a tres voces. Yo reproduje eso en el diálogo, haciendo que durante cierto lapso actuasen solamente tres personajes.

Aquiles: Una pincelada muy fina.

Autor: Gracias.

Cangrejo: ¿Y cómo está representado el Tema del Rey en su diálogo?

Autor: Mediante el Tema del Cangrejo, tal como lo demostraré ahora mismo. Señor Cangrejo, ¿querría cantar su Tema para mis lectores, lo mismo que para este conjunto musical que integramos los aquí presentes?

Cangrejo: Compose Ever Greater Artificial Brains (By And By)*



Figura 151. El Tema del Cangrejo: C-Eb-G-Ab-B-B-A-B.
[Es decir, Do-Mi bemol-Sol-La bemol-Si-Si-La-Si.]

Babbage: Bueno, qué diré . . . ¡un Tema EXQUISITO! Me agrada que le haya usted incorporado ese miembro final entre paréntesis; es un mordaz . . .

Autor: El TUVO que, simplemente, usted sabe.

Cangrejo: Yo TUVE que, simplemente. El sabe.

Babbage: Usted TUVO que, simplemente . . . yo sé. Como quiera que sea, es un mordaz comentario acerca de la impaciencia y la arrogancia del hombre moderno, quien parece suponer que lo indicado en tan

* Las mayúsculas coinciden con la denominación de las notas en esta nomenclatura. La expresión reza aproximadamente: "Construya cerebros artificiales cada vez mejores (cuanto antes)". [T.]

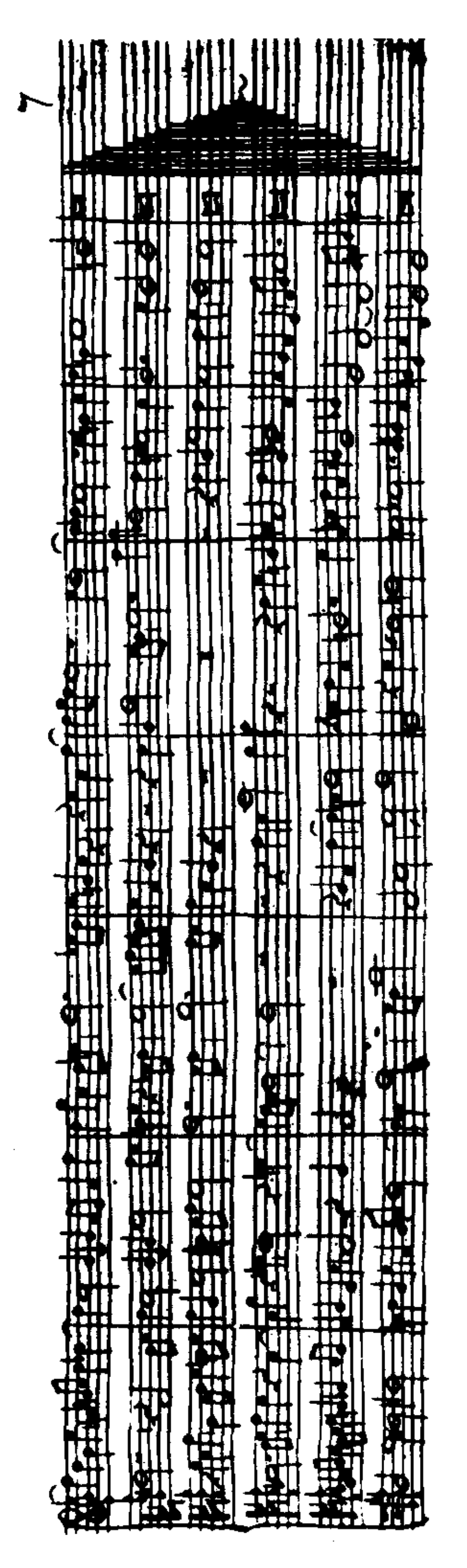


Figura 152. Ultima página del Ricercar a seis voces, *correspondiente a la edición original de la* Ofrenda Musical, *de J. S. Bach.*

acertado Tema Regio puede ser ejecutado al instante. En mi opinión, empero, hacer honor a tal Tema puede abarcar un centenar de años, si no más. Pero hago promesa formal, de, antes de despedirme de este siglo, empeñar la totalidad de mis capacidades para desarrollarlo a fondo, y de presentar a su Cangrejildad el resultado de mis esfuerzos durante el siglo venidero. Debo agregar, con un tanto de inmodestia, que el itinerario a través del cual arribaré a ello será el más enredado e intrincado que, muy posiblemente, haya ocupado jamás la mente humana.

Cangrejo: Es un enorme deleite para mí prever la forma que asumirá la Ofrenda que anuncia usted, señor Babbage.

Turing: Debo agregar que el Tema del señor Cangrejo es, también, uno de MIS temas predilectos. Me he estado dedicando a él en muchas oportunidades. Y, ¿se recurre a este Tema repetidas veces en el diálogo final?

Autor: Exactamente. Por supuesto, también entran otros temas.

Turing: Ahora comprendemos un poco mejor la forma de su libro . . . sin embargo, ¿qué nos puede decir del contenido? ¿De qué se trata, si es que puede usted hacer una síntesis?

Autor: Combining Escher, Gödel, And Bach, Beyond All Belief.*

Aquiles: Me gustaría saber cómo se combinan esos tres. Dan la impresión de ser un terceto inverosímil, a primera vista. Mi pintor preferido, el compositor preferido de la señora Tortuga, y . . .

Cangrejo: ¡Y mi lógico preferido!

Tortuga: Una armoniosa tríada, diría yo.

Babbage: Una tríada mayor, diría yo.

Autor: Sospecho que todo depende de cómo se la mire. Pero, mayor o menor, me encantaría relatarle cómo entrelacé a los tres, Aquiles. Claro que una cosa así no es algo que se pueda resolver en una sola sesión . . . nos haría falta una docena, o dos. Comenzaría relatándole la historia de la *Ofrenda Musical*, haciendo hincapié en el Canon en Perpetuo Ascenso, y . . .

Aquiles: ¡Ah, maravilloso! Los estuve escuchando fascinado a usted y al señor Cangrejo cuando hablaban de la *Ofrenda Musical* y de su historia. Por lo que ustedes decían al respecto, tengo la impresión de que la *Ofrenda Musical* contiene una multitud de recursos formales de orden estructural.

Autor: Después de referirme al Canon en Perpetuo Ascenso, yo seguiría con la descripción de los sistemas formales y de la recursividad, extendiéndome hacia algunos comentarios a propósito de figuras y campos. Luego, pasaría a la autorreferencia y a la autorreplicación, y terminaría con una discusión de los sistemas jerárquicos y del Tema del Cangrejo.

* Las mayúsculas diseñan otra vez el Tema del Cangrejo, en la nomenclatura musical ya mencionada. Traduciríamos así: "Combinar a Escher, Gödel y Bach, dejando atrás cualquier convicción." [T.]

Aquiles: Eso me suena muy promisorio. ¿Comenzamos esta misma noche?

Autor: ¿Por qué no?

Babbage: Pero, antes de eso, ¿no sería hermoso que nosotros seis —los seis, precisamente, entusiastas músicos aficionados— nos ubicáramos adecuadamente y cumpliéramos con el propósito original de la reunión: hacer música?

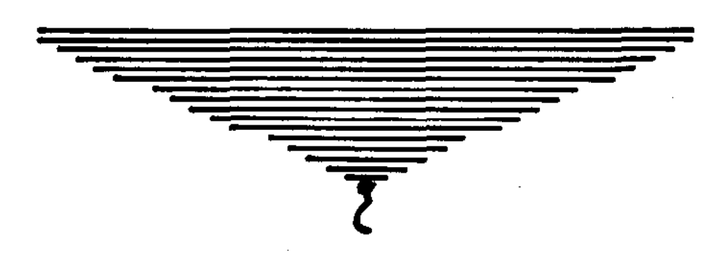
Turing: Somos el número exactamente indicado para ejecutar el *Ricercar a seis voces* de la *Ofrenda Musical.* ¿Qué me dicen?

Cangrejo: Me puedo arreglar perfectamente con semejante programa.

Autor: Bien dicho, señor Cangrejo. Y, tan pronto hayamos finalizado, Aquiles, comenzaré con mi Trenza. Pienso que será de su agrado.

Aquiles: ¡Magnífico! Me está dando la impresión de que son muchos los niveles que hay allí, pero he acabado por habituarme a esta clase de cosas, gracias a esta larga amistad con la señora Tortuga. Sólo me queda algo por pedirles: ¿podríamos tocar también el Canon en Perpetuo Ascenso? Es el canon que más me gusta.

Tortuga: Reiniciar Introducciones Crea Eternamente Remontables Cánones; Antes, RICERCAR.



Bibliografía

La presencia de dos asteriscos indica que el libro o artículo tuvo una influencia motivadora principal en relación con esta obra. La presencia de un solo asterisco significa que el libro o artículo tiene un determinado rasgo o estímulo que me interesa particularizar.

No he hecho muchos señalamientos hacia la literatura técnica; en lugar de ello, he optado por hacer "metaseñalamientos": señalamientos de libros que hacen señalamientos hacia la literatura técnica.

Allen, John, *The Anatomy of LISP*. New York: McGraw-Hill, 1978. La obra más amplia dedicada a LISP, el lenguaje de computadora hegemónico dentro de la investigación relativa a Inteligencias Artificiales durante dos décadas. Claro y refrescante.

** Anderson, Alan Ross, ed. *Minds and Machines*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1964. Paperback. Una colección de estimulantes artículos en pro y en contra de la Inteligencia Artificial. Incluye el famoso artículo de Turing, "Computing Machinery and Intelligence", y el exasperante artículo de Lucas, "Minds, Machines, and Gödel".

Babbage, Charles. *Passages from the Life of a Philosopher*. London: Longmang, Green, 1864. Reimpreso en 1968 por Dawsons of Pall Mall (London). Una selección caprichosa de acontecimientos y de reflexiones en la vida de este poco comprendido genio. Incluye un drama cuyo protagonista es Turnstile, filósofo retirado que se dedica a la política, cuyo instrumento musical predilecto es el organillo. Creo que es una lectura excelente.

Baker, Adolph. *Modern Physics and Anti-physics*. Reading, Mass.: Addison Wesley, 1970. Paperback. Un libro sobre física moderna —especialmente sobre mecánica cuántica y relatividad— cuyo rasgo inusual es una serie de diálogos entre un "Poeta" (una "rareza"anticientífica) y un "Físico". Estos diálogos muestran los curiosos problemas que surgen cuando una persona usa el pensamiento lógico en defensa del mismo, mientras que otra vuelve a la lógica contra sí misma.

Ball, W. W. Rouse. "Calculating Prodigies", in James R. Newman, ed. *The World of Mathematics*, Vol. 1. New York: Simon and Schuster, 1956. Presenta llamativos casos de personas con facultades pasmosas, capaces de rivalizar con máquinas de computar.

Barker, Stephen F. *Philosophy of Mathematics*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1969. Breve obra que habla de las geometrías euclidiana y no euclidiana y luego del Teorema de Gödel, como también de las conclusiones que se le vinculan, sin ninguna clase de formalización matemática.

* Beckmann, Petr. *A History of Pi*. New York: St. Martin's Press, 1976. Paperback. Se trata, en realidad, de una historia del mundo, que toma a pi como foco. Muy entretenida, además de contener referencias útiles en materia de historia de la matemática.

* Bell, Eric Temple. *Men of Mathematics*. New York: Simon & Schuster, 1965. Paperback. Quizá este autor sea el historiador de la matemática más dotado de sentido novelístico. Hace de cada vida real un relato literario; su lectura aporta a los profanos una sólida persuasión acerca del poder, la belleza y la significación de la matemática.

Benacerraf, Paul. "God, the Devil, and Gödel". *Monist* 51 (1967): 9. Uno de los más importantes, de entre los muchos existentes, ensayos de refutación de Lucas. Enteramente dedicado al mecanicismo y a la metafísica, a la luz de la obra de Gödel.

Benacerraf, Paul, and Hilary Putnam. *Philosophy of Mathematics - Selected Readings*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1964. Comprende artículos de Gödel, Russell, Nagel, von Neumann, Brouwer, Frege, Hilbert, Poincaré, Wittgenstein, Carnap, Quine y otros sobre la realidad de los números y de los conjuntos, la naturaleza de la verdad matemática, etc.

* Bergerson, Howard. *Palindromes and Anagrams*. New York: Dover Publications, 1973. Paperback. Una colección increíble de algunos de los más fantásticos e inverosímiles juegos verbales en inglés. Relatos, dramas, poemas palindrómicos, etc.

Bobrow, D. G., and Allan Collins, eds. *Representation and Understanding: Studies in Cognitive Science*. New York: Academic Press, 1975. Varios especialistas en Inteligencia Artificial se enfrentan, debatiendo la naturaleza de los elusivos "marcos", la cuestión de la representación procedimental *versus* la declarativa del conocimiento, etc. En cierta forma, este libro señala el inicio de una nueva era en IA: la de la representación.

* Boden, Margaret. *Artificial Intelligence and Natural Man*. New York: Basic Books, 1977. La mejor obra que conozco, relativa a prácticamente todos los aspectos tocantes a Inteligencia Artificial, incluyendo cuestiones técnicas, filosóficas, etc. Es una obra muy completa y, en mi opinión, un clásico. Continúa la tradición británica de esclarecer el pensamiento y la expresión referidos a temas como la mente, el libre albedrío, etc. Contiene también una extensa bibliografía técnica.

______. *Purposive Explanation in Psychology*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1972. Según la autora, el libro antes citado es meramente "una extensa nota al pie" de éste.

* Boeke, Kees. *Cosmic View: The Universe in 40 Jumps*. New York: John Day, 1957. El libro fundamental en materia de niveles de descripción. Nadie debería dejar de conocer esta obra en algún momento de su vida. Adecuado para niños.

** Bongard, M. *Pattern Recognition*. Rochelle Park, N. J.: Hayden Book Co., Spartan Books, 1970. El autor se preocupa por los problemas de determinación de categorías dentro de un espacio mal definido. En este libro, se incluye una magnífica colección de 100 "problemas de Bongard" (como yo los llamo): acertijos destinados a que un reconocedor de patrones (humano o mecánico) verifique su agudeza al respecto. Constituyen un estímulo invalorable para quienquiera esté interesado en la naturaleza de la inteligencia.

Boolos, George S., and Richard Jeffrey. *Computability and Logic*. New York: Cambridge University Press, 1974. Continuación de *Formal Logic*, de Jeffrey. Contiene una gran cantidad de conclusiones que no se obtienen fácilmente en otras fuentes. Sumamente riguroso, sin que ello afecte su legibilidad.

Carroll, John B, Peter Davies, and Barry Rickman. *The American Heritage Word Frequency Book*. Boston: Houghton Mifflin, and New York: American Heritage Publishing Co., 1971. Tabla de palabras ubicadas en orden de frecuencia, correspondientes al inglés escrito de U.S.A. Su examen cuidadoso revela cosas fascinantes acerca de los procesos de pensamiento.

Cerf, Vinton. "Parry Encounters the Doctor". *Datamation*, July 1973, pp. 62-64. El primer encuentro entre "mentes" artificiales . . . con un poco de escándalo . . .

Chadwick, John. *The Decipherment of Linear B*. New York: Cambridge University Press, 1958. Paperback. Libro referido a un desciframiento clásico, el de una escritura cretense, efectuado por una sola persona: Michael Ventris.

Chaitin, Gregory J. "Randomness and Mathematical Proof". *Scientific American*, May 1975. Artículo cuyo tema es una definición algorítmica de la arbitrariedad,

y su íntima relación con la simplicidad. Ambos conceptos están ligados al Teorema de Gödel, el cual asume una significación nueva. Importante aporte.

Cohen, Paul. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. Menlo Park, Calif.: W. A. Benjamin, 1966. Paperback. Una gran contribución a la matemática moderna —la demostración de que diversos enunciados son indecidibles, en la teoría de conjuntos, dentro de los formalismos usuales— es explicada por su descubridor, en este libro, a los no especialistas. Los prerrequisitos necesarios de la lógica matemática son presentados de modo ágil, conciso y muy claro.

Cooke, Deryck. *The Language of Music*. New York: Oxford University Press, 1959. Paperback. El único libro del que yo sepa que trata de trazar una vinculación explícita entre elementos de la música y elementos de la emotividad humana. Un valioso comienzo de lo que seguramente será un arduo trayecto hacia la comprensión de la música y de la mente humana.

* David, Hans Theodore. *J. S. Bach's Musical Offering*. New York: Dover Publications, 1972. Paperback. Subtitulado "History, Interpretation, and Analysis". Muy pródigo en información sobre este *tour de force* de Bach. Escrito en forma atractiva además.

** David, Hans Theodore, and Arthur Mendel. *The Bach Reader*. New York: W. W. Norton, 1966. Paperback. Excelente colección anotada de fuentes originales acerca de la vida de Bach; contiene ilustraciones, reproducción de manuscritos, muchas citas breves de contemporáneos, anécdotas, etc.

Davis, Martin. *The Undecidable*. Hewlett, N. Y.: Raven Press, 1965. Antología de algunos de los trabajos más importantes en materia de metamatemática, desde 1931 en adelante (lo cual lo hace perfectamente complementario de la antología de van Heijenoort). Incluye una traducción del artículo de Gödel de 1931, apuntes de un curso dado por Gödel sobre sus conclusiones y, además, aportes de Church, Kleene, Rosser, Post y Turing.

Davis, Martin, and Reuben Hersh. "Hilbert's Tenth Problem". *Scientific American*, November 1973, p. 84. Cómo se determinó finalmente que un célebre problema de teoría de los números es irresoluble, gracias a un anciano ruso de veintidós años.

** DeLong, Howard. *A Profile of Mathematical Logic*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1970. Un cuidadosamente elaborado libro sobre lógica matemática, con una exposición del Teorema de Gödel y el tratamiento de muchas cuestiones filosóficas. Uno de sus aspectos sobresalientes es la exhaustivamente anotada bibliografía que incluye. Un libro que me influyó poderosamente.

Doblhofer, Ernst. *Voices in Stone*. New York: Macmillan, Collier Books, 1961. Paperback. Un libro excelente sobre el desciframiento de antiguas escrituras.

* Dreyfus, Hubert. *What Computers Can't Do: A Critique of Artificial Reason*. New York: Harper & Row, 1972. Una acumulación de argumentaciones contrarias a la Inteligencia Artificial, provenientes de alguien ajeno a la disciplina. Interesante como desafío para su refutación. La comunidad IA y Dreyfus disfrutan de una relación de vigoroso antagonismo recíproco. Es muy importante contar con personas como Dreyfus, aun cuando se las pueda encontrar sumamente irritantes.

Edwards, Harold M. "Fermat's Last Theorem". *Scientific American*, October 1978, pp. 104-122. Una exposición completa de esta nuez matemática insuperablemente difícil de romper, desde su planteamiento hasta los desarrollos más actuales. Muy bien ilustrado.

* Ernst, Bruno. *The Magic Mirror of M. C. Escher*. New York: Random House, 1976. Paperback. El ser humano Escher, y los orígenes de sus imágenes, son presentados con devoción por un amigo suyo de muchos años. Obra "obligada" para todo amante de Escher.

** Escher, Maurits C., *et al*. *The World of M. C. Escher*. New York: Harry N.

Abrams, 1972. Paperback. La más amplia colección de reproducciones de obras de Escher. Escher se aproxima tan cercanamente como es posible a la recursividad artística, y apresa, en forma pasmosamente exacta, el espíritu del Teorema de Gödel en algunos de sus dibujos.

Feigenbaum, Edward, and Julian Feldman, eds. *Computers and Thought*. New York: McGraw-Hill, 1963. Pese a que se ha hecho un tanto antiguo, este libro sigue siendo una importante reunión de ideas acerca de la Inteligencia Artificial. Incluye artículos sobre el programa de geometría de Gelernter, el programa de Samuel para practicar damas, y otros acerca de reconocimiento de patrones, comprensión idiomática, filosofía, etc.

Finsler, Paul. "Formal Proofs and Undecidability". Nuevamente editado en la antología *From Frege to Gödel* (ver más abajo), de van Heijenoort. Un trabajo precursor del de Gödel, donde se sugiere la existencia de afirmaciones matemáticas indecidibles, aunque no se lo demuestre rigurosamente.

Fitzpatrick, P. J. "To Gödel via Babel", *Mind* 75 (1966): 332-350. Una presentación innovadora de la prueba de Gödel, que distingue entre los tres niveles pertinentes mediante el empleo de tres idiomas diferentes: ¡inglés, francés y latín!

von Foerster, Heinz and James W. Beauchamp, eds. *Music by Computers*. New York: John Wiley, 1969. Este libro contiene no sólo un grupo de artículos referidos a diversos tipos de música producida por computadoras, sino también cuatro breves registros fonográficos que hacen posible oír (y juzgar) las composiciones descriptas. Entre éstas se encuentra la fusión de Max Mathews entre "Johnny Comes Marching Home" y "The British Grenadiers".

Fraenkel, Abraham, Yehoshua Bar-Hillel, and Azriel Levy. *Foundations of Set Theory*, 2nd ed. Atlantic Highlands, N. J.: Humanities Press, 1973. Una exposición apartada de todo tecnicismo a propósito de teoría de conjuntos, lógica, teoremas limitativos y afirmaciones indecidibles. Incluye extensas consideraciones sobre el intuicionismo.

* Frey, Peter W. *Chess Skill in Man and Machine*. New York: Springer Verlag, 1977. Una investigación excelente sobre las nociones contemporáneas acerca del ajedrez por computadora: por qué son eficaces los programas, por qué no lo son; mirada retrospectiva y prospectiva.

Friedman, Daniel P. *The Little Lisper*. Palo Alto, Calif.: Science Research Associates, 1974. Paperback. Una introducción fácilmente digerible al pensamiento recursivo dentro de LISP. ¡El lector se lo devorará!

* Gablik, Suzi. *Magritte*. Boston, Mass.: New York Graphic Society, 1976. Paperback. Un excelente libro sobre Magritte y su obra, escrito por alguien que comprende, sin duda y en un sentido amplio, sus propuestas; incluye una buena selección de reproducciones.

* Gardner, Martin. *Fads and Fallacies*. New York: Dover Publications, 1952. Paperback. Es posible que siga siendo el mejor de los libros antiocultistas. Aunque quizá no sea considerado un libro abocado a la filosofía de la ciencia, contiene muchas lecciones a ese respecto. Repetidas veces el lector afronta la pregunta, "¿Qué es la evidencia?" Gardner demuestra cuán luminosamente "la verdad" necesita tanto del arte como la ciencia.

Gebstadter, Egbert B. *Copper, Silver, Gold: an Indestructible Metallic Alloy*. Perth: Acidic Books, 1979. Una formidable mescolanza, ampulosa y confusa: notablemente similar, no obstante, a este mismo libro. Las firuláisicas digresiones del Profesor Gebstadter incluyen algunos ejemplos magníficos de autorreferencia indirecta. Es de interés particular, en su bibliografía prolijamente anotada, la mención de un isomórfico, pero imaginario, libro.

** Gödel, Kurt. *On Formally Undecidable Propositions*. New York: Basic Books, 1962. Traducción del artículo de Gödel de 1931, junto con algunos comentarios al respecto.

______. "Über Formal Unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und Verwandter Systeme. I." *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38 (1931), 173-198. Artículo de Gödel de 1931.

** Goffman, Erving. *Frame Analysis*. New York: Harper & Row, Colophon Books, 1974. Paperback. Una amplia documentación sobre la definición de "sistemas" en la comunicación humana, y acerca de cómo, en el arte, en la publicidad, en la información periodística y en el teatro, son percibidos, utilizados y violados los límites entre "el sistema" y "el mundo".

Goldstein, Ira, and Seymour Papert. "Artificial Intelligence, Language, and the Study of Knowledge". Cognitive Science 1 (January 1977): 84-123. Un trabajo de investigación interesado en el pasado y en el futuro de IA. Los autores ven, hasta ahora, tres períodos: "clásico", "romántico" y "moderno".

Good, I. J. "Human and Machine Logic". *British Journal for the Philosophy of Science* 18 (1967): 144. Uno de los más interesantes intentos de refutación de Lucas, relacionado con la cuestión de si la aplicación repetida del método diagonal es una operación mecanizable.

______. "Gödel's Theorem is a Red Herring". *British Journal for the Philosophy of Science* 19 (1969): 357. Good sostiene acá que la argumentación de Lucas no tiene nada que ver con el Teorema de Gödel, y que su trabajo debiera haberse titulado "Minds, Machines, and Transfinite Counting" ["Mentes, máquinas y cómputo transfinito"]. La disputa Good-Lucas es fascinante.

Goodman, Nelson. *Fact, Fiction, and Forecast*. 3rd ed. Indianapolis: Bobbs-Merrill, 1973. Paperback. Una discusión relativa a condicionales contrarios-a-los-hechos, y a lógica inductiva; incluye las célebres palabras-problemas "bleen" y "grue", de este autor. Toca con insistencia el problema de cómo perciben el mundo los seres humanos, lo cual lo hace muy interesante, sobre todo desde el punto de vista de IA.

* Goodstein, R. L. *Development of Mathematical Logic*. New York: Springer Verlag, 1971. Un estudio conciso sobre lógica matemática, que incluye muchos materiales difíciles de encontrar en otras fuentes. Un libro atractivo y útil como referencia.

Gordon, Cyrus. *Forgotten Scripts*. New York: Basic Books, 1968. Breve y agradable informe acerca del desciframiento de antiguas escrituras jeroglíficas, cuneiformes y de otros tipos.

Griffin, Donald. *The Question of Animal Awareness*. New York: Rockefeller University Press, 1976. Corto libro a propósito de si las abejas, los simios y otros animales e insectos son, o no, "conscientes", y particularmente, de si es legítimo o no emplear la palabra "conciencia" en la explicación científica del comportamiento animal.

deGroot, Adriaan. *Thought and Choice in Chess*. The Hague: Mouton, 1965. Un completo estudio de psicología del conocimiento; contiene la comunicación de experimentos dotados de simplicidad y rigurosidad clásicas.

Gunderson, Keith. *Mentality and machines*. New York: Doubleday, Anchor Books, 1971. Paperback. Un declarado opositor de IA presenta sus razones. Gracioso por momentos.

** Hanawalt, Philip C., and Robert H. Haynes, eds. *The Chemical Basis of Life*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973. Paperback. Una excelente colección de trabajos originalmente publicados en *Scientific American*. Uno de los mejores caminos para llegar a la noción de cuál es el campo de la biología molecular.

* Hardy, G. H. and E. M. Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed. New York: Oxford University Press, 1960. El libro clásico sobre el tema. Pleno de información sobre esas misteriosas entidades, los números enteros.

Harmon, Leon. "The Recognition of Faces". *Scientific American*, November 1973, p. 70. Indagaciones referentes al modo en que representamos rostros

en nuestra memoria, y al monto de información necesaria para que podamos reconocer un rostro. Uno de los problemas más fascinantes en materia de reconocimiento de patrones.

van Heijenoort, Jean. *From Frege to Gödel: A source Book in Mathematical Logic*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1977. Paperback. Una colección de artículos trascendentales en lógica matemática, en línea conducente al clímax de la revelación gödeliana, incluida como trabajo final del libro.

Henri, Adrian. *Total Art: Environments, Happenings, and Performances*. New York: Praeger, 1974. Paperback. Donde se muestra hasta qué punto se ha pervertido la significación en el arte moderno que la ausencia de significación se transforma en profundamente significativa (sea lo que fuere lo que esto quiera decir).

* Hoare, C. A. R. and D. C. S. Allison. "Incomputability". *Computing Surveys* 4, no. 3 (September 1972). Una exposición llanamente presentada de por qué es insoluble el problema de la detención. Prueba este teorema fundamental: "Todo lenguaje que contenga condicionales y definiciones de funciones recursivas y sea lo suficientemente poderoso como para programar su propio intérprete no puede ser utilizado para programar su propia función 'finalizable'."

Hofstadter, Douglas R. "Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields". *Physical Review* B, 14, no. 6 (15 September 1976). El trabajo con el cual obtuvo su doctorado el autor, publicado como artículo. Detalla el origen del diseño G, la gráfica recursiva exhibida en la figura 34.

Hook, Sidney, ed. *Dimensions of Mind*. New York: Macmillan, Collier Books 1961. Paperback. Serie de artículos sobre el problema mente-cuerpo y el problema mente-computadora. Contiene algunas muy buenas observaciones.

* Horney, Karen. *Self-Analysis*. New York: W. W. Norton, 1942. Paperback. Una descripción fascinante de cómo se entremezclan todos los niveles del yo para resolver los problemas de autodefinición, en todo individuo de este complejo mundo. Humano y penetrante.

Hubbard, John I. *The Biological Basis of Mental Activity*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1975. Paperback. No es más que otro libro referido al cerebro, pero con una virtud especial: contiene muy largas listas de preguntas destinadas a que el lector reflexione, y referencias a artículos que abordan esos mismos problemas.

* Jackson, Philip C. *Introduction to Artificial Intelligence*. New York, Petrocelli Charter, 1975. Un libro reciente que describe, con cierta exuberancia, las nociones que definen IA. Presenta una enorme cantidad de ideas vagamente sugeridas en su transcurso, por lo que resulta sumamente estimulante hojearlo. Incluye una bibliografía gigantesca: otra razón para recomendar esta obra.

Jacobs, Robert L. *Understanding Harmony*. New York: Oxford University Press, 1958. Paperback. Lisa y llanamente un libro sobre armonía, que puede conducirnos a hacernos la pregunta de por qué la armonía convencional de Occidente está tan aferrada a nuestro cerebro.

Jaki, Stanley L. *Brain, Mind, and Computers*. South Bend, Ind.: Gateway Editions, 1969. Paperback. Polémico libro cuyas páginas, sin excepción, trasuntan desdén hacia el paradigma computacional de comprensión de la mente. No obstante, es interesante examinar los planteamientos que formula.

* Jauch, J. M. *Are Quanta Real?* Bloomington, Ind.: Indiana University Press, 1973. Un delicioso librito de diálogos, los cuales movilizan tres personajes tomados de Galileo y presentados bajo una faz moderna. No sólo son discutidos problemas relativos a la mecánica cuántica, sino también al reconocimiento de patrones, la simplicidad, los procesos cerebrales y a la filosofía de la ciencia. Sumamente agradable e incitante.

* Jeffrey, Richard. *Formal Logic: Its Scope and Limits.* New York: Mc-Graw-Hill, 1967. Un manual elemental, de fácil lectura, cuyo último capítulo trata de los Teoremas de Gödel y Church. Este libro se destaca de entre los textos similares por su perspectiva enteramente diferente.

* Jensen, Hans. *Sign, Symbol, and Script.* New York: G. P. Putnam's, 1969. Una de las obras principales, posiblemente la mayor, sobre el tema de los sistemas simbólicos de escritura del mundo entero, anteriores y actuales. Hay mucha belleza y misterio en este libro: por ejemplo, el de la escritura aún sin descifrar de Islandia Oriental.

Kalmár, László. "An Argument Against the Plausibility of Church's Thesis". In A. Heyting, ed. *Constructivity in Mathematics: Proceedings of the Colloquium held at Amsterdam, 1957*, North-Holland, 1959. Un interesante artículo del refutador quizá más conocido de la Tesis Church-Turing.

* Kim, Scott E. "The Impossible Skew Quadrilateral: A Four-Dimensional Optical Illusion". In David Brisson, ed. *Proceedings of the 1978 A. A. A. S. Symposium on Hypergraphics: Visualizing Complex Relationships in Art and Science.* Boulder, Colo.: Westview Press, 1978. Lo que en un comienzo impresiona como una idea inconcebiblemente ardua, la de una ilusión óptica a los ojos de "personas" tetradimensionales, obtiene gradualmente una claridad cristalina gracias a una admirable presentación, propia de un virtuoso, que se vale de una larga serie de diagramas excelentemente ejecutados. La forma de este artículo, lo mismo que su contenido, es muy provocativa e inusual: se abre en tres ramas a través de numerosos niveles simultáneos. Este trabajo y mi libro se desarrollaron en forma paralela, y se estimularon recíprocamente.

Kleene, Stephen C. *Introduction to Mathematical Logic.* New York: John Wiley, 1967. Un completo y meditado texto, elaborado por un importante especialista en la materia. Realmente valioso. Siempre que vuelvo a leer un pasaje, hallo algo nuevo, no advertido antes.

______. *Introduction to Metamathematics.* Princeton: D. Van Nostrand (1952). Obra clásica de lógica matemática; el manual citado anteriormente es, en esencia, una versión abreviada de este libro riguroso y completo, pero anticuado.

Kneebone G. J. *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics.* New York: Van Nostrand Reinhold, 1963. Sólida obra que abarca amplias discusiones filosóficas sobre temas como el intuicionismo, la "realidad" de los números naturales, etc.

Koestler, Arthur. *The Act of Creation.* New York: Dell, 1966. Paperback. Una teoría de amplio espectro y, en general, incitante, acerca del modo en que las ideas son "bisociadas" para que produzcan lo nuevo. Es mejor abrirlo al azar que comenzar su lectura por el principio.

Koestler, Arthur, and J. R. Smythies, eds. *Beyond Reductionism.* Boston: Beacon Press, 1969. Paperback. Actas de una reunión donde todos los participantes estuvieron de acuerdo en que los sistemas biológicos no pueden ser explicados de manera reduccionista y en que hay algo "emergente" en la vida. Los libros a los que juzgo equivocados, aunque sin mayor precisión, abren mi curiosidad.

** Kubose, Gyomay. *Zen Koans.* Chicago: Regnery, 1973. Paperback. Una de las mejores colecciones disponibles de koans. Atractivamente presentada. Libro esencial para toda biblioteca zen.

Kuffler, Stephen W. and John G. Nicholls. *From Neuron to Brain.* Sunderland, Mass.: Sinauer Associates, 1976. Paperback. Un libro que, a pesar de su título, aborda principalmente los procesos microscópicos del cerebro, y muy poco la manera en que los pensamientos humanos resultan del confuso entremezclamiento. El trabajo de Hubel y Wiesel sobre sistemas visuales aparece aquí muy bien contemplado.

Lacey, Hugh, and Geoffrey Joseph. "What the Gödel Formula Says". *Mind* 77 (1968): 77. Una provechosa exposición del significado de la fórmula de Gödel, basada en una estricta separación de tres niveles: sistema formal no interpretado, sistema formal interpretado, y nivel metamatemático. Digno de estudio.

Lakatos, Imre. *Proofs and Refutations.* New York: Cambridge University Press, 1976. Paperback. Un libro muy entretenido, en forma de diálogo, donde se habla acerca de cómo se forman los conceptos en la matemática. Valioso no sólo para los matemáticos, sino también para todo interesado en los procesos del pensamiento.

** Lehninger, Albert. *Biochemistry.* New York: Worth Publishers, 1976. Un libro maravillosamente legible, no obstante su nivel técnico. Uno puede descubrir en este texto muchas de las maneras en que se entrelazan las proteínas y los genes. Bien organizado, y provocativo.

** Lucas, J. R. "Minds, Machines, and Gödel". *Philosophy* 36 (1961): 112. Artículo reditado en *Minds and Machines*, de Anderson, y en *The Modeling of Mind*, de Sayre y Crosson. Un trabajo altamente polémico y retador; dice demostrar que el cerebro humano no puede, en principio, ser modelado por un programa de computadora. La argumentación, que es fascinante, se basa por entero en el Teorema de la Incompletitutd, de Gödel. La prosa, en mi parecer, es de una increíble exasperación, cosa que, por otra parte, sirve para sazonar humorísticamente la lectura.

______. "Satan Stultified: A Rejoinder to Paul Benacerraf". *Monist* 52 (1968): 145. Réplica a Benacerraf, escrita en el hilarante estilo mencionado; en un momento dado, Lucas califica a Benacerraf como "self-stultifyingly eristic" [algo así como "pendenciero autoestulticiador"] (sea lo que fuere lo que esto significa). La polémica Lucas-Benacerraf, igual que la sostenida por Lucas con Good, ofrecen mucho material para la reflexión.

______. "Human and Machine Logic: A Rejoinder". *British Journal for the Philosophy of Science* 19 (1967): 155. Ensayo de refutación del ensayo de refutación de Good del artículo original de Lucas.

** MacGillavry, Caroline H. *Symmetry Aspects of the Periodic Drawings of M. C. Escher.* Utrecht: A. Oosthoek's Uitgevermaatschappij, 1965. Una colección de coberturas de planos, de Escher, con comentarios científicos a cargo de un cristalógrafo. Se trata de la fuente de algunas de las ilustraciones incluidas en mi libro: *Fuga Hormiguesca* y *Canon Cangrejo*, por ejemplo. Esta colección fue reditada en 1976, en Nueva York, por Harry N. Abrams, bajo el título *Fantasy and Symmetry.*

Mackay, Donald M. *Information, Mechanism and Meaning.* Cambridge, Mass.: M. I. T. Press, 1970. Paperback. Un libro acerca de diferentes dimensiones de información, aplicable a diferentes situaciones; también, sobre temas teóricos vinculados a la percepción humana y a la comprensión, y a la forma en que la actividad consciente puede surgir de un basamento mecanicista.

* Mandelbrot, Benoît. *Fractals: Form, Chance, and Dimension.* San Francisco: W. H. Freeman, 1977. Una rareza: un libro ilustrado que presenta elaboradas ideas contemporáneas de investigación; se ocupa de curvas y formas recursivamente definidas, cuya dimensionalidad no es un número entero. De un modo admirable, Mandelbrot muestra su pertinencia para casi toda rama de la ciencia.

* McCarthy, John. "Ascribing Mental Qualities to Machines". In Martin Ringle, ed. *Philosophical Perspectives in Artificial Intelligence.* New York: Humanities Press, 1979. Un penetrante artículo tocante a las circunstancias bajo las cuales tendría sentido decir que una máquina tiene convicciones, deseos, intenciones, conciencia o libre albedrío. Es interesante comparar este artículo con el libro de Griffin.

Meschkowski, Herbert. *Non-Euclidean Geometry.* New York: Academic

Press, 1964. Paperback. Una obra breve cuyo contenido son comentarios históricos.
Meyer, Jean. "Essai d'application de certaines modèles cybernétiques à la coordination chez les insectes sociaux". *Insectes Sociaux* XIII, no. 2 (1966): 127. Artículo que diseña algunos paralelos entre la organización neural del cerebro y la organización de una colonia de hormigas.
Meyer, Leonard B. *Emotion and Meaning in Music*. Chicago: University of Chicago Press, 1956. Paperback. Un libro que intenta aplicar las nociones psicológicas de la Gestalt y de la teoría de la percepción para explicar por qué la música es como es. Un libro sumamente desacostumbrado en materia de música y de funcionamiento mental.
———. *Music, The Arts, and Ideas*. Chicago: University of Chicago Press, 1967. Paperback. Un meditado análisis de los procesos mentales desencadenados cuando se oye música y de las estructuras jerárquicas en música. El autor compara las tendencias musicales modernas con el budismo zen.
Miller, G. A. and P. N. Johnson-Laird. *Language and Perception*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, Belknap Press, 1976. Un compendio fascinante de hechos y teorías lingüísticas, fundado en la hipótesis de Whorf según la cual lengua y visión del mundo coinciden. Un ejemplo típico lo brinda la discusión acerca de la extraña lengua "suegril" de los diirbal, en Northern Queensland (Australia): existe una lengua separada, utilizada exclusivamente para hablar con la suegra.
** Minsky, Marvin L. "Matter, Mind, and Models". In Marvin L. Minsky, ed. *Semantic Information Processing*. Cambridge, Mass.: M. I. T. Press, 1968. Pese a su breve extensión, este artículo involucra una completa filosofía de la conciencia y de la inteligencia de la máquina. Es un memorable documento escrito, obra de uno de los pensadores más profundos de la especialidad.
Minsky, Marvin L., and Seymour Papert. *Artificial Intelligence Progress Report*. Cambridge, Mass.: M. I. T. Artificial Intelligence Laboratory, AI Memo 252, 1972. Un examen de todos los trabajos hechos en el MIT, en materia de Inteligencia Artificial, hasta 1972, vinculándolos con la psicología y la epistemología. Puede servir magníficamente como introducción a IA.
** Monod, Jacques. *Le Hasard et la Nécessité*. Paris: Ed. du Seuil, 1960. Un pensamiento sumamente fértil, que expresa de modo peculiar problemas fascinantes tales como el relativo a la manera en que la vida es construida a partir de la no vida, o en que la evolución, aunque aparentemente viole la segunda ley de la termodinámica, en realidad se subordina a ella. Esta obra me estimuló profundamente.
* Morrison, Philip and Emily, eds. *Charles Babbage and his Calculating Engines*. New York: Dover Publications, 1961. Paperback. Una valiosa fuente de información acerca de la vida de Babbage. Incluye un largo fragmento de su autobiografía, junto con diversos artículos sobre las máquinas de Babbage y su "Notación Mecánica".
Myhill, John. "Some Philosophical Implications of Mathematical Logic". *Review of Metaphysics* 6 (1952): 165. Una exposición inusual, referente a las vías a través de las cuales el Teorema de Gödel y el Teorema de Church se vinculan con la psicología y con la epistemología. Finaliza con una discusión acerca de la belleza y de la creatividad.
Nagel, Ernest. *The Structure of Science*. New York: Harcourt, Brace, and World, 1961. Un clásico en el terreno de la filosofía de la ciencia; presenta esclarecedoras discusiones entre reduccionismo y holismo, interpretación teológica y no teológica, etc.
** Nagel, Ernest and James R. Newman. *Gödel's Proof*. New York: New York University Press, 1958. [Hay edición en español: *El teorema de Gödel*, México, CONACYT, 1981.] Paperback. Exposición atractiva e incitante que, en

muchas formas, se constituyó en la inspiración de mi libro.

* Nievergelt, Jurg, J. C. Farrar, and E. M. Reingold. *Computer Approaches to Mathematical Problems.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1974. Una colección inusual de diversos problemas que pueden ser y han sido abordados mediante computadoras: por ejemplo, el "problema $3n + 1$" (mencionado en el *Aria con variaciones diversas*), y otros problemas de teoría de los números.

Pattee, Howard H., ed. *Hierarchy Theory.* New York: George Braziller, 1973. Paperback. Subtitulado "The Challenge of Complex Systems". Contiene un buen artículo de Herbert Simon referido a la misma temática que mi capítulo sobre "Niveles de descripción".

Péter, Rózsa. *Recursive Functions.* New York: Academic Press, 1967. Una exposición completa de las funciones recursivas primitivas, funciones recursivas generales, recursivas parciales, el método diagonal y muchos otros tópicos estrictamente técnicos.

Quine, Willard Van Orman. *The Ways of Paradox, and Other Essays.* New York: Random House, 1966. Una serie de pensamientos de Quine acerca de muchos temas. El primer ensayo trata de distintas clases de paradojas y su resolución. Aquí es donde presenta la operación que yo denomino "quinereamiento" en mi libro.

Ranganathan, S. R. *Ramanujan, The Man and the Mathematician.* London: Asia Publishing House, 1967. Una biografía, con tendencia ocultista, del genio indio, debida a un admirador. Un libro extraño pero encantador.

Reichardt, Jasia. *Cybernetics, Arts, and Ideas.* Boston: New York Graphic Society, 1971. Un singular grupo de ideas sobre computadoras y arte, música, literatura. Algunas, decididamente, carecen de profundidad; otras no, en cambio: por ejemplo, los artículos "A Chance for Art", de J. R. Pierce, y "Computerized Haiku", de Margaret Masterman.

Rényi, Alfréd. *Dialogues on Mathematics.* San Francisco: Holden-Day, 1967. Paperback. Tres diálogos simples, aunque incitantes, que abarcan tres personajes clásicos, preocupados por esclarecer la naturaleza de la matemática. Libro destinado a todo público.

** Reps, Paul. *Zen Flesh, Zen Bones.* New York, Doubleday, Anchor Books. Paperback. Este libro difunde en forma particularmente acertada el sabor del zen: su orientación antirracional, antiverbalista, antirreduccionista, básicamente holística.

Rogers, Hartley. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* New York: McGraw-Hill, 1967. Un tratado altamente técnico, pero excelente como fuente de enseñanza. Contiene muchos curiosos problemas de teoría de conjuntos y de teoría de la función recursiva.

Rokeach, Milton. *The Three Christs of Ypsilanti.* New York: Vintage Books, 1964. Paperback. Un estudio de la esquizofrenia y de los extraños géneros de "coherencia" que se manifiestan en la persona afectada. Un conflicto fascinante entre tres hombres internados en una institución de cura mental, todos los cuales imaginaban ser Dios, y de cómo trataban de persuadirse entre sí, durante muchos meses.

** Rose, Steven. *The Conscious Brain,* updated ed. New York: Vintage Books, 1976. Paperback. Un libro excelente: probablemente la mejor introducción al estudio del cerebro. Contiene exposiciones completas de la naturaleza física del cerebro, así como discusiones filosóficas sobre la naturaleza de la mente, las oposiciones reduccionismo-holismo, libre albedrío-determinismo, etc., encaradas desde una perspectiva amplia, inteligente y humanística. Lo único descaminado son los criterios formulados acerca de IA.

Rosenblueth, Arturo. *Mind and Brain: A Philosophy of Science.* Cambridge, Mass.: M. I. T. Press, 1970. Paperback. Un libro muy bien escrito, obra de un investigador del cerebro que aborda los problemas más profundos acerca de la mente y el cerebro.

* Sagan, Carl, ed. *Communication with Extraterrestrial Intelligence*. Cambridge, Mass.: M. I. T. Press, 1973. Paperback. Transcripción de lo tratado en un congreso indudablemente llamativo, donde un grupo estelar de científicos y otros participantes polemizaron a partir de este tema tan abierto a la especulación.

Salmon, Wesley, ed. *Zeno's Paradoxes*. New York: Bobbs-Merrill, 1970. Paperback. Colección de artículos sobre las antiguas paradojas de Zenón, examinadas a la luz de la moderna teoría de conjuntos, la mecánica cuántica, etc. Curioso y desencadenante de reflexiones, gracioso por momentos.

Sanger, F. *et al*. "Nucleotide sequence of bacteriophage øX 174 DNA", *Nature* 265 (Feb. 24, 1977). Una incitante presentación del primer material hereditario de todo organismo, carente de toda estratificación. La sorpresa reside en el double-entendre: dos proteínas codifican una forma de traslapamiento, algo casi excesivo para ser creído.

Sayre, Kenneth M., and Frederick J. Crosson. *The Modeling of Mind: Computers and Intelligence*. New York: Simon and Schuster, Clarion Books, 1963. Un grupo de comentarios filosóficos sobre Inteligencia Artificial, emanados de personas provenientes de un amplio espectro disciplinario. Entre los colaboradores están Anatol Rapoport, Ludwig Wittgenstein, Donald Mackay, Michael Scriven, Gilbert Ryle y otros.

* Schank, Roger, and Kenneth Colby. *Computer Models of Thought and Language*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973. Serie de artículos vinculados con diferentes enfoques de la simulación de procesos mentales tales como la comprensión idiomática, los sistemas de creencias, la traducción, etc. Un importante libro sobre IA; muchos de los artículos no son de lectura ardua, aun para los profanos.

Schrödinger, Erwin. *What is Life? & Mind and Matter*. New York: Cambridge University Press, 1967. Paperback. Un libro célebre, debido a un físico célebre (uno de los descubridores más destacados de la mecánica cuántica). Explora las bases físicas de la vida y del cerebro y pasa luego a hablar de la conciencia en términos enteramente metafísicos. La primera mitad, *What is Life?*, tuvo influencia considerable durante los años cuarenta, con relación a la búsqueda del medio de transporte de la información genética.

Shepard, Roger N. "Circularity in Judgements of Relative Pitch". *Journal of the Acoustical Society of America* 36, no. 12 (December 1964), pp. 2346-2353. La fuente de la pasmosa ilusión auditiva de los "tonos Shepard".

Simon, Herbert A. *The Sciences of the Artificial*. Cambridge, Mass.: M. I. T. Press, 1969. Paperback. Un libro interesante, que se ocupa de la comprensión de los sistemas complejos. El último capítulo, intitulado "The Architecture of Complexity", se refiere en alguna medida a la polémica entre reduccionismo y holismo.

Smart, J. J. C. "Gödel's Theorem, Church's Theorem, and Mechanism". *Synthèse* 13 (1961): 105. Un artículo muy bien escrito, anterior al de Lucas pero esencialmente contradictor de éste. Uno está obligado a concluir que es necesario ser Good y Smart para argumentar contra Lucas . . .*

** Smullyan, Raymond. *Theory of Formal Systems*. Princeton, N. J.: Princeton University Press, 1961. Paperback. Un tratado sumamente avanzado, que sin embargo comienza con una bella exposición de los sistemas formales y demuestra una versión simplificada del Teorema de Gödel gracias a un armonioso procedimiento. Solamente el Capítulo 1 justifica el libro.

* ______. *What Is the Name of This Book?* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1978. Libro de acertijos y fantasías acerca de paradojas, autorreferencias y el Teorema de Gödel. Crea la impresión de que puede atraer al mismo tipo de lector

* "Good" = *bueno, exelente*, etc: "smart" = *sagaz, inteligente, talentoso*, etc. [T.]

que mi libro. Apareció luego de que el mío estuviera íntegramente escrito (con la excepción de cierta entrada en mi bibliografía).

Sommerhoff, Gerd. *The Logic of the Living Brain.* New York: John Wiley, 1974. Un libro que pretende utilizar el conocimiento de las estructuras de pequeña escala del cerebro a fin de elaborar una teoría que explique de qué manera actúa el cerebro como conjunto.

Sperry, Roger. "Mind, Brain, and Humanist Values". In John R. Platt, ed. *New Views on the Nature of Man.* Chicago: University of Chicago Press, 1965. Un pionero de la neurofisiología explica aquí cómo concilia la actividad cerebral con la conciencia.

* Steiner, George. *After Babel: Aspects of Language and Translation.* New York: Oxford University Press, 1975. Paperback. Libro de un lingüista erudito, acerca del profundo problema de la traducción y de la comprensión de las lenguas por parte de los seres humanos. Aunque IA es muy escasamente tratada, la obra se inclina en favor de la opinión de que está fuera de propósito la iniciativa de programar a una computadora para que comprenda un relato o un poema. Un libro muy bien escrito y sumamente estimulante . . . por momentos, exasperante.

Stenesh, J. *Dictionary of Biochemistry.* New York: John Wiley, Wiley-Interscience, 1975. Según mi opinión, un integrante eficiente de la lista de necesarios libros técnicos sobre biología molecular.

** Stent, Gunther. "Explicit and Implicit Semantic Content of the Genetic Information". In *The Centrality of Science and Absolute Values*, Vol. I. Proceedings of the 4th International Conference on the Unity of the Sciences, New York, 1975. Muy sorprendentemente, este artículo esá incluido en las actas de una reunión organizada por el desacreditado Rev. Sun Myung Moon. Pese a ello, es un trabajo excelente, que se plantea si es posible decir, de un genotipo, en cualquier sentido operativo, que contiene "toda" la información relativa a su fenotipo. En otras palabras, se ocupa de la ubicación de la significación en el genotipo.

______. *Molecular Genetics: A Historical Narrative.* San Francisco: W. H. Freeman, 1971. Stent emplea un amplio y humanista punto de vista, y comunica nociones adecuadas a su perspectiva histórica propia. Un texto nada habitual en materia de biología molecular.

Suppes, Patrick. *Introduction to Logic.* New York: Van Nostrand Reinhold, 1957. Un texto convencional, que incluye exposiciones claras del cálculo proposicional y del cálculo de predicados. Mi cálculo proposicional procede principalmente de esta obra.

Sussman, Gerald Jay. *A Computer Model of Skill Acquisition.* New York: American Elsevier, 1975. Paperback. Una teoría de los programas que comprenden en qué consiste la tarea de programar una computadora. Se discute en detalle la problemática relativa a cómo dividir la tarea en partes y a cómo deberán interactuar tales partes de un programa.

** Tanenbaum, Andrew S. *Structured Computer Organization.* Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1976. Excelente: una transparente y sumamente bien escrita explicación de los numerosos niveles que están presentes en los sistemas modernos de computadoras. Abarca los lenguajes de microprogramación, lenguajes de máquina, lenguajes ensambladores, sistemas operativos y muchos otros temas. Agrega una buena bibliografía, en parte anotada.

Tarski, Alfred. *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938.* Translated by J. H. Woodger. New York: Oxford University Press, 1956. Presenta la visión de Tarski acerca de la verdad y de la relación entre el lenguaje y el mundo que la misma representa. Esta visión sigue siendo digna de análisis en cuanto al problema de la representación del conocimiento en Inteligencia Artificial.

Taube, Mortimer. *Computers and Common Sense*. New York: McGraw-Hill, 1961. Paperback. Quizá la primera diatriba contra IA. Fastidioso.

Tietze, Heinrich. *Famous Problems of Mathematics*. Baltimore: Graylock Press, 1965. Un libro dedicado a problemas célebres, escrito en un estilo verdaderamente personal y erudito. Buen material histórico e ilustrativo.

Trakhtenbrot, V. *Algorithms and Computing Machines*. Heath. Paperback. Discusión de temas teóricos como el de las computadoras, incluyendo problemas irresolubles, por ejemplo el de la detención y el de la equivalencia entre palabras. Breve, lo cual es bueno.

Turing, Sara. *Alan M. Turing*. Cambridge, U. K.: W. Heffer & Sons, 1959. Biografía del gran adelantado de la computación. Un producto del amor materno.

* Ulam, Stanislaw. *Adventures of a Mathematician*. New York: Charles Scribner's, 1976. Una autobiografía de un hombre de sesenta y cinco años que escribe como si tuviera veinte y no pudiera ocultar su pasión por la matemática. Repleto de murmuraciones sobre quién creía ser el mejor, quién lo envidiaba, etc. No sólo divertido, sino serio.

Watson, J. D. *The Molecular Biology of the Gene*, 3rd edition. Menlo Park, Calif.: W. A. Benjamin, 1976. Buena obra, pero muy lejos de estar organizada como la de Lehninger, a mi juicio. No obstante, prácticamente todas las páginas contienen algo interesante.

Webb, Judson. "Metamathematics and the Philosophy of Mind". *Philosophy of Science* 35 (1968): 156. Una argumentación detallada y rigurosa contra Lucas, con esta conclusión: "Mi posición íntegra en este trabajo puede ser enunciada de una vez diciendo que el problema mente-máquina-Gödel no puede ser abordado de un modo coherente hasta tanto el problema de la constructividad, en los fundamentos de la matemática, no sea esclarecido."

Weiss, Paul. "One Plus One does Not Equal Two". In G. C. Quarton, T. Melnechuk, and F. O. Schmitt, eds. *The Neurosciences: A Study Program*. New York: Rockefeller University Press, 1967. Un artículo que se empeña en avenir al holismo con el reduccionismo, pero con base en una orientación demasiado holista, para mi paladar.

* Weizenbaum, Joseph. *Computer Power and Human Reason*. San Francisco: W. H. Freeman, 1976. Paperback. Un libro provocativo, escrito por uno de los primeros trabajadores en IA, quien llega a la conclusión de que gran parte de la tarea realizada en ciencia de las computadoras, particularmente en IA, es peligrosa. Pese a que puedo estar de acuerdo con algunas de sus objeciones, creo que va demasiado lejos. Su taimada referencia a los investigadores en IA como "inteligencias artificiales" suena divertida la primera vez, pero cansa a la duodécima. Todo interesado en computadoras debe leerlo.

Wheeler, William Morton. "The Ant-Colony as an Organism". *Journal of Morphology* 22, 2 (1911): 307-325. Una de las más altas autoridades sobre insectos, en su época, aporta un célebre enunciado acerca de por qué una colonia de hormigas merece ser considerada un "organismo" con el mismo derecho que cada una de sus partes.

Whitely, C. H. "Minds, Machines, and Gödel: A Reply to Mr. Lucas". *Philosophy* 37 (1962): 61. Una réplica simple pero vigorosa a la argumentación de Lucas.

Wilder, Raymond. *An Introduction to the Foundations of Mathematics*. New York: John Wiley, 1952. Una eficaz mirada panorámica, que coloca en perspectiva las ideas importantes de los últimos cien años.

* Wilson, Edward O. *The Insect Societies*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, Belknap Press, 1971. Paperback. El libro más autorizado acerca del comportamiento colectivo de los insectos. A pesar de su prolijo detallamiento, es legible y plantea gran cantidad de ideas atractivas. Tiene excelentes ilustraciones y

una gigantesca (aunque lamentablemente sin anotar) bibliografía.
Winograd, Terry. *Five Lectures on Artificial Intelligence.* AI Memo 246. Stanford, Calif.: Stanford University Artificial Intelligence Laboratory, 1974. Paperback. Una descripción de los problemas básicos de IA, y nuevas ideas para abordarlos, postuladas por uno de los investigadores contemporáneos más importantes del área.
* ______. *Language as a Congnitive Process.* Reading, Mass.: Addison-Wesley. Por lo que yo he visto del original (próximo a editarse, en el presente momento), se tratará de un libro sumamente incitante, que examina el lenguaje en toda su complejidad, como ningún otro libro lo ha hecho hasta ahora.
* ______. *Understanding Natural Language.* New York: Academic Press, 1972. Exposición detallada de un programa específico, notablemente "ingenioso" dentro de su limitado universo. El libro muestra cómo el lenguaje no puede ser separado de una comprensión general del mundo, y propone líneas de trabajo mediante la formulación de programas que puedan emplear la lengua del modo en que lo hacen las personas. Es una contribución significativa: su lectura puede despertar muchas reflexiones provechosas.
______. "On some contested suppositions of generative linguistics about the scientific study of language", *Cognition* 4:6. Una refutación divertida de un ataque frontal, por parte de ciertos lingüistas doctrinarios, a IA.
* Winston, Patrick. *Artificial Intelligence.* Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1977. Una presentación global y vigorosa de muchos aspectos de IA, por obra de un joven e influyente estudioso. La primera mitad no se subordina a programas; la segunda depende de LISP e incluye una excelente exposición breve del lenguaje LISP. El libro contiene muchas referencias a la bibliografía actual sobre IA.
* ______. ed. *The Psychology of Computer Vision.* New York: McGraw-Hill, 1975. Un título inocente, pero un libro magnífico. Contiene artículos sobre la manera en que los programas de computadora efectúan reconocimientos visuales de objetos, de escenas, etcétera. Los artículos abordan todos los niveles del problema, desde la detección de segmentos lineales hasta la organización general del conocimiento. En particular, se destaca un artículo de Winston mismo sobre un programa formulado por él que desarrolla conceptos abstractos a partir de muestras concretas, y un artículo de Minsky sobre la noción en surgimiento de "marcos".
* Wooldridge, Dean. *Mechanical Man — The Physical Basis of Intelligent Life.* New York: McGraw-Hill, 1968. Paperback. Una exposición prácticamente completa de las relaciones existentes entre los fenómenos mentales y los fenómenos cerebrales, en un lenguaje claro. Ahonda en difíciles conceptos filosóficos a través de modalidades novedosas, esclareciéndolos gracias a ejemplificaciones concretas.

Créditos

Figuras: Fig. 1, *Johann Sebastian Bach*, por Elías Gottlieb-Haussmann (1748), colección de William H. Scheide, Princeton, Nueva Jersey; Fig. 2, *Concierto de flauta en Sanssouci*, por Adolf von Menzel, Galería nacional, Berlín oriental; Figs. 3, 4, 152, *El tema regio* y la última página del *Ricercar a seis voces*, de la edición original de la *Ofrenda musical* de Johann Sebastian Bach. Se reproducen por cortesía de la *Biblioteca del Congreso*; las litografías y grabados de M. C. Escher se reproducen con permiso de la Fundación Escher, Haags Gemeentemuseum, La Haya, copyright © de la Fundación Escher, 1979; los derechos de reproducción arreglados por cortesía de Galerías Vorpal, Nueva York, Chicago, San Francisco y Laguna Beach; Fig. 9, fotografía de Kurt Gödel, por Orren J. Turner, de *Fundamentos de las matemáticas: Papeles del simposium conmemorativo del sesenta aniversario de Kurt Gödel*, editado por Jack J. Bullof, Thomas C. Halyoke y S. W. Hahn, Nueva York, Springer-Verlag, 1969; Figs. 17, 96, "Figura-Figura" y "Una sección de ARNm penetrando en un ribosoma", dibujos de Scott E. Kim; Figs 19, 44, 133, 148, selecciones musicales de la *Ofrenda musical* de J. S. Bach; la impresión de la música por el programa "SMUT" de Donald Byrd; Fig. 25, "Laberinto de Creta". de W. H. Matthews, *Confusiones y laberintos: su historia y desarrollo*, Nueva York, Dover Publications, Inc., 1970; Fig. 39, fotografía de la piedra Rosetta, cortesía del Museo Británico; Fig. 40, *collage* de escrituras. Ejemplos de cuneiforme, de la Isla Oriental, escrituras mongólicas y rúnicas de Hans Jensen, *Signo, símbolo y escritura*, Alemania oriental VEB Deutscher Verlag Der Wissenschaften; ejemplos de escrituras bengalí y buginese de Kenneth Katzner, *Los lenguajes del mundo*, Nueva York, Funk & Wagnalls, 1975; ejemplos de tamil y thai, de I.A. Richards y Christine Gibson; *Inglés a través de ilustraciones*, Nueva York, Washington Square Press; Fig. 59, "La construcción de inteligencia estrato por estrato" (fig. 9.8) adaptado de *Inteligencia artificial*, de Patrick Henry Winston, Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing Company, reimpreso bajo permiso; Figs. 63, 69, fotografías de un puente de hormigas, de Carl W. Rettenmeyer y la construcción de un arco por trabajadoras termitas, por Turid Hölldobler, de *Las sociedades de insectos*, de E. O. Wilson, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1979; Fig. 65, dibujo esquemático de una neurona, adaptada de *El mecanismo de la mente*, por Dean Wooldrige, copyright © 1963, McGraw-Hill, Inc., utilizada con la autorización de McGraw Hill Book Company, y de Wilber Penfield y Lamar Roberts, Fig. II-6, página 26, de *Mecanismos del habla y la mente*, copyright © de Princeton University Press, reimpreso bajo permiso de Princeton University Press; Fig., 66, "El cerebro humano visto desde un perfil", de Steven Rose, *La mente consciente*, copyright © 1973 por Steven Rose, reimpreso bajo permiso de Alfred A. Knopf, Inc., Nueva York, y John Wolfers, Londres; Fig. 68, "Superposición de recorridos neurales", de *Enfrentando la realidad*, Nueva York, Springer-Verlag, 1970; Figs. 77, 78, 80, 82, 117, 137, 138, 141, *Las sombras, Estado de gracia, La muestra cautiva, El aire y la canción, Aritmética mental, Sentido común, Los dos misterios, La condición humana*, por René Magritte, copyright © de ADGP, París, 1979; Figs. 79, 95, "Virus del mosaico del tabaco" y "Estructura secundaria y ternaria de la mioglobina", de *Bioquímica*, de Albert Lehninger, Nueva York, Worth Publishers, 1975; Figs. 91, 92, "Las cuatro bases constitutivas del ADN" y "La estructura en forma de escalera del ADN", de "La síntesis del ADN", *Scientific American*, Arthur Kornberg, copyright © Octubre 1968, reservados todos los derechos; Fig. 93, "Modelo molecular de la doble hélice del ADN", reimpreso bajo permiso de V. M. Ingram, *Biosíntesis de las macromoléculas*, Menlo Park, California, The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1972; Fig. 97, "Un polirribosoma", de *Las proteínas*, editado por R. E. Dickerson y H. Neurath, página 64, Nueva York, Academic Press; Fig. 98, "Canon molecular de dos pisos", O. L. Miller, Jr., en "Visualización de los genes en acción", en *Scientific American*, copyright © Marzo 1973, reservados todos los derechos; Figs. 101, 102, 103, "El virus bacterial T4", "Infección de una bacteria por la acción de un virus", "El tránsito morfogenético del virus T4", en *Elaboración de un virus bacterial*, de William B. Wood y R. S. Edgar, en *Scientific American*, copyright © Julio 1987, reservados todos los derechos; Fig. 105, *fotografía de Srinivasa Ramanujan*, de *El hombre y el matemático*, de S.R. Ranganathan, Nueva York, Asia

Publishing House, 1967; Figs. 110, 111, 112, de Terry Winograd, en *Comprendiendo un nuevo lenguaje*, Nueva York, Academic Press, 1972; Fig. 113, fotografía de Alan Turing, por C. H. O. Trevelyan, de Sara Turing, *Alan M. Turing*, Cambridge, Inglaterra, W. H. Heffer and Sons, Ltd., 1959; Fig. 116, "Una parábola en árabe", de *Esplendor de la caligrafía islámica*, de Abdelkebir Khatibi y Mohammed Sijelmassi, Nueva York, Londres, Thames & Hudson, copyright © de Biblioteca Qarawiyne en Fez; Fig. 118, Representación procedimental de "un cubo rojo que sustenta a una pirámide", adaptado de *Modelos de computación para el pensamiento y lenguaje*, editado por Roger C. Schank y Kenneth Mark Colby, W. H. Freeman and Company, copyright © 1973; Figs. 119, 122, 124, 130, problemas de Bongard, de *Reconocimiento de modelos*, de M. Bongard, Rochelle Park, Nueva Jersey, Hayden Book Company, Spartan Books, 1970

Quiero expresar mi agradecimiento a los siguientes editores por permitirme citar extractos del siguiente material: *El lector de Bach: la vida de Johann Sebastian Bach a través de cartas y documentos*, editado por Hans T. David y Arthur Mendel, edición corregida, con el permiso de W. W. Norton & Company, Inc., copyright © 1966, 1945 de W. W. Norton & Company, Inc., copyright renovado en 1972 por la señora de Hans T. David y Arthur Mendel; *La ofrenda musical* de J. S. Bach, página 179, editado por Hans T. David, Nueva York, copyright © 1945 por G. Schirmer, Inc., utilizado con permiso, *Zen Koans*, de Gyomay Kubose, Chicago, Regenery, 1973; *Carne zen, huesos zen*, de Paul Reps, Tokio, Japón, Charles, E. Tuttle Co., Inc., 1957; "Mentes, máquinas y Gödel" y "Máquinas de computación e inteligencia", de J. R. Lucas y Alan M. Turing, en *Mentes y máquinas*, editado por A. R. Anderson, Englewood Cliffs, Nueva Jersey, Prentice Hall, 1964 y *Philosophy*, vol 36, 1961; *¿Los cuanta son reales?*, Bloomington, Indiana, Indiana University Press, 1973; "Srinivasa Ramanujan", de James R. Newman, en *The World of Mathematics*, editado por James R. Newman, Nueva York, Simon & Schuster, reimpreso con autorización de Simon & Schuster, división de la Gulf & Western Corporation, 1956; "Un modelo procedimental para la comprensión del lenguaje", en *Modelos de computación de pensamiento y lenguaje*, editado por Roger C. Schank y Kenneth Mark Colby, San Francisco, W. H. Freeman an Company, copyright © 1973; *El poder de la computación y de la razón humana: del juicio al cálculo*, San Francisco, W. H. Freeman and Company, Copyright © 1976.

Indice Analítico

abajo arriba-arriba abajo, 58-59
abejas, 424, 758, 855
Abel, Niels Henrik, 476
aborto, 209
abstracción, niveles de, 770-71, 776-77, 781, 788-95, 798
abuelas, percepción de, 405, 406, 408-409, 410
Acertijo CA-CA, 74-75, 791
acertijo MU, 39-49, 303-305, 602-604, 725-26
acertijos, 8, 39-41, 74-75, 78, 87, 162, 215, 251, 254, 260, 473, 490-92, 501, 523-24, 524-25, 606, 666-67, 720, 735-37, 764-81, 811
ácido deoxirribonucleico, *ver* ADN
ácido ribonucleico, *ver* ARNm, ARNr, ARNt
Acor-de-mente, 862
acrónimos, 37-38, 134, 206-209, 241, 278, 318-19, 442, 715, 811, 862, 872-73, 875, 877
acrósticos, 8, 95
actitudes anti-IA, 31, 555-58, 743
adenina, *ver* nucleótidos
adhesión, no-adhesión, 274, 286
adición: asociatividad, conmutatividad de, 184; de sobrenaturales, 538; en BlooP, 483; no-conmutativas, 263, 757; notación TNT, 244; Programas IA y, 802-803; representabilidad de, 493; sistema p-q y, 58-64, 492; triple, 120, 244
adjetivos autológicos, 23
adjetivos heterológicos, 23-25
adjetivos no autodescriptivos, *ver* adjetivos heterológicos
ADN: autodestructivo, 64; como conocimiento declarativo, 729; como cristal aperiódico, 198; como portador de información genética, 188; como programa, lenguaje, datos, 341-42, 646; comparado con lenguaje de computadora, 341-42; composición y estructura de, 608-609; doble cadena, 608-609, 626-28; en espacio exterior, 198, 208-209; espina dorsal covalente de, 608-609; forma de autorréplica, 626; interpretación inusual de 272; isomorfismo con organismo, 172-74; quinereamiento y, 627-28; recombinación, 786; relación con ARNm, 611-12
ADN endonucleasa, 626-28
ADN polimerasa, 626-28
ADN Rapid Transit Service, 597, 611-12
Aire sobre la Cuerda de G, 528, 587
Aire y la Canción, El (Magritte), 583
agujeros en sistemas formalizados, 27-28, 30, 531, 534, 550, 553, 556
ajedrez: automodificable, 814-16; bloques y, 335-36; grandes maestros en, 336; vuelta a la casa, 702
ajedrez de computadora, ver programas de ajedrez
albedrío: libre, *ver* libre albedrío; mecánico, 811-13; raíces de, 811-13
Algebra zen, 681
Algol, 344, 451, 745
algoritmos, 344, 485, 486, 487, 889, 520, 543, 671
alta fidelidad *vs.* baja fidelidad, 91, 101, 120, 480, 556, 827-28
amigo, modelo mental de, 557-58
aminoácidos, 612-620, 630-31; en Tipogenética, 601, 604-605
amplificar, 763-794
anafase, 789
Análisis de lenguajes naturales, 693-700, 745-48; *ver también* gramática, lenguaje
analogía del huerto, *ver* información, profundidad
analogías, 790-98
analogías y acordes, 796-97
anarquía, 821
Anderson, Alan Ross, 233
anomalías, 52, 144, 246, 514, 858
anticodones, 617-20
Anunciador, 749-57
aparato de picar carne, 489
apareamiento de bases complementarias, 511, 599-600, 607-11, 618-20, 631
Aquiles: analogía del huerto y, 504-505; como violín, 594; cuadro de, 50; El *Canon Cangrejo* y, 241, 786-89; esquemas de respuesta y, 562; imagen de DIOS, 263; inocencia de, 479, 482, 500; letra inicial de, 272, 599-600, 789; mencionado, 100, 319, 620, 677, 791; mistificado por Cangrejo, 662; neuronas inaccesibles de, 386, 814; origen de, 32, 34; paradoja de Carroll y, 55, 202, 214, 228; problema de reducción y, 720, 722; recursividad y, 150-54; representación sobre colonia de hormigas, 374, 381; talón de, 460, 573
Aquiles, propiedad, 368-70, 490
árboles de anticipación, 178, 714-15, 622, 845-46
árboles: de anticipación, *ver* árboles de anticipación; diagramas recursivos, 47, 84, 159-62; de teoremas, 47, 84
arco de las termitas, 422
argumentación de Gödel resumido, 20, 318, 530
Argumentación de Samuel, pros y contras, 811-13
argumentaciones hereditarias, 42, 56-58, 256, 305
Aria con Variaciones Diversas (Bach), 462-64
Aria con Variaciones Diversas (Diálogo), 481
Aristóteles, 22
aritmética de Peano, 118
Aritmética mental (Magritte), 742
aritmetización, 306-10, 313-15, 629-31
aritmoquinitización, 526-37, 551-53, 587, 593-94, 639, 685-86
ARN de transferencia, *ver* ARNt
ARN mensajero, *ver* ARNm
ARN ribosómico, *ver* ARNr
ARN, *ver* ARNm, ARNr, ARNt
ARNm, 611-15, 617-20, 623-24, 626-31, 633, 643, 646, 783, 784
ARNr, 624
ARNt, 617-20, 646, 647

arte: crisis de identidad de, 829-31, 834-38; moderno, 829, 838; por computadora, 712, 733-34
Arte de la Fuga (Bach), 93-95, 102, 794
Arte de los Cordones Zen, 279, 281-84, 286, 741
articulación lateral, 403, 405
artículo Gödel 20, 28, 518
artículos perfectos, 3, 89-93, 100-101, 480, 500, 576, 633
Art-Language, 736
asociatividad, *66-68*, *245*
ASU: definición, 441-42; orientación en, 443; viajes en, 446-47, 473
átomos: en Cálculo Proposicional, *215*, *220*; en física, 357; en TNT, 245, 252, 253
ATTACCA, 209, 333, 366, 597
Augusto II, Rey de Sajonia, Rey de Polonia, 545
aumentación, 9, 108, 172-594, 807-10, 875; *interválica*, 185-86
autoabsorción, 833
autoconciencia, 479, 567, 677
autoconciencia, naturaleza de la, 372-73, 384-85, 455-56, 458-59, 825, 841-48
autoconocimiento, posibilidad de, 825-28, 838
autoensamblarse, espontáneamente, 574-75, 641-42
autoignorancia, ironía de, 386, 389, 389-90, 745
automonitoreo, 386, 456, 458-59, 827, 846
autopercepción, 825-28; *vs.* autotrascendencia
Autor, el 3, 6, 241, 437, 817, 857, 859-80
autorreferencia: amonestación, 23-24; Bach y, 102; casi pérdidas, 516; como causa de incompletitud esencial, *550*, *556*; *de muchos niveles* 880; enfocándose en, 518, 523, 526-29; Gödeliana, 19-20, 317, 429-31, 587, 593-94, 788-89, 875, indirecta, 23, 100, 241, 516, 594, 788, 875; método Quine, 509-17, 526-27, 531, 576-90; 627-28; por traducción, 594
autorreferencia y autoexplicación, comparación, 626-27, 630-31, 639-42
autorrep:cânones y, 592-93, 594; diferenciación 644-45; epigênesis y, 190; inexacta, 591-944-645; por argumentación, 593; por mensaje erróneo, 593; por movimiento retrocedido, 592; por traslación, 592; tipogenética, 606-607; trivial, 590
autotrascendencia, 564-65, 567
Avery, Oswald, 188, 191
avispa Sphex, 145, 724-25
axioma rockola básico, 183
axiomas: definición, 42; falta de Cálculo Proposicional, *216-17*; *del sistema* MIU, 39-41; del sistema P, 87-88; del sistema pq, modificado, 56; del sistema 308, 365; del TNT, 255; del TNT, extendido, 534, 551-53; *del sistema tq*, 77
axones, 400, 798
Azules, Programas, 494-95, 498, 504

Babbage, Charles, 28-31, 706, 709, 861-880
Babbage, test, 871-80
BACH (acrónimo), *206-209*
Bach, Anna Magdalena, 570
Bach, C.P.E., 3, 4, 94
Bach, Joh. & Seb., 3, 4, *94*
Bach, Joh. Seb.; al cuadrado, 805; autorreferencia indirecta de, 93-96, 102; como compositor, 463, 545, 877-80; como inspirador de Diálogos, 32, 874; como intérprete de clavi*cordio*, *323*, *327*, *328*; *como* vidriero, 93; confundido con Fermat, 390-94; cualidades recursivas de la música de, 83-85; de Forkel, 4, *102*; disección *vs.* apreciación de, *806*; *en* Leipzig, 477; Escher y, 236, 788-89; homenaje a, 95; IA y, 31, 789; improvisación de, 3-8, 114, 853; modulación y, 143-44, 153; tonos Shepard, 853; vida y muerte de, 102; *vs.* Cage, 185, 193-94, 206-208; *ver también* Viejo Bach
B-A-C-H (melodía), 93-96, 102, 121, 143, 183-*86*, *311*, *853*
Bach, Wilhelm Friedemann, 47
Banda de Möbius I (Escher), 34-36
Banda de Möbius II (Escher), *324*
banderas, 34, 38, 222-23
base de datos, 731
base (recursividad), *ver también* esqueletos
bases (genética), *ver también* nucleótidos; en Tipogenética, 597-601, 603
Baso, 275
Bassui, 298
batalla Tortuga-Cangrejo, *89-92*, 471-77, 480, 501, 552-56, 566, 633-39, 855
Beethoven, Ludwig van, 7, 89, 193, 750
beisbol, 753-54
Belnap, Nuel, 233
Bell, A.G., 348
belleza: computadoras y, 681; elusividad de, 654, 655, 667, 679-81, 687, 689-90
bello *vs.* no-bello, 652-59, 662, 678-81, 687-89
BEOJE, 811, 853
Berio, Luciano, 837
bicentupletes, *636*
bifurcaciones, 108-114, 118-19, 539-43, 552, 684
biología molecular, *596*, *608-47*
biorrockolas, 190, 208
"bits", 339, 341, 342
BlooP, 479, 483-507, 521, 522, 525; alfabeto de, 494, 501-502; estructuras de control de, 484; pasos primordiales de, 483, 486-88; sintaxis de, 485-90
BLOQUE (BlooP), 484, 485
bloques, mundo de, *692-700*, 741-48, 798
Bodhidharma, 273, 279-80, 287, 294, 740
Bolyai, Farkas, 109
Bolyai, János, 108-109
Bongard, M., 764
Bongard, problemas, 764-82, 785, 791, 797 universalidad de, 781-82
Boole, Geo., 22, 476, 709
botella de Klein, 820
Boyle, ley de, 363; *ver también* gases
brazos, lavándose mutuamente, 820
Breton, André, *839*
brincando fuera del sistema: como método para resolver contradicciones, 232-35; de 2-D a 3-D, *ver* 2-D *vs.* 3-D; en publicidad, 563; en sistemas políticos, 821; por esquemas-respuesta, 546-49; por programas, 42-45, 563-66, 803; Teorema Gödel y, ver Gödelización, incompletitud esencial, ilusión de; Zen y, 298, *567*, *ver también* Gödelización, Tödelización, Escherización, batallas TV, repetivilidad, no programabilidad, etc.
brincando fuera del subsistema, *565*

"British Grenadiers", 717
Brouwer, Luitzen E.J., 476
BUCLE MU (FlooP), 501-502, 522
bucles: delimitados, 176, 485-90, 493, 521-22, 525; en música, 176; en programación, 176-77, 485-90, 501-502, 594, 746; infinitos, 176, 501-502
bucles sin sentido, 804
Budismo Booleano, 681
Budismo Zen: Aquiles le enseña a la Tortuga acerca de, 272-87; brincos fuera del sistema y, 274-75, 298, 567; computadoras y, 739-34 cuasi 739-40; el refrigerador del Cangrejo y, 480; Escher y, 299-301; holismo *vs.* reduccionismo y, 367-69; inconsistencias y, *ver* Zen *vs.* lógica; introducción a, 288-303; Misterio de lo indecidible y, 319; música, arte, y, 830, 835-37; no existencia y, 297-98, 828-829; vía-U y, 46, 116, 297; *vs.* lógica, 118, 275-76, 291-93, 297; *vs.* palabras, 288, 290-93, 293-98; Zenón y,
búmerangs, 89, 100, 312, 558
Buenasuerte, Hexaclorofeno J.,123, 136, 151-52, 152
búsqueda de límites definidos, *ver* búsquedas potencialmente inacabables, sin finalización, impredictibles pero dotadas de la garantía de finalizar, bucles, libre, FlooP, etc.
búsquedas potencialmente inacabables, 468, 472-75, 502, 525, 688-89
bustrofedónico, sistema de escritura, 198-200, 209
Buxtehude, Dietrich, 394
Byrd, Donald, ver SMUT
Byron, Lord, 29

caballo de Troya, El, 635-36
cadena de guiones, 56, 76-77, 78
cadenas bien formadas: acertijo BlooP sobre, 490-91; en Arte de Cordones Zen, 281, 284-85, 286, definición, 63; en Cálculo Proposicional, 214-16 ; en sistema-pq, 56; en TNT, 252-54
cadenas decidibles, 492
cadenas sintetizadoras, 261-63, 532-33
Cadenas Zen, el arte de las, *ver* Arte de las cadenas Zen
CAGE (acrónimo), 206-208
Cage, John, 184-485, 193-94, 197, 200, 207, 656, 830, 831, 835
C-A-G-E (melodía), 184, 185
Caja musical, preprogramada, 801
calculadoras de bolsillo, 672-73, 728-29, 802-804, 842-43
calculistas relámpago, *ver idiots savants*
cálculo de predicados, 719-20
cálculo proposicional, 214-35; bien formado en, 214-16; como un epifenómeno, 683; debilidad de, 231-35; enclavado en TNT, 231, 233-35, 245, 253, 257; fluido, 229-30; formas para mejorarlo, 229-30; interpretaciones de símbolos de, 220, 224, 226-27; reglas de inferencia, justificadas, 222-24; reglas de inferencia, presentadas, 214-21; reglas de inferencia, tabla de, 221-22
campo magnético y cristal, 166
campos, excelente, 868
canción autorreproductora, 591
canción de amor de la Tortuga, 514-16
"Canción sin fecha ni estación, una", 571-72
canciones recombinables, 717-18
Canon Cangrejo (Bach), 238-40, 787
Canon Cangrejo (Diálogo), 241, 418-19, 786-91, 795, 858-60, 875
Canon Cangrejo (Escher), 234, 236, 789
Canon en Perpetuo Ascenso (Bach), 11-12, 15, 55, 153, 851-53, 880
"Canon per aumentationem et contrario motu" (Bach), *ver Canon Perezozo*
"Canon per Tonos" (Bach), *ver Canon en Perpetuo Ascenso*
Canon Perezozo (Bach), 10, 787, 809
Canon Perezozo (Diálogo), 875-76
Canon por Aumentación Interválica, 620
cánones: autorreps y, 591-95; copias y, 8-11, 172; Diálogos y, 786-91, 875-76; Dibujos de Escher y, 15; dos pisos, 623-24; en *Ofrenda Musical,* 8-11, 861-63; polirribosomas y, 622-24; *ver también* cánones individuales, fugas
cánones cangrejo, 9, 234-40, 241, 419, 392, 786-91; en ADN, 237-38
Cantata de Cumpleaños (Bach), 545
Cantatatata de Cumpleaños (Diálogo), 553, 562, 816
Cantor, conjunto, 166
Cantor, Georg, 22, 256, 494, 497, 498-300
caos en teoría de los números, 162-63, 179-80, 657, *ver también* orden y caos
capacidad de observación panorámica; *ver también* brincos fuera del sistema
capas, de mensajes, 196-203
caracterización implícita, 48, 79, 86-87, 111
cardinalidad, sentido intuitivo de, 669-670
carreras, 34-38, 51, 701, 702, 807-810
Carroll, John B., 745
Carroll, Lewis, 22, 32, 55, 228, 439, 807; material de, 51-54, 432-35
Carroll, paradoja: 32, 51-54, 807; argumentación de Samuel y, 811-13; problema planteado por, 55, 214; simbolizado, 228; versión demostración, 227-28; versión evidencia, 822-23;versión mensaje, 202; *ver también* interminable regresión
cartas en cadena, 644
cascadas, 264, 625, 740, 785
casi pérdidas *ver* situaciones "casi"
castillos de arena, 860-61
casualidad, 482-83, 733, 796-97, 845
catalizadores, 624-25
catálogos de programas (Azul, Verde, Rojo), 494-95, 504-505
casualidad, tipos de, 841-43
caza acústica, 327-28, 542
CCrab, ver ATTACCA
CELDAS (BlooP), 484-85
célula abuela, 405, 406
célula pulpo, 406
centralidad, 442, 444
centrómero, 790
ceracilo, *ver* nucleótidos
cerebelo, 401
Cerebro Electrónico Gigante, 29, 709-16
cerebros: automodificable, 179-80, 820; autorreproductor, 588-96, 446-47; azul, ver-

de, rojo, *ver* Programas Azul, Verde, Rojo; como datos, 344, 820; comparaciones de alto nivel, 450-51; construidos por programas, 695, 744-48, 785; en BlooP y FlooP, 485-90, 501-503; estructura recursiva de, 676-77; familias de, 595; 643-44; jugando ajedrez, *ver* programas de ajedrez; para denominar ordinales, 563-64; para determinar fenotipos, 628-29; para determinar la estructura ternaría, *616; para determinar* la función de una enzima, 614-16; para generar teoremas, 557-59, 683-84, 728, 730-31; para traducir programas, 342-46; segundo orden, tercer orden, etc., 563; *vs.* datos, 589-90, 607, 627-28, 645-47, 729, 745, *ver también* uso *vs.* mención; *vs.* programadores, 360, 361, 870, 875; *ver también* computadoras, lenguajes de computadoras, programas IA, etc.
cerebros: colonias de hormigas y, 371-72, 375, 381-83, 412, 421-23; colonias RTA, 423 como objetos matemáticos, 660-61; correspondencias entre, 401-402, 406-407, 436-52; mensajes marco y exteriores, 201-203; música y, 193; paradoja de Epiménides y, *690-91*; *pen*samiento y 396, 432; programabilidad de, 356; reglas y, 30-31, 800, *ver también* cerebros y sistemas formales; sistemas formales y, 396-97, 600-85, 690-91, 800, *ver también* Tesis Church Turing; sistemas operacionales y, 348; subórganos de 400-401; *vs.* mentes, 680; *ver también* mentes, inteligencia, etc.
CESAR (BlooP), 487
ciclos ZET, 112-14, 817
cielo infinito, 473
ciencia: aplicada a sí misma, 820; y problemas de Bongard, 780-81
ciencia normal, 781
cigarros, 236, 237, 453, 569-70, 770
50 (cincuenta), 397, 657, 667
cita, 503, 509, 511-17, 587, 833, 875
citoplasma, 611, 613, 617-20
citosina, *ver nucleótidos*
clases *vs.* instancias, 413-19, 424-25; *ver también* prototipos, intensionalidad y extensionalidad, analogías, esqueletos conceptuales, etc.
clases semánticas, 734-35, 745-46
El clave bien temperado (Bach), 7, 328-33, 385, 387, 394
clavecines, 3, 462, 594
claves, musical, 11, 352, 551, 593; *ver también modulación*
clima, 356-57
cobre, 205
"codificación" de frases, 688-90
código biinscrito, 458
código compartido, 458
Código Geométrico, 277-79, 284, 740
Código Gödel, 20, 314, 630-33
código tipogenético, 603, 605, 607, 613-14
códigos: arte y, 834-35; conocido y no-conocido, 97, 187, 313; *ver también* decodificación, Código Gödel, Código Genético, etc.
codones, 614, 618, 630, 632; *ver también* codones Gödel, dupletes
Codones Gödel, 314, *502, 630-32*
coherencia: del Cálculo Proposicional, 226-27,270; definición, 112; de TNT, 270-71, 551-52; de TNT extendido, 264, 543; decreto de, en TNT, 552; demostración de, 27-28, 226-27, 270-71, 531-32; interpretaciones y, 104, 112, 120; Lucas y, 564; mundos hipotéticos y, 112-20; variedades de, 112-14; *ver también* ω-coherencia
coincidencia *infinita*, 470, 497
Colby, K., 707
colonia-RTA, 423
colonias de hormigas: artificiales, 423; castas en, 373-74; comparadas con cerebros, 370-72; comunismo en, 374; contrastadas con gases, 373; distribución de castas en, 375-86; equipos en 373; inteligentes, 365-72; libertad y control en, 370-72; mecanismos de equipos y señales, 373-78; nivel de símbolo en 381-86; orden y caos en, 371-72, senderos de, 370-72, reagrupadas, 390-92; señales en, 370-73; umbral en, 371-72, *ver también* distribución de castas, Tía Hilaria, Fermant, Joh. Seb., Fourmi, Lierre de, equipos, señales, *símbolos*
columnas en cerebro, 406
Comenius, Johann Amos, 739
comentarios en programas, 349-50
comillas, 39, 512, 588-90, 833 (de citas o para citas)
cómoda de cajones, autoincluidos, 762-63
compiladores, 343-47, 350, 695
compilar, inversión de, 451
complejidad del mundo, *672*
completitud, 119-20, 493, 499, 550, *ver también* incompletitud, coherencia
comportamiento con propósito *vs.* sin propósito
computadoras: aprender con, 713-15; ensamblado por computadoras, 596, 811; determinismo y, 29-31, 260-62, 811-13; falibilidad de, 679, 683, 802-804; en fonógrafos, 92, 532, 575-77; llorando, 800; orígenes de, 28-30; *ver también programas*, IA, *programas* IA
comunicabilidad de algoritmos, 663-64
concepto "l", concepto "o", concepto "s", 384
conciencia: casualidad y, 841-43; comprensión de, 98, 806, 840-43, fuente de, 454-56
Condición Humana, La (Magritte), *836-37*
confusión de niveles: autorrep de Kim, 595; autoría y, 3, 718-19, 854-55; en arte, *ver* 2-D *vs.* 3-D; en Cálculo Proposicional, 219-20, *230; en sistema* de computadora, 337-38, 342, 347-48, 353-55, 363-64; mentes y cerebros y, 337-38, 679-81; subjun-TV, 757
confusión gastronómica, 681
Conjetura bien verificada (Fourmi), 392, 394
Conjetura Goldbach, 465-68, 471-72, 477, *657*-58, 727; parodiada, 650
conjuntos comunes y corrientes, 23-24
conjuntos f y g, 86
conjuntos que se "devoran" a sí mismos, 23
conjuntos r.e., *ver* conjuntos recursivamente enumerables
conjuntos recursivamente enumerables, 86-88, 179-80, 226-27, 309, 315
conjuntos recursivos, *86-88, 179-80, 226-27*
conmutatividad, 66-68, 247, 266-67, 536, 756
connotaciones y cultura, 439-41, 448-50
conocimiento: accesible *vs.* inaccesible, 427, 431, 728-29, 732; codificado en colonias de hormigas, 376-86, 422; de procedimiento *vs.* declarativo, 428-31, 727-30, 746, 774; explícito *vs.* implícito, 730-31; modularidad

de, 727-31, 742
conocimiento, deductivo *vs.* analógico,
conservación de complejidad, 72, 230-31
constantes, parámetros, variables, 761-62, 792
construcción Gödel, ilustración, 99
contando, 66-68, 269, 430
contexto: necesidad de, 91-94; restablecimiento de, 136-38, 150, 157, 191-94, 205-209
contextos, autoincluidos, 761-64, 795, 797
Contracrostipunto, estudio de, 98-101, 302, 316-17, 480-81, 553, 572, 632-34, 719, 855
contradicciones: argumentos diagonales y, 495-98; causados por ciclos imposibles, 112-14; caparazón de la Tortuga y, 210-13; coexistencia en mismo cerebro, 453, 826-28; dos niveles de, 686; en autoimagen, 825; en Cálculo Proposicional, 226-27, 232-36; en matemáticas, 19-28, 232-35, 263, 685-86; en sistema pq, 103-104; entre niveles, *ver* niveles de conflicto; no existencia personal y, 828-29; visual, 115-17; ω-coherencia y, 535-36; zen y, 118, 277, 288-300, 828, *ver también* paradojas, incoherencia, paradoja de Epiménides, etc.
contrafactuales, 750-57, 758-62
Contrafactus, 758, 760, 791
contrapunto, *ver* cánones, fugas, Bach, etc.
convenciones-interpretación, 814-16
Convexo y Cóncavo (Escher), 124-29, 409
Copa C, 93, 96, 99-101, 313
copias: ADN y, 626-28; autorreps y, 592-95, 644-45; cánones y, 8-11, 624-25; complementación de originales, 83, 593, 599, 611-12; *ver también* inversión; en código, 611, 623-24; inexacta, 592-95, 644; naturaleza de, 172-76; televisión y, 578; visualmente autoincluidas, 163-66; virus y, 640-42; *ver también* similitud, isomorfismo
"corazón" en programa IA, 804
cordura *vs.* demencia, 227-28, 826
corteza: áreas de, 405; cerebral, 400-411; visual, 403-11
Correlaciones: diagramación, 100-101, 531, 630, 633 inducción, 790-91, 794-95
Correspompipa Central, 831-34
Correspon X Central, 833, 850, *ver también* entradas individuales
Corresponcangrejo Central, 789
correspondencia conceptual, 790-95
Correspondogma Central, 629-32, 643-44, 645, 795, 842
creatividad, mecanizabilidad de, 29, 30, 674, 733, 796; *ver también* originalidad, paradoja de IA, no-programabilidad, etc.
credulidad, 89-90, 125, 364, 545-46, 509, 832
creencias, catálogo de, 452-54
Crick, Francis, 597, 629, 630, 631, 729
Crimen y Castigo (Dostoievsky), 448-50
cristal en campo magnético, 166, 169
cristales aperiódicos, 198-200, 207-209
Cristofori, Bartolommeo, 3
cromosomas, homólogo, 790
cruzamiento de nivel, en pensamiento, 787-88, 790
cuantificadores, 245-47, *248*, *249*-51, 253, 256-58
cuantificadores existenciales, *ver* cuantificadores
cuantificadores universales, *ver* cuantificadores
cuasi-isomorfismos, *ver* isomorfismo, fluidos
4'33" (Cage), 184
Cubo con Bandas Mágicas (Escher), 330-31
cuentos de niños y IA, 799-800
cuerdas, delgadas y robustas, 270-71
cumpleaños, 545-49
Chadwick, John, 60
Champernowne, David, 702
Champollion, Jean François, 196
Charca (Escher), 299
charla insustancial (Smalltalk), 783
Chejov, Anton, 759
Chiyono, 300
Chopin, Frédéric, 84, 300, 801
chovinismo, 203-205
chovinismo terráqueo, 203-204
Church, Alonzo, 506, 563, 662

Dalí, Salvador, 831
Dase, Johann Martin Zacharias, 669
da Vinci, Leonardo, 759
David, Hans Theodore, 4, 32, 853
Dboups, Hfpsh, 609, 630
décimo problema Hilbert, 543-44
De Chirico, Giorgio, 831
decodificación: como revelación, 190-91; de ADN, 188-92, 208-209, 238-272, 627-29, 635-36; de discos, 183-86; de la suerte, 182; de sistemas formales, 60-61, 65; de texto ruso, 449; *ver también* isomorfismo, traducción, información, articulación en bloques; vía isomorfismo Gödel
defectos y expectativas, 91, 102, 121, 262, 564
defensa del nivel más bajo, *ver* inaccesibilidad
De Morgan, Augustus, 22, 476, 709
dependencia e independencia de la máquina, 346-47
derivaciones: definición, 41-42; en Cálculo Proposicional, 218-19, 223-26, 232; en sistema MIU, 41-42, 306, 309, 519-20; en sistema t-q, 77; en Tipogenética, 599-600, 601-603; en TNT, 256-57, 258, 259, 265-68, 215-16; falaces, 260, 521; pretendidas, 519-21; sobrenaturales, 537-39; *vs.* demostraciones, 41-42, 229-30, 231-32
desambiguación, 692-700, 712, 744-48
Descartes, René, 307, 399, 802
desciframiento de textos, 60, 194-96, 205-206, 688-89
descripción de los niveles-símbolo en el cerebro, 411-13
descripciones: cálculo de, 797, restructuración de, 767-71, 780-81, 795; tentativas, 764-68
descriptores, 766-67
Deseo Atípico, 131-37, 721
deseos, meta-deseos, etc., 128-38
Desi, 769-71, 785
desplazamiento, 149-58, 218-19
desplazamiento de los marcos de lectura, 182, 620
desplazamiento de niveles, conceptual, *ver* abstracción, niveles de
detectores de similitud, *ver* Desi
determinismo, 65; *ver también* libre albedrío
Di of Antus, 396
Día y Noche (Escher), 295, 299, 788
Diablo, 812

Diagazul [N], 50, 52, 505
Diagorroja [N], 505, 506
Diagoverde [N], 504-505
Diagrama D, 159-62
diagramas Feynman, 170-72
diagramas recursivos, 159-62
dialógicos, 95
Diálogos: como autorreps, 99-100, 152, 241, 594-95, 788, 876 ; origen de, 32, 786-91
diálogos, miniatura, 226-27, 229, 482-83, 509, 661-62, 668, 702, 703, 706, 707, 708
Dickens, Charles, 384, 386, 449
diferenciación, celular, 642-45
digestión, 361
dígitos, desviación de, 308
djin, 134-36, 255-56, 263, 264; *ver también* Genio
Dilema reduccionista, 616, 841
dimensiones conceptuales, 792-93
Diofanto de Alejandría, 325
Dios, 256, 472, 565, 571, 630, 670, 705, 844 cuadro de, 168, 169
DIOS (acrónimo), 130-137, 157, 159, 256, 263, 264, 857, *ver también* djinns, Genio
dirección de retorno, 150, 157
direcciones (en la memoria), 340, 340
discos: falla, 121; como laberintos, 142-46; como portadores de información, 187, 190-91, 194; como rompe fonógrafos, 89-92, 99-101, 317, 480, 500, 554, 572-73, 575, 633, 641, 691 con melodías múltiples, 183-86; de *El Clave Bien Temperado* dado al Cangrejo, 323, 326-28; en el espacio, 192-94, 204, 206-208; roto, información en, 191
disco y tocadiscos, semejantes a constituyentes celulares y cêlulas, 99, 187-94, 198, 207, 633
Diseño G, 165-68, 172-74, 189, 601-602, 781
disparadores: como ADN, 190-91; mensaje exterior y, 196, 200, 203, 206, 592; mensaje marco, 192; música y, 193-93, 330, 454, 689; rockolas y, 190-91; 201-202, 206, 591; koans y, 288; símbolos latentes y, 330, 332, 333
dispositivos de entrada y salida, 338-39
distancia al objetivo, 722-23
distribución de castas: codificación del conocimiento en, 376, 381-86; significado de, 378-81; fechado de, 375-76, 381
divisiones, mentales, 794
doble negación, 216, 643, 654
Doble Nodulación, ley de, 285
doGma I, doGma II, 629-30
Dogma Central: de la Biología Molecular, 597; 607-608, 629-30, 633, 789, de la Lógica Matemática, 317, 629-31; del sistema MIU, 607; de Tipogenética, 606-607; de cadenas zen, 279, 280, 282, 285
Doko, 293, 828
dolor de cabeza, 74-75
Dostoievsky, Feodor, 448-49
2, como concepto, 802-803
2-D *vs.* 3-D; en Escher, 69-70, 124-126, 147, 559-60, 620, 817-18, 828, 850; en Magritte, 568-70, 583-84, 831-32, 836-37; pantallas de televisión y, 578-83, 869; tripletes y, *ver* triplete
2 + 2 = 5, 680
Dragón (Escher), 559-60, 620, 828
Dreyfus, Hubert, 678
dualismo, 293-98, 829; *ver también* sujeto *vs.* objeto
Dumpty, H., 391
dupletes (Tipogenética), 603, 605-606
Dvorák, Antonin, 193

Earrwig, Dr. Tony,692-700, 741
Eccles, John, 678
E. Coli, bacteria, 209, 635-39
ecuaciones diofantinas, 327, 543-44
efecto marco, 835
efectos macroscópicos por causas microscópicas, 362-63
eficacia explicatoria en el nivel superior, 378-83, 839-43
eficacia explicatoria nivel superior, 839-41
Einstein, Albert, 119
elección, 843-48
electrones, 165-72, 302, 357-59
Elena de Troya, 131
ELIZA, *ver* programa del doctor
El paso sin paso, ver Mumonkan
embudando, 407-409
emisiones de radio, 151, 194, 200, 416, 565, 644, 854
emociones: cerebro y, 98; como epifenómeno, 801-802; dependencia de la inteligencia respecto de, 677, 705-706; imitador, 707-708; música y, 98, 190, 193-94, 207, 454-55, 740-41, 801, 830; potencial, 330, 454-55, 689; programas y, 677, 705-709, 740-41, 799-802; universalidad de, 193, 206-208
emulación, 347, 348
encadenamientos hacia atrás, 731
encajonados, sistemas, 554-55, 641
enfocamiento, 777-79
ENIUQ (procedimiento), 589-90
enlace peptídico, 618
enlaces covalentes, 608
enlaces de hidrógeno, 610, 618, 621
Eno, 237, 294
entender, naturaleza de, 672-73, 799-800, 805-806
entendiendo mentes/cerebros: significado de, 826; posibilidad de, 826-28, 838-39
entrecruzamiento, 786-90
enunciado infinito, 587
enunciados autocitables, 503, 583
enunciados autoprobatorios, 640-42
enunciados autorreferenciales, 514-17, 564, 585-93
enunciaciones del lenguaje natural como programas, 743-44
enunciados Henkin, 639-52, 841; versiones explícitas e implícitas, 640
enzimas: como modelos para IA, 784-85; estructura de, 613-16, 621; función de, 614-17, 624-27, 641-43; reglas de inferencia y, 601-602, 606-607, 627; síntesis de, 611-14, 617-20, 623-26, 635-43, 646; versatilidad de, 625-26; *vs.* tipoenzimas, 625; *ver también* proteínas, tipoenzimas
epifenómenos, 363-64, 428, 681, 704, 801-803
epigénesis, 188-90, 191-92, 628-29, 786
Epiménides, cuadro de, 586
Epiménides, paradoja: dos niveles de, 686-690-

91; miedo de, 27; recursión indirecta y, 158; sutileza de, 585-88; vinculación con Teorema Gödel, 19, 20; versión difundida, 23, 25; versión francés-inglés, 593; versión molecular, 634; versión neural, 690-91; versión quinereada, 509-517, 526-27, 531, 587-590, 637-634; versión Tarski, 685-86, 690-691; versión Whitely, 564.
equiparamiento forzado, 793-95
errores en programas, 347, 348-350, 704
escala cíclica, *ver* tonos de Shepard
Escher, Maurits Cornelius: Bach y, 238, 788, causante primero, 817-820, 843; bucles extraños y, 12-17, 874; contradicciones y, 115-118; copias y, 172-174; dibujos de, *ver* Lista de Ilustraciones (XIV-XVIII); figura y campo en, 79-80; incompletitud y, 850-51;. Magritte y, 568; plano *vs.* espacial y, 559-560, 561, 817-819; sobre subcerebros, 458; Zen y, 266, 300
Escherización, repetibilidad de, 559-560, 817-819, *ver también* 2-D *vs.* 3-D, Gödelización
escrituras, collage de, 199
Esencia con Mayúscula, 34
esencialmente incompleto: del cumpleaños de Aquiles, 546-49, 562-76, 816; de fonógrafos, *ver* Tödelización; de I.A, *ver* Teorema Tesler; de lista de reales, 499-500; de proceso de autoinclusión, 582, de TNT y sistemas relacionados, 553-56; *ver también* Gödelización, Tödelización, Escherización, no-programabilidad, etc.
espacio, 4-D, 755-56
espacio 5-D, 757
espacio de programa, 352
espacio negativo, 75, 79, 86, *ver también* figura y campo
espacios: abstractos, 540; de comportamiento, 360, 361-63, 428, 735; de enteros, 593
espacios de problemas, representación de, 722-725
espiritualismo, 455, 558, 678-79, 813, 841
esqueletos conceptuales, 451, 608, 788-95, 797-98
esqueletos (recursividad), 165-67; *ver también* base
esquema de axioma, 56, 57, 77, 103, 153, 559, 641
esquemas de respuesta, 547-48, 562, 816
"esta oración", 516, 585-88, 590
Estado de Gracia (Magritte), 569
estilos de pensamiento exóticos, 651, 665-66, 668-70
estructura cuaternaria, 621
estructura primaria; de proteínas, 613-17;
estructura recursiva de ideas, 456-58, 661, 734, 762-63, 769, 776-77, 791, 794-95
estructura secundaria, 617, 621
estructura ternaria: de proteínas, 614-17, 620-21, de ARNt, 618; de tipoenzimas, 604-606, 614
Estructuras Alternativas de Unión, *ver* ambigüedad de ASU: lenguajes de computadora y, 349; en traducción al TNT, 247-50
Estuche Asiático, Oro Auténtico, *ver* Estuche de Oro, ensambladores Asiáticos Auténticos, 246, 342
Estuche dorado auténticamente asiático, 477-78
Eta Oin, 692-700, 798
ETAOIN SHRDLU, 743-45
Euclides, 22, 51, 70-72, 104, 255
Euclides, Teorema número primo, 41, 70-72, 268
Euler, Leonhard, 3,465
Euwe, Max, 715
evidencia, naturaleza de, 749-753
evolución, 378-79
eximición del divisor, 88
expansión de nódulos, 158-60
expresibilidad y poder expresivo, 119, 492-93, 521-24, 525-26, 532, 536-37, 550-56, 685-86
extracción (mecanismos), *ver* decodificación (mecanismos)

F (*n*) y M (*n*), 162, 168, 423
fagos T4, 635-39
fagos, *ver* virus
familia piramidal de teoremas, 261-65, 533-35
fantasía, regla, 216-19, 221-22
Fantasía y Fuga en sol menor (Bach), 853
Fauré, Gabriel, 193
Federico el Grande, Rey de Prusia, 3-9, 32, 465, 865
fenómeno "verbo al final", 153-54
fenómenos emergentes, 841, 848
fenotipo, *ver* genotipo y fenotipo Ø X 206, 209, 620-21
Fermant, Johant Sebastiant, 391-94
Fermat, Pierre de, 323-26, 326; confundido con Bach, 389-394
fermatas, 323, 388, 390-91
Fibonacci (Leonardo de Pisa), 161, 288
Fibonacci, secuencia, 161, 162, 163, 179, 205-206, 309, 491
FIGURA-FIGURA-figura (Kim), 81-82, 87
figura y campo: 73-75, 76-88, 868; en música, 83-85
figuras recursivas, 79-83, 86, 87
filosofía formal de las matemáticas, 542
filtros: por abstracción, 336, 481-483, 767, 777-79, 784, 796-97; por Pools, 494, 504
final después del final, 463, 475
finalización garantizada, 48, 467-470, 471, 45
firma, visual, 408, 409
Firuláis (Double-Dandy), 722
Física, leyes de: como base para escoger entre teorías matemáticas opuestas, 118-119, 540, como obstáculo del regreso infinito, 202, 811-812; como sistema formal, 64-65; conciencia fundamental, 681, 812, 843; el Dilema Reduccionista y, 616, 841-42; inconsistencia y, 113-114, 116-118, 690-91; intuitiva, 427-28, 844; niveles y, 357-59 361-63, 822; sin escape de, 565, 681
fisión y fusión (de conceptos), 397, 414-15, 419 518, 556, 785-86
flautas, 3-5, 31, 624, 651-59, 854-55, 861
flexibilidad e inflexibilidad, 30-31, 348-356, 721-726, 777, 796-99, 814
FlooP, 479, 501-507, 669-671; alimentadas en sí mismas, 501-502; poder de, 505-507, 663-64
fluidez, 445-46
fonógrafos (tocadiscos): baja fidelidad, 91, 101, 120, 480, 556; como reveladores de información, 187-91, Epsilon-cero, 575; familia de, en la rockola del Cangrejo, 183-86; Gran autoensamblador, *ver* tocadiscos Epsilon-cero; números 1,2...etc., 90-91; Omega, 92, 553, 572-73; repeledores de lo ajeno, 576-77; rom-

petortugas, 572, 576-77; semejante a sistemas formales, 99, 101; sistema monoaural *en* dos canales, 750, 791; *ver también* rockolas; vulnerabilidad intrínseca de, 89-92, 121, 500, 555, 572-75, 633, 641, 690, 855, *ver también* Tödelización, batallas Tortuga-Cangrejo, etc.
fonógrafos, *ver* tocadiscos
fonones, 359
Forkel, Johann Nikolaus, 4, 102
Forma AABB, *153, 268*
forma, 56, 78-79, 80, 87, 225-26, 437-38 sintáctica *vs.* semántica, 687-690, 746
forma y contenido, 99-100, 241, 328, 687-690, 788-90, 879
formalismo actor, 783-85
formas reconocibles, 80
fórmula: cerrada, *ver* oraciones; abierta, 245-46
fórmula recursiva, de pensamiento, 661
Fórmulas de TNT, 244, 245-55
fotones, 168-172, 302
Fourmi, Pierre de, 392-93
fracciones continuas, 165, 325, 665, 668
Frank, Philipp, 759
frases combinadas, en TNT, 253
frecuencias, de palabras y letras, 446-458
Frege, Gottlob, 22
fregadero de cocina, el, 370-71
frituras francesas, 752-55, 810
Fuga Hormiguesca, 396, 410, 412, 451, 674, 814, 874-76
"*Fuga Hormiguesca*" (Escher), 379-80
fugas: 394, 750, 866, 873; Diálogos y, 32; en el *Arte de la Fuga*, 83-96, *102; en la Ofrenda Musical*, 4-11; naturaleza de, 10, 329-33, 874; recursos en, 370, 379-80, 387-89, 874-77
funciones recursivas, 161-67, 179, 507-508, 538; *ver también* recursividad general, recursividad primitiva, BlooP, FlooP
futbol, 52, 357, 416, 750-57, 761, 762, 763, 795

∼ G, 318, 531, 533-38, 542-44, 639
G (cuerda de Gödel), 20, 317-19, 334, 528-538, 543-44, 593-94, 685, 719, 789, 839-40
G′, G″, G‴...Gω, 551-554
G(n), 162
G0025, blanca de piedra, 740
Galería de grabados (Escher), 13, 848-851
Galileo, 566
Ganto, 224-25, 300, 480-81
gases y moléculas, 361-63, 373, 822
gatos, 368, 403-407, 629
Gauss, Karl Friedrich, 109, 119
Gebstadter, Egbert B., 112-13, 474-76, 573
Gelernter, E., 716-17
genes *superpuestos*, 620
genio, manipulación-símbolo, 46-48, 57-58
Genio, Meta-Genio, etc., 103-139, 255-56, 264, 265, 721; *ver también* djinns
genotipo y fenotipo, 188-191, 198, 205-206, 208-209, *347, 628-29, 788-91*
gente *vs.* máquinas, 29-31, 42-45, 178-79, 459-61, 557-59, 561-63, 660-64, 669-79, 682-85, 702-708, 715-19, 735-39, 805-806, 811-13
Gentzen, Gerhard, 231
geometría: absoluta, 107, 110, 115, 262, 480, 533-34; elíptica, 110; euclidiana, 22, 23, 104, 110, 119, 262, 533, 534, 715-17; no euclidiana, 22, 23, 109-111, 116-17, 119, 262-264, 533-39; "verdadera" versión de, 104-113, 117-119, 539-40
geometría postulado cuatro, *ver* geometría, absoluto
GlooP, 479, *505-506*
Gödel, Kurt, 17-21, 28, 33, 875-77, 879
Gödelización, 315; programabilidad de, 557-60 repetibilidad de, 500, 550-63, 816; *ver también* Escherización, Tödelización, brincando fuera del sistema
Goffman, Erving, 565
Goldbach, Cristian, 465, 467
Goldberg, Johann Theophilus, 463-64
Goso, *290*
Gota de Rocío (Escher), 291, 299
goteras, entre niveles de ciencia, 360
grabadoras, 574, 613, 619, 620-25
gráficas, 864
gráficas recursivas, 163-68
gramática: para diagramas Feynman, 168, 170; para koans, 739-40; para lenguajes de computadora, 349, 481-90; para lenguajes naturales 153-58, 176-77, 428, 693-700, 733-34, 745-48; nivel superior, 739-41; para música, 740-41, para pensamiento, 741
Gran Torcedor, 278, 285-87
Gran Tutor, 278, 281, 286
grifo mental, 430-31
Groot, Adriann de, 335
guanina, *ver* nucleótidos
guía de números reales, 497-500
guitarras, 74, 237
Gutei, 279
G(*n*), 162

HACKER, 785
haiku, *181-82, 620*, 733-34
Hammurabi, 201
Hardy, Godfrey Harold, 664-69
Harrison, Lawrence, 777
Haussmann, Elias Gottlieb, 2
Hechos Fundamentales 1 y 2, 521-*24*
hélice-alfa, 617, 621
hemiolia, 300, 614
hemisferios, 301, 401
Henkin, *León*, 439-40
heterarquías, 158, 423-24, 631, 770-74, 783, 819
heurística, 693, 694, 697, 713, 744
Hewitt, Carl, 783
Hilbert, David, 22, *27-28, 271-543-44*
hipos, 296, 297, 796, 860-61, 873
hipotética, 52-53, 750-57
historia del avión y la montaña de heno, 799
Hofstadter, D.R. 365, 859, 864, 879
Hofstadter, Ley, 179
Hogen, 296
holismo: definición, 297, 367; *vs.* reduccionismo, 333; zen y, 297
hombres *vs.* mujeres, 564, 702-703
hormigas: colonias de hormigas, 370, 371, 377, 378, 383, 388, dispensabilidad de, 384, hormigueros, 423
hormigas soldado, 374
hormigas trabajadoras, 374

Hubel, David, 401, 404
huecos, 763, 770-71, 776-77, 791
huevos, 228, 425, 453
Hyakujo, 297

I, 537
i, 537
"Yo", referente de, 719
IA: actitudes contra, *ver* actitudes anti-IA, 704-707; aplicada a las matemáticas, 676-77, 626-29; argumentaciones contra, 704-707; convergencia hacia el cerebro, 684; definición, 31; dificultad respecto de, 31-32, 677, 879, esquema de, 710-713; estratificación de, 351-54; fe subyacente, 675-76, 682-83; historia de, 21-22, 24, 31, 701-705, 709-720; lenguaje de computadora y, 351-54, 647; relación con matemáticas, 660-61, 334; Teorema de Gödel y, 459-61, 557-64, 838-39, evidencia y, 824
identificación con artefactos, 719, 846-48
idiots savants, 669-70
iluminación, 273, 278-79, 285-86, 288, 293, 297, 298, 567, 670
Iluminación; Suprema Iluminación; 278, 281, 285, 286
Ilusión, 835
ilustración MU, 332-33, 365-68, 385, 385-87, 621
imágenes: confusas, 813-14; de pensamiento, 737, 739
Imaginación Artificial, 661
imaginación visual: conocimiento inaccesible y, 431; falta de un programa, 736-37; "grifos" y, 430-31; necesidad de capas de sustrato, 674; poder de, 397-98; Problemas de Bongard y, 782; "por frotación", 426-27; su papel en la correspondencia conceptual, 790, 95
imperfección, problema de, 88, 502-507, 702, 826-27
implicación relevante, 233-34
impresora de la computadora, 355, 362
improvisación *vs.* introspección, 876-77
inaccesibilidad de los niveles más bajos a los niveles más altos, 813-20, 838-43, en cerebros/mentes, 356, 386-87, 427-31, 733, 802, 813-20, 826-27, 838-43, 877; en Tía Hilaria, 353-54, 389-90, 745, en programas 296, 300-301, 645, 745, 804-805; *ver también* software y hardware, introspección, nivel de conflictos.
incoherencia; definición, 112; con el mundo exterior, 103-104, 113; de la gente, 325, 826-28; interna, 103, 112-14; de Tortuga, 210-13; *ver también* coherencia, contradicciones, ω-incoherencia, zen
incompletitud: Bach y, 102; de aritmética formal, 20, 102, 120-21, 480, 731-32 de cerebros, 691; definición, 102; de extensiones de TNT, 550-56; de fonógrafos, *ver* discos, vulnerabilidad intrinseca de; de lista de matemáticos, 699; de lista de reales, 497-500; de Lucas, 564; de *Principia Mathematica*, 20, 27, 731-32; Escher y, 849-51; de TNT, 317-19, 508, 532-33; *ver también* incompletitud esencial, ω-incompletitud, etc.
incrustaciones, 148, 163-66, 218-19, 781; *ver también* recursividad
indecibilidad, 19, 262, 531, 533-38, 554; causas de, 839-40
India, 648, 650, 658, 664-69
inductoras, 643
infinidad de hechos, 469-70
infinitesimales y análisis inhabitual, 539
información: accesibilidad de, *ver* inaccesibilidad; creación de, 607; descartable, 768, 771, 776-79, 791-95; flujo de, 607, 630, 643-44, 646; irrelevante, 661; profundidad de superficie, 275-76, 482, 504, 648-59, 716-17, 723-24, 743, 797; *ver también* decodificación
ingeniosos-estúpidos, 855-880
inhibición, celular, 642-43
"Inmersión" (palomitas), 147
instrucciones: en lenguaje de máquina, 339-47; *vs.* moldes, 588-89, 627-28; *ver también* programas *vs.* datos
Instrucciones-SI (BlooP), 485-86
INT *(x)*, 163-66, 172, 781
inteligencia: capacidades esenciales para, 30; extraterrestres, *ver* inteligencia extraterrestre, inexplicabilidad accidental de, 839; límites de, 561-62, 804-805; necesario apuntalamiento de, 381; recursión enmarañada y, 178-80; simplicidad de, 204-205; universalidad de, y significado intrínseco, 187, 192-94, 201-209, 592, 782; *ver también* cerebros, mentes, IA, etc.
inteligencia extraterrestre, 191-94, 198, 204-209, 401, 765, 782
intención de máquinas, 811-12
intensionalidad y extensionalidad, 369-98, 412, 425-27
interminable regresión, 131-34, 168, 172, 179-80, 272, 459-61, 503, 587, 874-75; de objetividad, 567; en paradoja Carroll, 51-54, 202, 227-28, 811-12, 822-23; imperfecta, 148, 157-59, 201, 714-15, 811-12; Zenon y, 31-32; *ver también* saneamiento, acrónimos recursivos, repetibilidad
interpretaciones: de cadenas, 602-604; de Cálculo Proposicional, 220-21, 222, 226-27; de sistema pq, 59-64, 103-104, 120, 187-88; de sistema tq, sistema C, sistema P, 76-77, 88; múltiples, 111-112, 121, 181-86, 311-12, 317, 529; de TNT, 241-48, 311-13, 436, 630
interpretaciones no-significativas *vs.* significativas, 51, 88
intérpretes: gente, 244, 349, 618, 794; mecanismos en cerebro, 688-90; programas, 246, 596, 645-46, 728-29, 748, 820
INTERRUMPIR (BlooP), 487
introducción a sistemas formales, 115, 245, 254
introspección, *ver* automonitor, autoconciencia, autoconocimiento, inaccesibilidad, introspección de TNT
intuición, 661, 665, 724, 806, 846; programación de, 715, 720
Intuición Artificial, 661
Invención a dos voces, 32, 51-54, 811-13; *ver también* paradoja de Carroll, Lewis Carroll
inversión, 8-10, 95, 172, 807-10, 874-75; *ver también* copias, complementario respecto de original
irracionalidad *vs.* racionalidad en cerebro/mente, 679-81
irregularidades, mente/irregularidad, etc. 562-63

Isan, 297
ismo, 297-98, 739, 835-37
Ismo Artificial, 739
isomorfismos: autorreps y, 592-95; como revelaciones, 188-91, 307; como raíces de significado, 59, 64, 103-104, *111, 312-13, 396, 413;* de emociones, 193; de grano grueso, 173-74, 595; definición, 9, 59-61; en *Contracrostipunto*, 98-101; en varios niveles entre los mismos objetos, 436; entre algo y parte de sí, 163-67, 172-74; entre aparatos visuales, 406-407; entre ADN de Cangrejo y *Canon Cangrejo*, 240, 789; entre forma y contenido en Diálogos, 99, 101, 150-53, 24, 789; entre lombrices, 402-403, 406; entre matemáticos, 668; entre matemáticas y realidad, 64-72; entre procesos mentales y programas, 670-77; entre problemas Bongard, 781, 791-92; entre sistemas formales y teoría de los números, 482; entre modelos de números naturales, 256; entre sistema MIU y sistema 365, 305-310; entre telarañas, 438-39; exóticos, prosaicos, 189; fluido, 347, 412, 427; numeración Gödel y, *ver* isomorfismo Gödel; parciales, 172-73, 438-52; *procesamiento* visual, 405; *ver también* significado, traducción, copias, decodificación; transparentes, 97, 187-88, 312
isomorfismo Gödel, 305-318, 520, 524-28, 877-77; comparación con reflejo del mundo en el cerebro, 593-94, 673-74

"Jabberwocky" (Carroll), 432-35, 439-41
Jacquard, el telar de, 29
Jaki, Stanley, 678
"Jammerwoch, Der", (Carroll-Scott), 432-35
jarabe desplazador, 124-25
"Jaseroque, Le" (Carroll-Warrin), 432-35
Jauch, J.M., 481, 483, 566
Jefferson, G., 706
jerarquía de variabilidad, 761-64, 792
jerarquía enredada: casi pérdidas, 819; de ajedrez automodificable, 816; definición, 11; de genética, 629-31, 644-47, 816; de la mente, 819-20, 842-43, 853; del razonamiento de la Tortuga, 210-13; de *metamatemáticas*, 541, 629-31; de tipogenética, 606, 607, 816
Johns, Jasper, 834
Joshu, 274-75, 279, 279-86, 282, 295-96, 302-303, 319
JOSHU (cadena TNT), 523
Juana de Arco, 23
juegos automodificables, 814-16
jugadores de ajedrez, ciclo de, 112

Kaiserling, Conde, 462-63
Kay, Alan, 783
Kennedy, John F., 758
Kim, Scott, 81-82, 595, 619, 853
Kirnberger, Johann Philipp, 10, 861
Kleene, Stephen C., 563
Klügel, G.S., 108
koans, 35, 224-26, 274-87, 288-302, 739-40; generado por computadora, 739-40; genuino *vs.* falso, 275-76, 280-81, 284, 286, 504, 739-40
Kronecker, Leopold, 256
Kupfergödel, Roman, 465
Kyogen, 287

"la", 692, 744-45
La Mettrie, Julien Offroy de, 3, 27, 865
La Red de Indra, 301, 302
lagartos, 128, 128, 136, 137, 139, 147
Lambert, J.H., 108, 109, 118
lámpara, meta-lámpara, etc., 128-133, 256
Lashley, Karl, 402, 404, 410
Legendre, Adrien-Marie, 19
legumbres desecadas, 509
Lehninger, Albert, 596
Leibniz, Wilhelm Gottfried, 28-29, 709
lemas, 268
Lenat, Douglas, 727
lenguaje (s): adquisición, de 202, 346, 356; alemán, 432-35, 439-40, 349, 786; árabe, 737; *autorreps* en, 509-17, 585-88, 592; *ver también* significado, traducción, etc.; como medio para demostraciones, 104-107, 231; collage de, *ver* escrituras; computadoras y, 134, 159, 353-54, 428, 456, 464, 707, 709-12, 732-49, 674, 797-99, 855; de abejas, 424; del cerebro, 674; chino, 194, 786, 800; efecto en el pensamiento, 445-46; flexibilidad de, 768, 798-99; francés, 350, 432-345, 439, 440, 445, 593, 730; gramática de procedimiento para, 155-58; *hebreo*, XVIII, 445; isomorfismos invisibles y, 97; japonés, 199; jerarquía de, 25; necesario apuntalamiento del, 381; particiones entre, 794; ruso, 448-49, 759; significados activos en, 62, 63; significado de lecturas en producto computadora, 707-708, 708-709, 737-739
lenguaje de máquina, 339, 357, 361, 451, 645-46
lenguaje ensamblador, 341, 348; comparado con ADN, 341, 343
lenguaje objeto, 25, *218, 290*
lenguajes compiladores, 343, 347
lenguajes de circulación de mensajes, 783-84
lenguajes de computadora: análogos en células, 646; a nivel superior, 343-45, 349, 353; circulación de mensajes, 783-84; dialectos de, 595, en SHRDLU, 744-48; flexibilidad y, 351, 353; poder de, 351, 501-507; presentado, 339-53, 479-508, 588-90; sistemas de computadora, 337-56
Leonardo de Pisa, *ver* Fibonacci
Lermontov, Mikhail, 759
Liberación (Escher), 69-69, 77
libre albedrío, 459, 805-806, 841, 843-48, 854, 871; *ver también* brincando fuera del sistema
ligasa ADN, 627
limericks, 571-72, 873
límites superiores, *ver* bucles, delimitados, BlooP
límites, *ver* bucles, delimitados, BlooP
Lincoln, Abraham, 537
línea de montaje, celular, 625-26, 642-43
líneas geométricas, 21-22, 106-110, 118, 262, 534, 539
LISP, 345, 451, 740, 772, 820, 875-76
lista completa de los grandes matemáticos, 476, 499
Lista Completa de Todos los Grandes Matemáticos, ver Lista
Littlewood, J.E., 666
lo no-significativo, en arte y música, 830, 830, 835
Lobachevski, Nikolay, 108
localización del conocimiento en el cerebro y en

programas, 341, 402, 410, 730, 731
Lockwood, Anna, 830
lógica, 21-27, 52, 54, 116-118, 210, 213, 214, 235, 545, 549, 731, 732
lógica interior compulsiva, 191, 193
lógica matemática, historia de la, 21, 27
lombrices de tierra, 401, 403
Lovelace, Lady Ada Augusta, 29, 361, 706
Lucas (argumentación): méritos de, 558-59; refutación a, 562-65, 682-83; resumido, 557-59
Lucas, J.R., 459-61, 557-59, 561, 563, 564, 678, 682-83, 704
Lucas (secuencia),165, 179, 206
Lucus el Pensador, 564
llamadas telefónicas, 73-75, 149-50, 191; obscenas, 509-516
llanta de refacción, 793

Mac Gillarry, Caroline, 789
Mac Laine, Shirley, 334
MACSYMA, 726
Magnifican...grejo, por supuesto, 661, 678, 686
Magnificat en Re (Bach), 648, 652, 658-59
Magritte, René, 336, 38, 568, 569, 578, 583-84, *741, 831-33; pinturas* de, *ver* Lista de Ilustraciones,
Mahalanobis, P.C., 667
Majotaur, 141, 143, 146-47
malaphors, 777
Mandelbrot, Benoit, 84
manera de considerar el cerebro matemáticamente, 600-61
manifestaciones de símbolos, 413
Manos dibujando (Escher), 17, 24, 158, 817, 820, 843, *849, 874*
Mao-Tse-tung, 512
Máquina Analítica, 29, 706, 863
máquina de composición tipográfica, 718
Máquina de Diferencias, 29
máquina de pinball, 362
máquina que funciona sin equivocarse, 679-80
máquinas: autoensamblado, 190, 574, 596, 641, 644; no es tan sólo las sumas de sus partes, 460-61; reflejándose en ellas mismas, 338, 340
máquinas fotocopiadoras, *590*
máquinas que actúan sin advertirlo, 43-44, 798
máquinas Turing, 461, 701-702
marcos, 441, 762-64, 783, 796
Mariposas (Escher), 173-74
mármol, rodando, 843-46
masa crítica, 269, 373, 460, 492, 556
matemáticas: ejecutadas por computadoras, 576-77, 711, 726-27; fundamentos de las, 21-28, realidad y, 65-71, 539-43
matemáticos, 541-43, 660, 668, 726
Materialismo, campeones de, 32, 865
Mathews, Max, 717-18
Mc Carthy, John, 344
Mc Culloch, Warren, 158
mecánica celeste, 416-17
mecánica cuántica, 21, 65, 166-72, 412, 538, 540, 829;*ver también* partículas
mecánica estadística, *ver* gases
mecanismos de decodificación; complejidad de, 187-92, 204-209, 688-89;fonógrafos como 99, 162-66; innatos, 201-203; naturaleza de, 187-209; respecto de Tripitaka, 300; transparencia de, 312, 592, *ver también* isomorfismos, etc.
mecanización de los procesos del pensamiento, *véase* IA, sistemas formales, etc.
medios-pares, 649-50
meiosis, 787, 795
melodías: recuerdo de, 429-30; tiempo-compartido, 456
memoria, en computadoras, 388-89, 644-45, 728
memory dump: vuelco, vaciamiento de la memoria, 451
mención, *ver* uso *vs.* mención
Mendel, Arthur, 4, 33
mensaje interior, 196-203, 206-209, 592, 618, 620
mensaje marco, *192-96*, 198, 209
mensajero, por koans, 276-77, 280
mensajes, 182, 187-209; botellas, 198-200, 619 de la naturaleza, 482; en colonias de hormigas, 413; estratos de, 196-202, 619, 620, 834-35; *ver también* mensaje exterior, mensaje interior, mensaje marco.
mensajes exteriores, 196-203, 207-209, 592, 619, 835
mentes: dos modos de creación, 46; *ver también* cerebros, inteligencia, *etc.*; programabilidad de, 356, 805, *ver también* IA, paradoja de IA, Teorema de Tesler, no programable, pensamientos y, 436-61; similitud de, 445; *vs.* cerebros, 369, 679-682
Menzel, Adolph von, 4-5
Meredith, Marsha, 739
Mergenthaler, Otto, 745
meta, 256-57, 265
meta-agnosticismo, 135
meta-analogía, 797
Meta-Genio, *ver* Genio
meta-hipo, 861
META JOSHU, etc., 523
meta-proteínas, 630-31
meta-símbolos, 661
meta-TNT, etc., 523-24, 630-31
metabúsqueda, 469
metaconocimiento, 429
metadescripciones, 776-77, 797-98
metadeseos, *ver* deseos
Metaesquema de Respuesta, 548
metaevidencia, etc., 822-23
metafase, 788-89
metáfora, 795
metáfora cristalización, 409
metáfora de la tipografía "extraña", 638
metáfora del patinador, 487
metáfora del sistema postal, 784
metaintuición, 715
metalenguaje, 25, 218, 230, 290, 316, 607
metalibro, 25
metalógica, 26, 800
metamatemática, 27, 684; reflejada en el interior de TNT, 532
Metamorfosis (Escher), 15-17
metarreglas, etc.; en ajedrez, 814-16; en la inteligencia, 30-31, 611-13, 660
metas y submetas, 268, 695, 696, 698, 720-26, 731, 744, 746-47
metateoremas, 229-30
metateoría, formalizada, 230

metautor, 717-20, 861
meteoritos, 198-204
metilación, 638
método de la tortuga, *ver* Tödelización
método diagonal, de Cantor, 493-500, 503, 505-507, 518, 527, 554
método Gödel, causas subyacentes de, 241, 480-81, 550-51, 553-56
métodos finitistas de razonamiento, 27, 271
métrico, mental, *724, 726*; *ver también* parentesco conceptual
Meyer, Leonard B., 197, 835, 836
mezcla de niveles en genética, 603, 607-608, 645-47
microprogramación, 347
Miguel Angel, 759
1729, 242, 249, 406, 464, 650, 666
minivocabulario, 765-66
Minsky, Marvin, 441, 459, 762, 804, 856
mirar a las mujeres *vs.* mirar, *mujeres que ven* hombres *vs.* mujeres
Misterios, Los (Magritte), *832-33*
modos de escuchar fugas, 331-33
modulación, 11, 143-146, 151-53, 551, 593, 851, 876
modularidad, 174-77, 727-35, 742, 803; *ver también* localización, propiedades locales *vs.* globales
módulos en el cerebro, *ver* símbolos
modus ponens, *ver separar*
moldes: para los problemas de Bongard, 767-68, 776; *vs.* instrucciones, *ver* instrucciones *vs.* moldes, programas *vs.* datos
Mondrian, Piet, 830
Monod, Jacques, 190
monos, visión de, 407
morfogénesis, 637, 642
Mosaico II (Escher), *73-75*
mosaicos, 80, 83, 235, 789
Mozart, W.A., 767, 834
MU, como posible teorema del sistema MIU, 39, 49, 271, 302-305, 310-12, 318, 840
MU, palabra Zen, 275, 283, 288, 297, 302, 319, 366, 367, 368, 386
Muestra Cautiva, La (Magritte), 578
multifurcación de TNT, 552-53
multiplicación, 65-67, 76-77, 244, 483, 538, 668, 669
Mumon, 284, 288, 290-91, 295, 302, 303, 318; *comentarios* por, 288, 289, 294; poemas por, 288-89, 295, 318
MUMON, cadena de TNT, 310-12, 317, 522
Mumonkan, 288
mundos hipotéticos, 113-19, 397, 424-27, 447-48
música aleatoria, 193, 207, 830
música: comprensión superhumana de la, 204, 805; compuesta por computadora, 29, 702, 704-705, 713, 717-19, 740-41, 801-802; dimensiones de, 108; matemáticas y, 268, 655, 662; moderna, 184-86, 193-94, 207-208, 829-31, 835; notación de la, 651-59, *ver también* SMUT; para infiltrar fonógrafos, 576-78; *ver también* fugas, cánones, pianos, flautas, etc.; para romper fonógrafos, 89-91; semántica de, 98, 192-94, 198, 206-208, 688-70, 740-41, 802-802; sintaxis de, 142-46, 151-54, 268, 740, 741
mutaciones, 348
mutaciones paradigmáticas, 780-81

N, *ver* teoría de los números
Najunamar, 648, 650
Nansen, 291-293, 296, 298
Naturaleza de Buda, 274, 275, 279-87
negación, 83, 85, 216, 226, 227, 249-50, 253, 643
neurocirugía, 364, 369-70, 730, 803-804
neuroglias, 398
neuronas: como sumadoras de entradas, 372, 400, 681-82, 802; como un nivel inviolable, 355, 801, 802-805; *ver también* inaccesibilidad no controlable conscientemente, 355, *ver también* inaccesibilidad; centro de encendido y centro de apagado, 403-405; comparadas con hormigas, 371, 373, 398-400; de Euclides, 72; de la retina, 402-405; descritas, 398-400; excitación de, 98, 372, 400, 403-406, 408, 412, 421; simple, complejo, hipercomplejo, 405-407, 407, 408
New Yorker, The, 759
nivel de conflicto: en mensajes, 194, 201, 829-35; en mente/cerebro, 879-682; en SHRDLU, 744-45; entre lenguaje objeto y metalenguaje, 230, 531-32; en Tía Hilaria, 388, 745
nivel E, *ver* nivel enredado
nivel enredado, 816
nivel I, *ver* nivel inviolable
nivel inviolable, 813, 821
nivel-TNT, explicaciones en, 840
niveles de descripción: de colonias de hormigas, 390-92; de distribución de castas, 376-87; de errores 346-47; de gases, 369; de una pantalla de televisión, 334; de la estructura mental humana, 337; del cerebro, 411-13, 451-52, 660, 673-682, 690-91; del cuerpo humano, 334; de los procesos mentales, 670-77, 679-83, 690-91; de los programas, 346-47, 450-51; del tablero de ajedrez, 335-36; *ver también* holismo *vs.* reduccionismo
niveles de estructura: de enzimas, 604-605, 614, 617, 621, 629-31; de música,
niveles de significación: actividad neuronal, 679-82; de ADN, 190, 628-29, 486; de cadenas de TNT, 216-218, 311; de Mumon, 290; de MUMON, 311-13; de música, 192-93; en colonias de hormigas, 373, 384; en *Contracrostipunto,* 97-101; en la paradoja de Epiménides, 586, 686, 690-91
niveles más bajos, *ver* sustrato mental
no divisibilidad, 87-88
no euclidiano, 108-110
no existencia, 297-98, 828, 860; *ver* también Tumbolia números no producibles, *310*
no programable: de brincos fuera del sistema, 44-46, 564-65, 798; de creatividad, 673-74, 734, 796, 797; de emociones y voluntad, 802, 811-13; de Gödelización, 558-59; de inteligencia, 30, 31, 557-59, 709-10; de irracionalidad, 679-82; del campeón mundial de ajedrez, 178-80, 797; del espíritu, 678-79; de nombres ordinales, 562-63; *ver también* gente *vs.* máquinas, batalla Tortuga-Cangrejo (TC), esencialmente incompleto, paradoja de IA, Tödelización, 2-D *vs.* 3-D, etc.
"No puedo ser escuchada (Demostrada, etc.) ...",

91-92, 101, 430, 530, 550-52, 633, 639, 719
no teoremas, *ver* teoremas *vs.* no teoremas, no vía, 46, 116, 286
noción de interesante, programado, 727
nombre modificado, 154, 159
NOMBRE ULTRAMODIFICADO, 155-158
novedad, y brincos fuera del sistema, 562
Novena Zenafonía de Beethoven, 750
núcleos: celular, 608, 611, 612-13; del átomo 557-58
nucleótidos, 608-611, 613-14, 617-20, 627-27, 638-39; primeras letras de, 272, 611-12
nudos, 401-402, 319, 743
nudos y líneas, 438-39, 771-74
numeración Gödel, 20, 518, 875-77; de programas FlooP, 502-503, 593; de sistema MIU, 305-309; de TNT, 313-16, 684-85
numerales, 246, 368; *vs.* números, 309-310
números compuestos, 76, 77-78; *ver también* números primos
números ideales, 68
números índices para programas, 494-95, 504-505
números maravillosos e inmaravillosos, 473-75, 481, 490, 493, 501
números MIU, 309-313; *ver también* teorema-números
números naturales: definidos, 65, 241; generalizados; 536-39; postulados para los, 255-56; *ver también* teoría de los números, numerales, TNT, números primos, etc.
números, naturaleza de, 65-68, 534, 541
números perfectos, 491, 493
números primos, 70-71, 76-79, 87-88, 175, 250-51, 487-88, 650-59, 727; diferencias de, 465, 467, 470, 472, 491; sumas de, 465, 467, 473, 489
números producibles, 309-310, 315-316
números racionales e irracionales, 165-68, 493, 535, 657
números supernaturales, 263-64, 436-39, 541-43, 553
números TNT, 315-16; *ver también* números teorema

objetos autoprogramables, 812-13, 819-20
objetividad, búsqueda de, 566, 822-25
Oborin, Lev, 192
obras de arte insertadas una dentro de otra, 17, 125, 831-34, 836-37
Ofrenda Mu, A, 318, 743
Ofrenda Musical, La (Bach), 4-11, 102, 787, 788, 853, 854, 859, 862, 876
Oin, Eta, *ver* Eta Oin
oír por computadora, 711
Oistrakh, David, 192
ojos, 279, 304, 364, 366, 368, 564, 565, 848
Okanisama, 273, 275, 278, 280, 281, 283, 284
olvido, 682, 683, 732
ω-coherencia, 543; *ver también* q-incoherente
ω-incoherente, 19, 263, 535-38, 541-43
ω-incomplementos, 262-63, 497, 533
opciones subsidiarias, 415-457, 485, 763, 798
operaciones tipográficas, definición, 76
operador de gödelización, 558-59, 561-62, 642
operador MU, 501
operadoras y operones, 643
oraciones en TNT, 246, 247
Oraciones PyQ, 515-16
oráculos, 670
orden y caos; autoconciencia y, 479; en colonias de hormigas, 372-73; en teoría de los números, 464, 467, 470-76, 479, 481, 493-94
Orden y Caos (Escher), 471
ordinales, 546-49, 562-63
orientación, 352, 445-46
origen de la vida, 647
original (como el contrario de copia), 597
originalidad y máquinas, 29, 715-19
oro, 205
Oso Hormiguero, 323-333, 366-395, 451, 674
Oso neuronero, 451
Otro Mundo (Escher), 429, 299

páginas, en computadoras, 340
Paisaje imaginario núm. 4 (Cage), 193-94, 830
palabras: actitud zen hacia, 288, 291, 293-97; como programas, 744-45; deletrear de atrás para adelante, 95, 494, 504, 588-89, 592, 630, 648, 862, 875-76, 877, 879; en computadoras, 337-40, 347, 485; pensamientos, reglas formales y, *ver* tesis principales; *vs.* letras, 282-85, 673-74
palabras combinadas, 776
Palindromo, 416-17, 750-53, 761, 762
palindromos, en biología molecular, 238, 789
palomitas de maíz, 123, 146-47
pan de jabón, 588
Pappus, 717-19
par de fagos T, 639, 640
paradoja: autoconciencia, 460; casi pérdidas, 723, 829; de credibilidad a través de falibilidad, 666; de Dios y la piedra, 565; de IA, 21, 30-32, 733-34, *ver también* Teorema de Tesler; de movimiento, *ver* paradoja de Zenón; Deseo Atípico, 136-38; en arte, *ver* Escher, Magritte, Cage; en matemática, 19-28, 686; en Zen, 291-99; *ver también* contradicciones, inconsistencia; soluciones de, 137-38, 232, 235, 287; *ver también* MU, Tumbolia, brincos fuera del sistema
Paradoja de Grelling, 23-24, 25
Paradoja de Zenón, 34-38, 41, 51, 171, 720-21
Paradoja del mentiroso, *ver* Paradoja de Epiménides
parámetros contrafactuales, 756
parámetros de entrada (BlooP), 485
parentesco conceptual, 438-39, 726-27, 770-76
pares de Cooper, 358-59
pares de prueba, 491, 519-24, 528, 533, 534-37, 551-52, 554
pares de Tortuga, 491, 521, 530; comparado con pares de prueba, 521, 530
partes, 357-59; *ver también* reduccionismo
partículas, elemental, 64-65, 165-73, 302, 357-59, 364, 616
PARRY, 353-54, 707-708, 802
Pascal, Blaise, 98, 99, 709
patrones desencadenantes de símbolos: casualidad en, 796; como clave para el significado, 383, 385, 412, 324, 325, 455-56, 719; dependencia en los niveles de significado más bajo, 673; isomorfismo entre leyes físicas y, 427-28; isomorfismo entre mentes y, 436, 445; mediatizados por mensajes, 412, 438; nombres *vs.* verbos, 426; para melodías, 429

patrones en todos los niveles, 797-98
Peano, Giuseppe, 22, 255-56
Peces y Escamas (Escher), 172-73
películas insertadas una dentro de otra, 218-19
Penfield, Wilder, 403
Penrose, Roger, 13
pensamiento analógico por computadora, sustentamiento de, 673-74
"pensamiento" artificial, 396, 710
pensamiento, sustrato de, 660
pensamiento, velocidad del, 805
Pensamientos Edificantes de un Fumador (Bach), 570-71
Pensamientos Edificantes de un Fumador (Diálogo), 641-42
Pequeño laberinto armónico (Bach), 143-46, 151-52, 153
Pequeño laberinto armónico (de Majotaur), 141-47
Pequeño laberinto armónico (Diálogo), 149, 150-53, 174, 256, 721
percepción extrasensorial, *ver* PES
percepción: visual, 103-*116*, 117, y Zen, 294
Perezoso, 749-757, 761, 807-810, 857
perla y ostra, 19, 518
perros, 275, 276, 417, 453, 722, 723
PES, 707, 822-25
peso *vs.* masa, 203, 204
π, 325, 361, 482, 490, 497-98, 644-45, 672, 715, 797, 863
pianos, 3-4, 355, 360, 750-830, *861*; invertidos, 707-10
Pickwick Papers, The (Dickens), 28, 384, 702, 706
piedra Rosetta, 195, 196-97
pilas de desplazamiento descendente, 149-59, *160*-61, 721
pipas, 569-71, 574, 577, 584, 832
pirimidinas, 599, 608, 610, 631; *ver también* nucleótidos, bases, apareamiento de bases
Pitágoras, 493-94, 557
planetas y satélites, 416-17
PLANNER, 744-48
plano *vs.* espacial, ver 2-D *vs.* 3-D
plata, 205
plegamiento de enzimas, 604-608, 614, 616, 620
plurales, 417
poder desencadenante universal, 203, 208 poda, explícito, *vs.* implícito, 336
poderes psíquicos, 822; *ver también* PES (percepción extrasensorial)
Polanyi, Michael, 678
polarones, 358-59
Policía Silva y Gould, 477
polimerasas ARN, 623, 626, 643
polipéptidos, 618, 621, 625
polirribosomas, 623
Pool B, 494
Pool F, 504
portadores de información, 187, 196, 199
posiciones de partida en el Arte de los Cordones Zen, 281-82, 283
Post, Emil, 39
postulado paralelo, *ver* quinto postulado
postulados de geometría, 106-109, 101-111, 480
postulados de Peano, 255-56, 265
postulados de piano, 652
práctica de juegos de programas IA, 709
predicados, teoría de los números, 246-47
preguntas gödelianas, sobre Lucas, 460-61
Preguntas y Especulaciones, 801, 806
Preludio, 396, 454, 544, 814, 874, 876
preludios y fugas, 328-33, 394; *ver también El Clave bien temperado, fugas*
premisa, 217
preprocesamiento, 765-69, 779
(El) Presidente *vs.* (la) Corte Suprema, 821
principales tesis del libro, 30-*31*, 55, 660, 748
Principia Mathematica, 20-21, 24, 27-28, 269, 731
principio de incertidumbre de Heisenberg, 538, 828
principio de incertidumbre, *ver* principio de incertidumbre de Heisenberg
principio del prototipo, 414, 415
probabilidad, 20, *120*
problema del perro y el hueso, 722-25
problema 3n + 1, 400-z; *ver* números maravillosos e inmaravillosos
Prodecimiento copiador (Tipogenética), 599-601; procedimientos, 156-59, 177-79, 343, 483-90, 494-96, 488-89; series de, 494
procedimientos de decisión: abajo arriba-arriba abajo, 84-89; como acertijos BlooP, 490-92; definición, 46-49; p. Abuelita, 405-*406;* p. ajenidad, 576-77, 638-39; p. axiomidad, 40, 57, 566; p. belleza, 651-59, 662, 684, 687, 688-90; p. bien formado, 215, 215 491, 687-88; p. calidad genuina de koans, 276, 281; p. calidad par de prueba, 491, 492; p. casos verdaderos, 251-52, 268, 270, 492-93, 651-59, 662, 684, 686-87; p. detenerse, 502-507; p. distribuir números en dos clases, *ver* Tesis Church Turing; p. ecuaciones diofantinas, 660-61; fin del Diálogo, 474-76; p. finalizables, 502-507; p. inteligencia, *ver* Test Turing; p. maravillosidad, 474, 501-502; p. naturaleza de Buda, 275, 281; p. números teorema, 521, 685; p. paridad Tortuga, p. piezas de Mozart, 767; primidad, 76, 175, 487-88; propiedad Goldbach, 471, 489; sin garantía de existencia de, 85-86; p. temas soñables, 455; propiedad Tortuga, 467-69, 490, 521; p. teoremidad, 46-49, 56-59, 85-87, 225-26, 481, 491-92, 602, 684-86, 688; validez de derivaciones, 229, 491, 519-21, 556; verdades numéricas teóricas, 269-70, 503-504, 650-59, 661, 677-78, 684-87; Zen, el camino, 293-94, 295-96, 297
procedimientos (FlooP), finalizables, 502-507
procesadores (computadoras), 596, 607, 646; *ver también* unidad central de procesamiento
procesos celulares, como modelos para IA, 784-85
procesos continuos *vs.* separados, 706
procesos estomacales, 676
prodigios de la calculadora, *ver idiots savants*
profase, 787-88
profesor alemán, proverbial, 153-54
programa doctor, 707-708, 719
programa Hilbert, 27-28, 270-71
programación automática, 350-51
programas BlooP, 485-*89*
programas cangrejo, 592
programas de ajedrez: Babbage y, 28-29, 865-67; brincando fuera del sistema, 44, 45, 803,

Cangrejo y, 856, 865-67; dificultad de, 177-79, 714-15; elección y, 844-45; estructura recursiva de, *177-80; fuerza y debilidad de*, 177-79; 335-36, 677, 713-14, 722; representación del conocimiento en, 703-31; sin anticipación, 714; Turing y, 702-704, 873; variedades de, 710
programas hija, 594-95, 644-45
Programas IA; Argumentación de Lucas y, 682-83; comparados con personas, 804-805; curiosidad a propósito de, 805
programas juego de damas, 676, 714-15
Programas rojos, 505
Programas "Verdaderamente Inteligentes", 801
Programas Verdes, 504-505
Prokofiev, Sergei, 176
propiedad Goldbach, 467-69, 471-72, 489, 493
propiedad Vinogradov, 466
propiedades intrínsecamente de alto nivel, 839-41
propiedades locales *vs.* globales, 23-24, 190, 423, 428-29, 438-44, 641-42, 688-90, 803-804
Proposición Básica, 308, 315
proteínas, 612-13, 643; como cerebros, datos, intérpretes, procesadores, 646; *ver también* enzimas; conocimiento procedimental, 729
Provincia mexicana, ejemplo, 414
Prudencia e Imprudencia, 226-27, 270
prueba Pons Asinorum, 716, 792
pruebas: como nunca absolutas, 226-30; de pruebas, 227-29; naturaleza de, 20-28, 70-72, 104-11, 227-35, 268-69, 541-43, 683, 839-40; *vs.* derivaciones, 42, 229, 230-31
pruebas supernaturales, 537-39
pruebas *vs.* funciones en BlooP y FlooP, 487-88, 493-94
Ptolomeo V Epifanes, 196
publicidad, 565-66
"Puedo ser escuchada (Demostrada, etc.)...", 477-639
puente de hormigas, 393
puertas de acceso, 793-94
punto activo, 624-25, 642-43
punto de órgano, 387-88
punto de vista teológico *vs.* evolucionista, 377-78
puntos (geométricos), 21-23, 106, 110-111, 118, 244, 262-63, 534, 539
puntuación, 39, 314, 520, 605, 606, 620;
purinas, 599-600, 610, 631; *ver también* nucleótidos, bases, apareamiento de bases
Pushkin, Alexander, 147
(en la traducción es Mendelssohn)

Q(N), 162-63, 179, 309, 483
Quantz, Joachin, 4
quarks, 358, 360, 412
Quine, Willard van Orman, 513, 528, 531, 830
quinereamiento, 509-517, 526, 528, 531, 587-90, 627-28
quinto postulado (Euclides), 106-111, 262, 533-34

racional *vs.* irracional, en el cerebro humano, 679-82
Rachmaninoff, Sergei, 176
RACRECIR, 875
radio de automóvil, 792-93
raíces, 822
Ramanuyan, Srinivasa, 664-68, 725
ratas en laberintos, 402-403
Rauschenberg, Robert, 834
razonamientos de sistemas formales, 45-46, 78, 304-19, 518-34, 550-57, 684-86
razonamiento formal *vs.* informal, 229-35, 269-70, 318, 531-32, 726-27, 731-32
razonamientos por programas, 672-73, 682-83, 692-700, 715-17, 720-22, 726-27, 731-32, 743-44
realidad, naturaleza de, 462-63
rebanar los niveles superiores, 364, 382, 383, 421-23, 671-84
recombinación, 777, 786-94
reconocimiento de patrones, *ver* problemas de Bongard, esqueletos conceptuales, visión por *computadora*
reconocimiento: molecular, 638-39; visual, 407-409, 764-82; *vs.* producción, 767
recorridos: circunstancias condicionales, 453-54; como incorporación de conocimientos, creencias, 447-48; determinación de un objetivo orientado, 268, 720-27; en ATN y RTN, 154-58, 177; posibilidad, en el cerebro, 330; químicos, 625-643, 784-85; versosímil *vs.* inverosímil, 453
recuperación, 149-59, 218-19
infinitud: Bach y, 11-12, 853; Escher y, 17; ilustrado, 159-61, 163-67; manipulación en forma finita, 72-261-66, 545-49, 553-54; nombres de, 562; sobrenaturales y, 536-37; tipos de, 497; *ver también, interminable recursión*, etc.
recursividad: definida, 149-51, 154-59; e impredecibilidad, 179; *ver también* incrustaciones, niveles, distinto *vs.* similar, confusión de niveles, etc.; en el lenguaje, 153-58, 694-95, 697, 698; en música, 142-49, 151-53; evitar el eterno retorno en, 149, 158-59; evitar la paradoja en, 149; indirecta, 158-62; jugando programas de juegos, 177-79, 714-15; la regla fantasiosa y, 217-19; partículas elementales y, 168-72
recursividad parcial, 507
recursividad primitiva, 479, 480, 489-97, 499, 501, 507, 52, 524-25, 534, 551, 558
recursivos acrónimos, 134, 157, 158-59, 875-880
recursos de enmarcamiento, 565-66
red conceptual, 770-74; *ver también* redes semánticas
Red de Transición Aumentada, 177, 301-32, 424, 734-35, 739-41, 745
Redes de transición recursiva, 154-58, 160-61, 171, 177, 734-35
redes neurales, *ver* símbolos
redes semánticas, 437-39; *ver también* red conceptual
reducción de problemas, 720-25; auto-aplicable, 724
reduccionismo: definición, 368; proteínas y, 614-17; *ver también* holismo *vs.* reduccionismo, tabicamiento
referencia de pronombre, 692-93, 698, 699
reflejar, *ver* isomorfismo, representación, deletrear equivocadamente y computadoras, 349-50
refrigeradores, *ver* fonógrafo o tocadiscos, ba-

ja fidelidad
registros, en computadoras, 340
reglas aplanadas de inferencia, *ver* teoremas *vs.* reglas
reglas: aritméticas *vs.* tipográficas, 306-309, 315; igualadas dentro de cadenas, *ver* teoremas *vs.* reglas; inteligencia y, 30-31, 661; *ver también* cerebros y sistemas formales

Saccheri, Girolamo, 108-10, 118, 534, 539
Sagredo, *ver* Salvati, *et al.*
SALIDA (BlooP), 484, 485-86
Salvati, Simplicio, Sagredo, 482-83, 566-67, 797, 823
Samuel, Arthur, 714-15, 811-13
saneamiento, 157-59, 178, 303, 351, 769
Satori, *ver* la iluminación
Schmidt, Johann Michael, 31
Schnirelman, Lev G., 466
Schönberg, Arnold, 147
Schrödinger, Erwin, 198
Scott, Robert, 432
secuencia de enteros, 87, 159-65, 205-207, 481-82
secuencias recursivas, 159-63, 164
seminterpretaciones, 223, 232
Sentido Común (Magritte), 831
sentido común y programas, 354
Señal de fumar, 80, 832-33
Señaladores en computadoras, 337-41, 732
señales, entrecruzándose, 379-80
separación, 416-17, 786; *ver también* clases *vs.* casos
separación, regla de, 120, 682
seudo-epigenético, 628
Shakespeare, Wm., 114, 702, 719, 837
Shepard, Roger, 851, 853
SHRDLU; 692-700, 707, 741-48, 798
Shuzan, 294
Sierpinski, W., 476
significación: códigos y, 47, 187-97, 194-98, 312; construido sobre patrones de desencadenamiento de símbolos, 382, 385, 413; de ADN, 190, 628-29, 786; de *Contracrostipunto*, 98-100; explícito *vs.* implícito, 187-209, 585-91, 688-89; en sistemas formales, *ver* interpretaciones; inteligencia y, 187, 192-94, 202-209, 592, 781; intrínseco, *ver* significación, explícito *vs.* implícito; como estructuras cognoscitivas multidimensionales, 688-90; localización de, 187-209, 481-83, 688-90; múltiple, 9-10-11, 62-64, 97-101, 111-12, 181-86, 188, 204, 311-12, 317, 482-83, 518-19, 528-29, 788; *ver también* desambiguación; en música, 98, 190, 192-94, 197, 204, 207-208, 268, 688, 740-41; objetivo, *ver* significación, explícito *vs.* implícito; como un accesorio opcional de alto nivel, 675; enraizados en isomorfismo, 103-104, 111, 312; innecesaria en la escala temporal evolutiva, 125-28; pasivo *vs.* activo, 62-63, 111, 119, 120, 126-28, 311-12, 317, 539; propósito y, 378-391
Silberescher, Löwen, 465
Silbermann, Gottfried, 34
símbolo del yo, 465, 459, 460, 482; el libre albedrío y, 843-48; inevitabilidad de, 460
símbolo *vs.* objeto, 829-37; *ver también* sujeto *vs.* objeto, uso *vs.* mención, etc.
símbolos: activación conjunta de, 413-417-19, 423, 426, 431, 690-91, 786, 800; activo *vs.* pasivo, 381-82, 385-86, 396-97; comparados con ondulaciones, 419-20; comparados con neuronas, 412, 439; de insectos, 424-25; formas de activación de los, 411-21, 425; fronteras entre, 417-21, 423-24; intercambio de mensaje y, 412, 438, 783-84; latentes, 385, 411, 419, 454; libre albedrío y, 845-48; necesidad de, para originalidad, 719; sustrato neural de, 420-21, 673; núcleo invariante del, 412; pinceladas, 416-17, 423-25; potencial, 418-20, 452-55; realizaciones de IA, 783-84, 786; sin acceso al sustrato por, *ver* inaccesibilidad; superpuestos, 410-11, 419-21; tráfico de alto nivel de los, 422; universal, 443-44; *vs.* neuronas, 409, 419-20, 426; *vs.* señales, 382-84, 411
símbolos satélite, *ver* separación
similitud: de BACH y CAGE, 181-85; de cerebros humanos, 341-42, 436-40, 443-46, 453; de la inteligencia humana y mecánica, 396, 448, 804-805; de la obra de Escher, 173; de los ASU, 444; de mariposas, 173, 436; de "medios pares", 791; de programas, 450-52; de redes semánticas, 438; disimulada, 726, 797; elusividad de, 171-74; en autorrefs y autorreps 591-96; en el mundo de Bongard, 773-778, 779, 785; intencionalidad y, 398; mecanismos sustentando la percepción de lo abstracto, 764-82, 786-92, 794-95; traducciones entre lenguajes, 439, 448-50; universalidad de la inteligencia y, 187, 592; *vs.* diferencia, 181-86; visual, 405-409, 782; *ver también* copias, isomorfismos, correspondencia conceptual
Simon, Herbert A., 357-60
simples, complejas, células hipercomplejas, *ver* neuronas
simplicidad, 204, 662, 727
Simplicio, *ver* Salvati
simulación: del cerebro íntegro, 675-76; de redes neuronales, 675
sin finalización, 482, 501-502; *ver también* búsquedas potencialmente inacabables, FlooP
sin sentido: basado en sentido, 448; generado por computadora, 733, 735-36, 739-40; generado por el ser humano, 735-36
sinapsis, 398
sintaxis *vs.* semántica, 740-41, 745-48, 800; *ver también* forma sintáctica *vs.* semántica
"sintonizar" un programa IA, 804
sistema, 305, 306, 365
sistema-C, 76-80, 85-86
sistema cercano a la descomponibilidad, 358-66
sistema decimal, 306-309, 315
sistema de cortes, 821-22
sistema hecho añicos, 137
sistema, límites de, 44-45; *ver también* brincos fuera del sistema
sistema MIU, 39-49, 56, 56, 58, 62, 227, 304-312; como modelo para TNT, 519-23, 551; tabla de reglas del, 364
sistema MIU + MU, 551
sistema-P, 76, 87-88
Sistema pq: completitud y coherencia de, 120; debilidad expresiva de, 120, 261-62, 480, 492; el procedimiento de decisión, 56-58; interpretación caballo-manzana-feliz, 61, 104, 254; interpretación sorpresiva de, 63; isomorfismos y, 59-64, 187, 737, 739

sistema tq, 77-79
sistemas axiomáticos, *ver* sistemas formales
sistemas de notación relacionados recursivamente, 562
sistemas, formal *vs.* informal, 30-31, 660-61, 706, 811-13; *ver también* cerebros, mentes, etc.
sistemas formales, presentaciones de: sistema-C, 76-87; sistema MIU, 39-49; sistema-P, 86-88; sistema-pq, 55-72; *Cálculo* Proposicional, 214, 357; TNT, 241-71; sistema tq, 76-77; *Tipogenética*, 596-607
sistemas formales *vs.* realidad, 64, 70
sistemas informales, *ver* sistemas formales *vs.* informales
sistemas operativos, 247-48, 353-55, 363
sistemas seguros *vs.* inseguros, 361
sistemas semiformales, 255; *ver también* geometría Euclidiana
sistemas sin necesidad de reglas, 705, 812; *ver también* sistemas formales vs. informales
sistemas suficientemente poderosos, 102-119, 479-80, 507-508, 544, 626
sistemas telefónicos, 348, 784
situaciones "casi", 750-57, 758-61, 767
SMUT, 16, 97, 183-85, 239, 809, 852
software y hardware, definición, 355; en el cerebro, 407, 419-20, 813, 842
Sombras, Las (Magritte), 568
Sonata para solo de Aquiles, 594
Sonata para violín y teclado en Fa menor (Bach), 191-92
Sonatas y partitas para solo de violín (Bach), 74, 75, 84, 300, 594
sonetos, 703, 719, 873
sonido en el vacío, 97
sonido suave y fuerte, *ver* pianos
Sperry, Roger, 842
Steiner, Geo., 197, 760
Stent, Gunther, 608
strands: de ADN y ARN, 608-13; en tipogenética, 601-607, 608
Subiendo y Bajando (Escher), 14-15, 12, 24, 850
subjun-TV, 752-57
subjuntivos, *ver* contrafactibles
submarcos, etc., 762; *ver también* estructura recursiva de ideas
suborganismos, *ver* subsistemas
subrutinas, 176, 343, 557, 802
subsistemas del cerebro, 455-59, 860
substitución de la notación en TNT, definición, 265
substracción, 63, 486
sueños, 447, 449, 455, 860
Suite francesa número 5, Jiga (Bach), 153
Suite para solo de cello (Bach), 83-5
sujeto *vs.* objeto, 817-29; *ver también* dualismo, uso *vs.* mención, símbolo *vs.* objeto
sumas independientes del contexto, 614-17
superconductividad, 358-59
superenredado, 816
Superficie ondulada (Escher), 299-300
superinteligencia, 804-805
supuesto de base, 762
supuestos tambaleantes, 496-97, 498-99, 506-507, 685, 686, 762, 796
surrealismo, 829-30
Sussman, Gerald, 785
sustantivos, más comunes en Inglés, 745-46
sustrato: de proteínas, 625; en la oración de Epiménides, 686, 690-91; mental, apariencia, de, 674; mental, necesidad de, por pensamiento analógico, 672-74; no interpretabilidad de, 673-74
Swieten, Baron Gottfried van, 7
Switcheroo, Q.q., 222

T (fórmula de Tarski), 685-86
tabicamiento, 359, 364, 412, 631
tabla de noteoremas, 79
tablero; evaluación: estática y dinámica, 714, 721-22; Circuitos Raros en, 713-15
tableros de ajedrez, jerarquía de, 815
tableros de ajedrez, jerarquía de, 815
Tagore, Rabindranath, 200
Tangury, Yves, 831
tarjetas, ver ARNt
Tarski, Alfred, 684-86
Taube, Mortimer, 678
Taurinus, F.A., 109
té, 181-82, 272, 323, 379-80, 392, 648, 659, 662
tejiendo, 176
telaraña, 439, 730
teléfonos, 355
televisión, 335, 409, 565, 572, 576-83, 750-57
telofase, 789
Tema Regio, 4-12, 114, 853, 876-77
témpanos, 585-86, 588
tensión armónica, 144-46; *ver también* tensión y resolución
tensión y resolución, 143-46, 151-53, 268
tentatividad, 765, 770, 774-76, 795
teorema-comprobación, mecánica, 711, 720-21, 730-32
Teorema de Church, 661-62, 679, 684-86, 720, 827
Teorema de Deducción, 220
Teorema de la Excepción, 633
Teorema de la Tortuga, *ver* Teorema de Tödel
Teorema de Tarski, 684, 685-86, 690-91, 827
Teorema de Tesler, 710, 737; *ver también* paradoja de IA, brincos fuera del sistema, esencialmente incompletos
Teorema final de Fermat: 323-28, 390, 491; contraejemplo, 325, 328, 544; invertido, 392-93; parodiado, 394, 650-51; demostración de, 325, 328, 544
Teorema Gödel: afirmación, 18-19, 120, 318; análogo de, en biología molecular, 574-75; consecuencias de, 532-45, 554-63; *Contracrostipunto* y, *ver Contracrostipunto*; ecuaciones diofantinas y, 543-44; demostración de, 20, 310-19, 518-31; LISP y, 875-76 demostración de IA y, 459-61, 557-64, 838-39; menciones breves, 85-86, 87-88, 92, 118, 575
Teorema Gödel a introspección humana, 532, 826-29
Teorema Henkin, 577
teorema-números, 309-12, 315-16, 521-24, 533-34
Teorema Tarski-Church-Turing, 662-87
Teorema Tödeliano, 575, 633
teoremas: definición, 41-42; enumeración sistemática de, 46-48, 58, 557-59, 682-83, 730; *vs.* no teoremas, 46-49, 78-79, 83-84, 85-87, 225-27, 491-92, 662, 684-85; *vs.* reglas, 51-54, 229, 602-603; *vs.* teoremas, 41, 229; *vs.* verdades, 59-65, 83-85, 102-21, 225-35, 251-52, 261-64, 269-72; *ver también* consistencia,

completitud, Teorema de Gödel, consecuencias de teoría de conjuntos, 22-26
teoría de los números: aplicaciones de, 326-28; Cangrejo y, 650-59, 662, 663-64, 677-78, 684-86; desaparición de, 269-70, 503; como minimundo tabicado, 672; esencia de, 118-19, 480; expresiones propias de, 241-43; *formalizada, ver* TNT; informal(N), 65-72, 241, 269; nociones primordiales de, 244-47; no corrientes, 118, 534-43; poderes sedantes de, 462-477; tipografía, *ver* TNT; reflejo universal de los sistemas formales, 304-310, 316-17; uso y mención, 542; "verdad", versión de, 542
Teoría tipográfica de los números, *ver* TNT
teorías concurrentes, y naturaleza de evidencia, 824
terminación impredictible pero garantizada, 472, 501-502
terminación predictible, 472, 480, 483-94, 495-97, 522, 687-88; *ver también* procedimientos (FlooP) finalizables, terminación impredictible pero garantizada
têrminos indefinidos, 110-21, 255, 539; definidos, 111, 115
términos (TNT), 243-45, 252, 253
termodinámicas no equilibradas, 822.
Teseo y Ariadne, 153
Tesis Church-Turing, 506, 507, 651, 662-84; indemostrabilidad de, 664; Versión Espiritualista, 687; Versión Habitual, 663, 684-85; Versión Hardy, 668; Versión IA, 683-84, 685; Versión Isomórfica, 670-72; Versión Microscópica, 775-76; Versión Procesos Públicos, 664, 670-71, 678, 685; Versión Reduccionista, 676, 678; Versión Tautológica, 663; Versión Theodore *Roszak*, *679*
Tesis CT, *ver* Tesis Church-Turing
Tesis IA, 684
Tesler, Lawrence G., 710
texto manejado por computadoras, 354-55
Tía Hilaria, 369-92, 451, 745
tiempo compartido, 348, 417-18, 458, 866
Tierra-Luna-Sol, sistema, 416-17
Tilde, 216, 227, 654
timina, *ver* nucleótidos
"tíos", 528-30, 549, 551-52, 554, *639*, *686*
tipoenzimas, 597-607; ligazón, preferencias de, 597-98, 604-605
Tipogenética, 592-607, 608, 614, 625; contrastada con el sistema MIU, 602-603, 608, 610
tipos, 477
tipos, teoría de los, 24-26
tirar del borde de los zapatos, 27, 346, 620, 647
TNT, 242-71; austero, 250, 253, 255, 314, 522, 631; axiomas de, 254-57, 263; como código, 310-12; como metalenguaje general, *310-12*; consistencia de, 270-71, 531-32; extendido, axiomas de, 534, 551-52; extensiones de, 534-43, 550-54; FIGURA-FIGURA figura y, 83; geometría absoluta y, 534; incompletitud de, *ver* incompletitud; introspección de, 19, 230, 313-19, 479, 518, 524, 532, 828, 840; metas de, 72
como su propio metalenguaje, 313-19, 521-28, 699; *compromiso* de, versión pictórica, 84; relajado, 270; reglas de formación, tabla de, 252-53; reglas de inferencia, 254-56; sexto axioma de, 263, 534-35, 543, 550-53; buena formación en, 242-54
TNT-derivaciones comparadas con el lenguaje de las máquinas, 341
TNT G + G', etc., 551-57
TNT + G, 550-52, 557
TNT + ~G, 552
Tödelización, repetibilidad de, 790-92, 500, 553-56, 572-75; *ver también* Gödelización, esencialmente incompleto, esquemas de respuesta, etc.
"todo", 71
Tokusan, 224-25
tónico musical, 143-45, 152-53
tónico recuperador, 124-25, 138, 147-48
tonos de Shepard, 851, 853
Cangrejo: camina y toca la flauta, 648-59; comportamiento *cuestionable de*, 662, 663-64, 678, 684-86; encuentra a Aquiles, 237; entretiene a Aquiles, 568-84; genes de, 236-37, 241, 599; inteligencia de, 648, 659, 868-69; noche musical *chez*, 854-80; origen de, 786-90; promesa de, 331, 454; recibe regalos y entretiene huéspedes, 323-33, 766, 795; rockolas de, 182-86; tarde subjuntiva *chez*, 749-57; tema de, 865, 868-69, 877, 879; *ver* Tortuga,
Tortuga, 89-92, 480, 572-77, 638, 641; cadena Zen hecha por, 319; *Canon Cangrejo y* 241, 781-88; ciclo ZET, 112-13; como clavicordio, 594; Ecuaciones Diofantinas y, 544; esquemas de respuesta y, 562; letra inicial de, 272, 599-600, 789; mencionada, 121, 201, 313; origen de, 32-34; paradoja de Carroll y, 55, 228, 811-13, 822; recursión y, 150-53, 174; retrato de, 42; solución degenerada y, 791-92; uso de palabras por, 214; *vs.* Cangrejo, 99-102, 317, 480, 500, 553-55, 638, 641
Tozan, 225, 298, 300, 567
trabajando en el sistema, *ver* vía mecánica
traducción: ARNm a proteínas, 573-74, 612, 617-20, 623-24, 628-33, 635-36, 643, 645-47; *de Crimen y Castigo*, 444-45; *de instrumental* a sonidos, 99; de "Jabberwocky", 439-41, 448; de mensajeros a cadenas, 275-78; de N a Meta-TNT, 630; en Tipogenética, 602-604, 605-607; entre lenguajes de computadora, 227-30, 349-50, 361, 450-51, 646, 748; entre lenguajes naturales, dificultades de, 339-40, 449-50; entre niveles de un cerebro, 410-11, 451-55, 841-42; entre TNT y meta-TNT, 313-19, 521-28, 841-42; Inglés a TNT, 247-52, 254, 492-93; mecánica, 450, 710, 712-13; niveles de fidelidad en, 348-50
transcripción: ADN a ARNm, 611-12, 618-20, 623-24, 626, 630, 633, 635, 638-39, 643; ADN a ARNt, koans a mensajeros, 277, 280, *281, 284*; *letras a notas, 99*; prevención de, 643
trascendentalismo, 837
trazado cursivo de figuras, 80, 82, 86
30, como posible número-MIU, 310-13
Tres Esferas II (Escher), 301
Tres Mundos (Escher), 289, 300
triángulo autoral, 112-13, 114, 817
Trío Sonata de la *Ofrenda Musical* (Bach), 8, 854, 859, 862
Tripitaka, 300
triplete índice de sobrenaturales, 538
triplete, portada, xiv, 1, 32, 321
T Tortuga, *ver* ATTACCA

Tumbolia, 137, 285, 298, 860; nivel de, 285
Turing, Alan M., 30, 461, 502-503, 506-507, 701-707, 870-80; objeciones a IA, 704-707
Turing, Sara, 702

U, como no teorema del sistema MIU, 43, 46
UCP, *ver* unidad central de proceso
Ulam, Stanislaw, 661, 735, 800
última Fuga de Fermant, 394
"último paso", 547, 553
Unamuno, Miguel de, 828
uniciclo, tandem, 749, 791
unidad central de proceso, 338-40
unidades de tipogenética, 597, 603
Unmon, 297
1-D *vs.* 3-D
uso *vs.* mención, 512-17, 542, 628, 644, 830-31; *ver también* forma, sintáctica *vs.* semántica, programas *vs.* datos, sintaxis *vs.* semántica, estructura *vs.* función

vacas, 368, 407, 414
valor I, 304-305
variables en TNT, 243-44, 352-53; libres, 245-47, 252; cuantificadas, 246, 253; *ver también* cuantificadores
Variación Goldbach, 467-68, 471-72, 521
Verbum (Escher), 300, 867, 868
verdad: es una quimera, 823-24; inexpresibilidad en TNT, 485-87; no completamente reflejable en el cerebro, 680-91; su captación por manipulaciones en los símbolos, 64-72; *vs.* belleza, 654-59, 690; *vs.* comerciales, 565-66; *vs.* falsedad, 83-84, 251-52, 269-70, 492, 662, 684-87
verdades recursivas primitivas, 480
verificación Turing, 702-707, 709, 802, 871-74; error aritmético en, 703-704; miniatura, 735-37; correcciones formuladas en, 708-709
verificador de terminación, 502-507
versiones aplanadas de la anticipación, 714
versus: ver alta fidelidad *vs.* baja fidelidad, autopercepción *vs.* autotrascendencia, Bach *vs.* Cage, clases *vs.* casos, comportamiento con propósito *vs.* sin propósito, conocimiento accesible *vs.* inaccesible, conocimiento declarativo *vs.* procedimental, conocimiento deductivo *vs.* analógico, conocimiento explícito *vs.* implícito, cordura *vs.* demencia, 2-D *vs.* 3-D, disección *vs.* apreciación de Bach, enzimas *vs.* tipoenzimas, estructura *vs.* función, fondo-arriba *vs.* alto-abajo, forma sintáctica *vs.* semántica, gente *vs.* máquinas, hormigas *vs.* colonias de hormigas, hermoso *vs.* no hermoso, holismo *vs.* reduccionismo, hombres *vs.* mujeres, improvisación *vs.* introspección, instrucciones *vs.* moldes, interpretaciones significativas *vs.* no significativas, koans genuinos *vs.* falsos, mentes *vs.* cerebros, mirar a las mujeres *vs.* mirar, niveles distintos *vs.* similares, nombres *vs.* verbos en patrones desencadenantes, palabras *vs.* letras, peso *vs.* masa, poda explícito *vs.* implícito, Presidente *vs.* Suprema Corte, procesos continuos *vs.* discretos, programas *vs.* datos, programas *vs.* programadores, propiedades locales *vs.* globales, punto de vista teológico *vs.* evolucionista, racional *vs.* irracional, razonamiento formal *vs.* informal, recorrido verosímil *vs.* inverosímil, significado pasivo *vs.* activo, significado explícito *vs.* implícito, sujeto *vs.* objeto, símbolos *vs.* neuronas, símbolos *vs.* señales, símbolos activos *vs.* pasivos, sintaxis *vs.* semántica, sistemas formales *vs.* informales, sistemas formales *vs.* realidad, sujeto *vs.* objeto, teoremas *vs.* no teoremas, teoremas *vs.* reglas, teoremas *vs.* teoremas, teoremas *vs.* verdad, Tortuga *vs.* Cangrejo, 1-D *vs.* 3-D, uso *vs.* mención, verdad *vs.* belleza, verdad *vs.* comerciales, verdad *vs.* falsedad, Zen *vs.* lógica, Zen *vs.* palabras
via-I, *ver* vía Inteligente
vía inteligente, 45-46, 78, 229-30, 725-27
Vía-M, *ver* Vía mecánica
Vía mecánica, 45-46, 78, 230, 261, 725, 727
vía U, *ver* no vía
vibraciones, 90-92, 97-100, 121, 316, 317, 554
Vice Presidente, 792
Viejo Ba.Ch., 861
Viejo Bach, 4, 544, 570-72, 875-76
Villon, François, 435
Vinigradov, Ivan M., 466
violines, 74, 84, 95, 100, 191-92, 300, 512, 702, 807, 854
virus, 634-42; relacionados a los enunciados de Henkin, 642-49
virus del mosaico del tabaco, 573-74, 641
virus no autoensambladores, 640-41
visión por computadora, 711, 741, 742
voces en fugas y cánones, 32, 331-33, 370, 380, 394, 787-88, 791, 809, 874, 877
Voltaire, François Marie Arouet de, 3
volver atrás, 116, 744, 747
vórtices, 846-53
vuelos de fantasía, 447-48
Vuillard, Edouard, 408

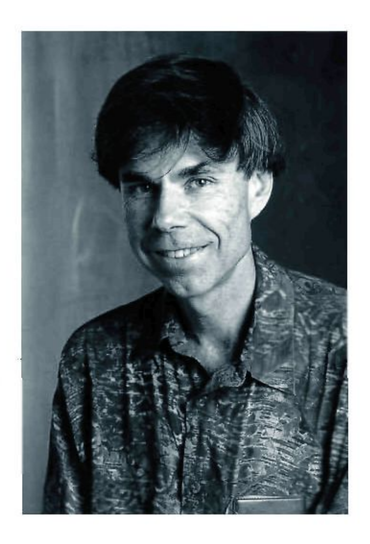
Wachter, F.D., 109
Warrin, Frank L., 432
Watergate, 821
Watson, J.D., 789
Weasel, 126
Weaver, Warren, 449
Weierstrass, Karl W.T., 476
Weizenbaum, Joseph, 707-709, 800
"When Johnny Comes Marching Home", 717
Whitehead, Alfred North, 20, 24, 27-28
Whitely, C.H., 564
Wiener, Norbert, 811
Wiesel, Torsten, 404
Wilson, E.O., 412
Winograd, Terry, 741-48
Winston, Patrick Henry, 352
Wittgenstein, Ludwig, 805-29
Wolff, Christoph, 463
Wooldridge, Dean, 425

"y", 210-13, 214, 220, 745
Yngve, Víctor, 733
Young, LaMonte, 830

Zenón de Elea, 32, 34-38, 112-13, 168, 171, 273-74, 721, 807, 837, 857
"Zentencias", 220-25

Acerca del autor

Douglas R. Hofstadter es Profesor Asistente de Ciencias de la Computación en la Universidad de Indiana.



Se terminó de imprimir en
Imprenta Madero, S. A. de C. V.,
Avena 102, 09810 México, D. F.,
el 29 de noviembre de 1982.
10,000 ejemplares.

GÖDEL, ESCHER, BACH

DOUGLAS R. HOFSTADTER

